This is a digital copy of a book that was preserved for generations on library shelves before it was carefully scanned by Google as part of a project to make the world's books discoverable online.

It has survived long enough for the copyright to expire and the book to enter the public domain. A public domain book is one that was never subject to copyright or whose legal copyright term has expired. Whether a book is in the public domain may vary country to country. Public domain books are our gateways to the past, representing a wealth of history, culture and knowledge that's often difficult to discover.

Marks, notations and other marginalia present in the original volume will appear in this file - a reminder of this book's long journey from the publisher to a library and finally to you.

Usage guidelines

Google is proud to partner with libraries to digitize public domain materials and make them widely accessible. Public domain books belong to the public and we are merely their custodians. Nevertheless, this work is expensive, so in order to keep providing this resource, we have taken steps to prevent abuse by commercial parties, including placing technical restrictions on automated querying.

We also ask that you:

+ *Make non-commercial use of the files* We designed Google Book Search for use by individuals, and we request that you use these files for personal, non-commercial purposes.

+ *Refrain from automated querying* Do not send automated queries of any sort to Google's system: If you are conducting research on machine translation, optical character recognition or other areas where access to a large amount of text is helpful, please contact us. We encourage the use of public domain materials for these purposes and may be able to help.

+ *Maintain attribution* The Google "watermark" you see on each file is essential for informing people about this project and helping them find additional materials through Google Book Search. Please do not remove it.

+ *Keep it legal* Whatever your use, remember that you are responsible for ensuring that what you are doing is legal. Do not assume that just because we believe a book is in the public domain for users in the United States, that the work is also in the public domain for users in other countries. Whether a book is still in copyright varies from country to country, and we can't offer guidance on whether any specific use of any specific book is allowed. Please do not assume that a book's appearance in Google Book Search means it can be used in any manner anywhere in the world. Copyright infringement liability can be quite severe.

About Google Book Search

Google's mission is to organize the world's information and to make it universally accessible and useful. Google Book Search helps readers discover the world's books while helping authors and publishers reach new audiences. You can search through the full text of this book on the web at `http://books.google.com/`

Über dieses Buch

Dies ist ein digitales Exemplar eines Buches, das seit Generationen in den Regalen der Bibliotheken aufbewahrt wurde, bevor es von Google im Rahmen eines Projekts, mit dem die Bücher dieser Welt online verfügbar gemacht werden sollen, sorgfältig gescannt wurde.

Das Buch hat das Urheberrecht überdauert und kann nun öffentlich zugänglich gemacht werden. Ein öffentlich zugängliches Buch ist ein Buch, das niemals Urheberrechten unterlag oder bei dem die Schutzfrist des Urheberrechts abgelaufen ist. Ob ein Buch öffentlich zugänglich ist, kann von Land zu Land unterschiedlich sein. Öffentlich zugängliche Bücher sind unser Tor zur Vergangenheit und stellen ein geschichtliches, kulturelles und wissenschaftliches Vermögen dar, das häufig nur schwierig zu entdecken ist.

Gebrauchsspuren, Anmerkungen und andere Randbemerkungen, die im Originalband enthalten sind, finden sich auch in dieser Datei – eine Erinnerung an die lange Reise, die das Buch vom Verleger zu einer Bibliothek und weiter zu Ihnen hinter sich gebracht hat.

Nutzungsrichtlinien

Google ist stolz, mit Bibliotheken in partnerschaftlicher Zusammenarbeit öffentlich zugängliches Material zu digitalisieren und einer breiten Masse zugänglich zu machen. Öffentlich zugängliche Bücher gehören der Öffentlichkeit, und wir sind nur ihre Hüter. Nichtsdestotrotz ist diese Arbeit kostspielig. Um diese Ressource weiterhin zur Verfügung stellen zu können, haben wir Schritte unternommen, um den Missbrauch durch kommerzielle Parteien zu verhindern. Dazu gehören technische Einschränkungen für automatisierte Abfragen.

Wir bitten Sie um Einhaltung folgender Richtlinien:

+ *Nutzung der Dateien zu nichtkommerziellen Zwecken* Wir haben Google Buchsuche für Endanwender konzipiert und möchten, dass Sie diese Dateien nur für persönliche, nichtkommerzielle Zwecke verwenden.

+ *Keine automatisierten Abfragen* Senden Sie keine automatisierten Abfragen irgendwelcher Art an das Google-System. Wenn Sie Recherchen über maschinelle Übersetzung, optische Zeichenerkennung oder andere Bereiche durchführen, in denen der Zugang zu Text in großen Mengen nützlich ist, wenden Sie sich bitte an uns. Wir fördern die Nutzung des öffentlich zugänglichen Materials für diese Zwecke und können Ihnen unter Umständen helfen.

+ *Beibehaltung von Google-Markenelementen* Das "Wasserzeichen" von Google, das Sie in jeder Datei finden, ist wichtig zur Information über dieses Projekt und hilft den Anwendern weiteres Material über Google Buchsuche zu finden. Bitte entfernen Sie das Wasserzeichen nicht.

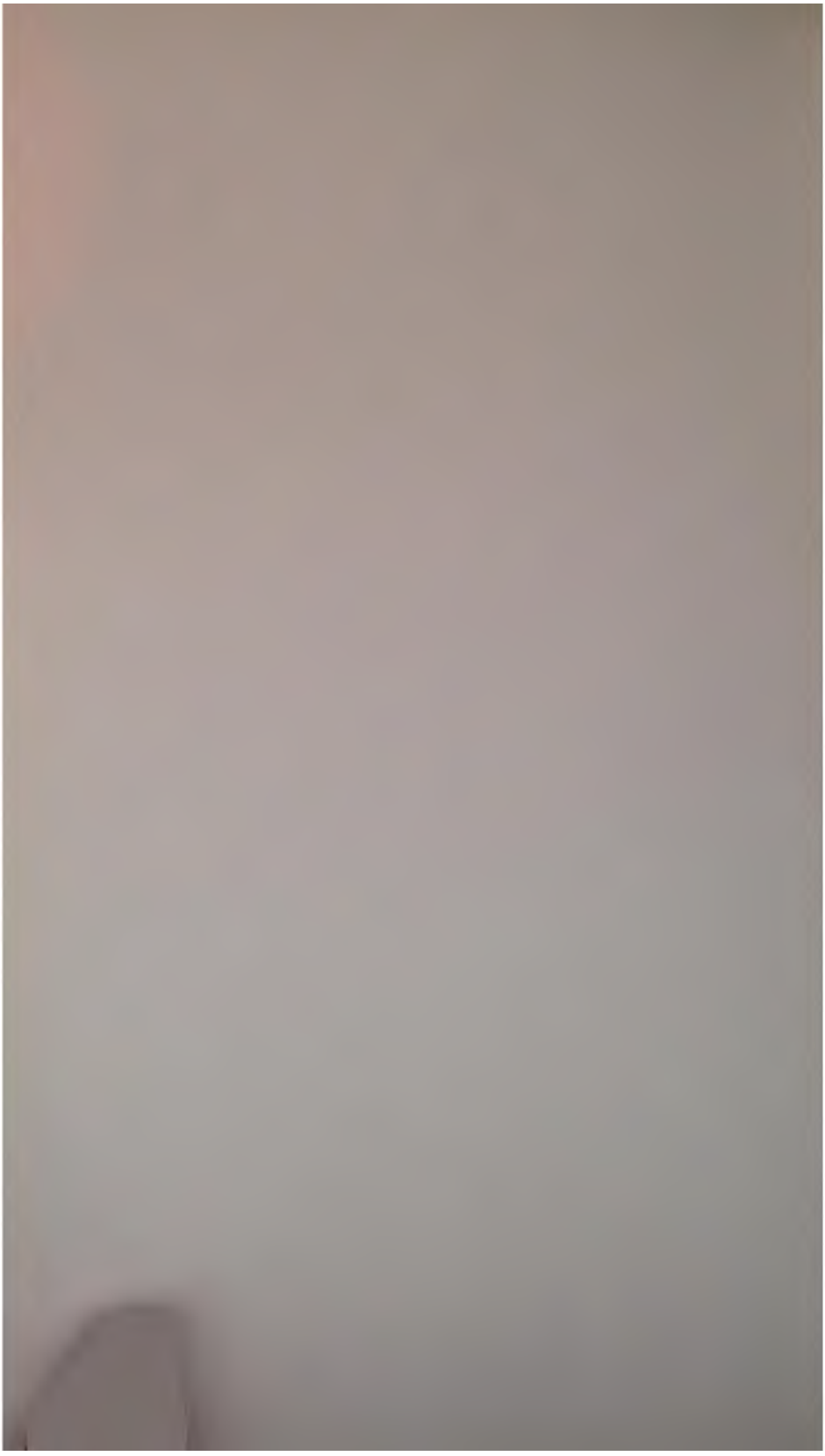
+ *Bewegen Sie sich innerhalb der Legalität* Unabhängig von Ihrem Verwendungszweck müssen Sie sich Ihrer Verantwortung bewusst sein, sicherzustellen, dass Ihre Nutzung legal ist. Gehen Sie nicht davon aus, dass ein Buch, das nach unserem Dafürhalten für Nutzer in den USA öffentlich zugänglich ist, auch für Nutzer in anderen Ländern öffentlich zugänglich ist. Ob ein Buch noch dem Urheberrecht unterliegt, ist von Land zu Land verschieden. Wir können keine Beratung leisten, ob eine bestimmte Nutzung eines bestimmten Buches gesetzlich zulässig ist. Gehen Sie nicht davon aus, dass das Erscheinen eines Buchs in Google Buchsuche bedeutet, dass es in jeder Form und überall auf der Welt verwendet werden kann. Eine Urheberrechtsverletzung kann schwerwiegende Folgen haben.

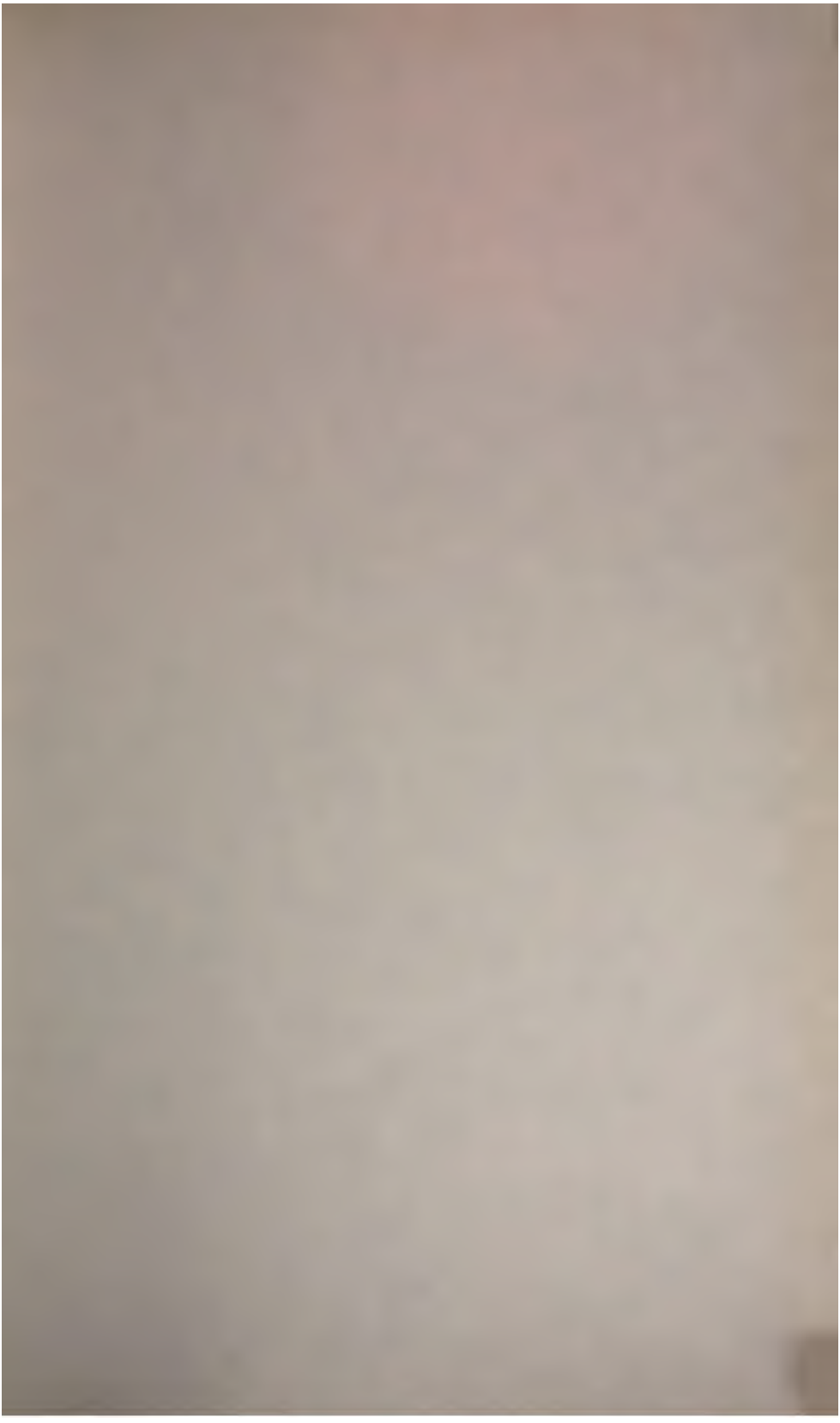
Über Google Buchsuche

Das Ziel von Google besteht darin, die weltweiten Informationen zu organisieren und allgemein nutzbar und zugänglich zu machen. Google Buchsuche hilft Lesern dabei, die Bücher dieser Welt zu entdecken, und unterstützt Autoren und Verleger dabei, neue Zielgruppen zu erreichen. Den gesamten Buchtext können Sie im Internet unter `http://books.google.com` durchsuchen.

Stanford University Libraries
3 6105 027 397 046

LIBRARIES
UNIVERSITY
STANFORD





Mittheilungen

der

Naturforschenden Gesellschaft

in Bern

aus dem Jahre 1895.

Nr. 1373—1398.

Redaktion: J. H. Graf.

BERN.
Druck und Verlag von K. J. Wyss.
1896.

Verlag von K. J. WYSS in Bern.

Bibliographie

der

Schweizerischen Landeskunde.

Unter Mitwirkung

der

hohen Bundesbehörden, eidgen. und kant. Amtsstellen

und zahlreicher Gelehrter

herausgegeben von der

Centralkommission für schweizerische Landeskunde.

☛ In deutscher und französischer Ausgabe ☚

Bis jetzt erschienen:

Fascikel Ia: *Bibliographische Verzeichnisse der landeskundlichen Litteratur und Kataloge der Bibliotheken der Schweiz.* Zusammengestellt von Prof. Dr. J. H. Graf. Bern 1894. 69 Seiten 8°. Preis Fr. 1.—

Fascikel II a: *Landesvermessung und Karten der Schweiz, ihrer Landstriche und Kantone.* Herausgegeben vom eidgen. topographischen Bureau. Redigirt von Prof. Dr. J. H. Graf. Bern 1892. 103 Seiten 8°. Preis Fr. 3.—

Fascikel II b: *Karten kleinerer Gebiete der Schweiz.* Herausgegeben vom eidg. topograph. Bureau. Redigirt von Prof. Dr. J. H. Graf. Bern 1892. 104 Seiten 8°. Preis Fr. 3.—

Fascikel II c: *Stadt- und Ortschaftspläne, Reliefs und Panoramen der Schweiz.* Herausgegeben vom eidg. topograph. Bureau. Redigirt von Prof. Dr. J. H. Graf. Bern 1893. 173 Seiten 8°. Preis Fr. 3.—

Fascikel IV b: *Die Fauna der italienischen Schweiz.* Redigirt von Prof. Dr. A. Locatelli. Como 1894. 10 Seiten 8°. Preis 50 Cts.

Fascikel IV 8: *Fauna helvetica.* Heft 4: Vögel. Zusammengestellt von Prof. Dr. Theophil Studer. Bern 1895. 57 Seiten 8°. Preis Fr. 1.—

Fascikel V 4: *Heraldik und Genealogie.* Bearbeitet von Jean Grellet und Maurice Tripet. Bern 1895. 68 Seiten 8°. Preis Fr. 1.50

(Fortsetzung auf Seite 3 des Umschlages.)

☛ Durch jede Buchhandlung zu beziehen. ☚

Mittheilungen

der

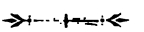
Naturforschenden Gesellschaft

in Bern

aus dem Jahre 1895.

Nr. 1373-1398.

Redaktion: J. H. Graf.



BERN.
Druck und Verlag von K. J. Wyss.
1896.

506
N283

Jahresbericht

über die

Thätigkeit der Bernischen Naturforschenden Gesellschaft

in der Zeit vom 1. Mai 1894 bis 30. April 1895.

Hochgeehrte Herren!

Das vergangene Vereinsjahr hat einen ganz normalen Verlauf zu verzeichnen. Es wurden im Ganzen 14 Sitzungen abgehalten, an denen sich folgende Herren durch Vorträge, kleinere Mittheilungen oder Vorweisungen betheiligt haben: H. H. Baltzer (2), Brückner (3), Coaz (1), Dutoit (1), Epstein (1), E. v. Fellenberg (3), Ed. Fischer (1), L. Fischer (4), v. Freudenreich (1), H. Frey (2), Graf (2), G. Huber (1), Kissling (3), Kronecker (1), Meisterhans (Solothurn) † (1), Rossel (2), F. W. Schmidt (1), S. Schwab (1), Sidler (1), Th. Steck (1), B. Studer jun. (1), Th. Studer (4), Thiessing (1), Tschirch (4), Zeller (1). Diese Mittheilungen vertheilen sich auf die verschiedenen naturwissenschaftlichen Disciplinen wie folgt: Mineralogie, Geologie, Paläontologie 16, Botanik 9, Physik 4, Chemie 3, Zoologie 3. Klimatologie, Hydrographie 3, Mathemathik, Astronomie 2, Physiologie 1, Philosophie 1.

Die Sitzungen fanden im Saale des Gasthofs zum Storchen und während der Renovirung desselben im pharmaceutischen Institut statt, dessen Auditorium uns von Herrn Prof. Tschirch gütigst zur Verfügung gestellt wurde. Fast schien es als ob im Hörsaale die Frequenz der Sitzungen im Allgemeinen eine grössere sei als im Gasthofe; sollte sich dies wirklich bestätigen, so müsste ernstlich an Verlegung sämmtlicher Sitzungen dorthin gedacht werden.

Eine auswärtige Versammlung wurde am 17. Juni in Solothurn abgehalten, wo uns die dortige naturforschende Gesellschaft und deren Präsident Herr Prof. F. Lang einen herzlichen Empfang zu Theil werden liessen. In der Sitzung im Kantonsrathssaale sprach Herr Prof. Th. Studer über die von Dr. Nüesch entdeckte Rennthierstation zum Schweizersbild bei Schaffhausen, Herr Prof. Rossel über eine neue Methode zur Darstellung von Phosphor und Herr Prof. Meisterhans entrollte uns ein Bild von der Entwicklung der Stadt Solothurn in historischer Zeit. Ein Spaziergang am Nachmittag galt den Steinbrüchen, nachdem wir schon Vormittags im naturhistorischen Museum die reichen dort erbeuteten Schätze an Fossilien, besonders die prachtvollen Schildkröten, bewundert hatten.

Im Laufe des Sommers veranstaltete ferner die Gesellschaft ei Excursion in's Schwarzwasserthal, dagegen wurde im vergangenen Wint darauf verzichtet das Jahresfest durch ein Essen zu feiern, da im Vc jahre die Betheiligung zu schwach gewesen war.

Besonderes Interesse hat je und je die naturforschende Gesellsch der Erhaltung grösserer und interessanterer erratischer Blöcke zugewend und so wurde auch im verflossenen Jahre auf Antrag von Herrn Pr L. Fischer ein bemerkenswerther Gneissfündling im Steinhölzli bei Ob gurzelen (Amt Seftigen) um den Preis von Fr. 20 von der Burg gemeinde Gurzelen käuflich erworben und dem naturhistorischen Muse übergeben.

Der mit der Buchdruckerei Wyss im Jahre 1887 abgeschloss Druck- und Verlagsvertrag für die „Mittheilungen" wurde einer Revis unterzogen, durch die der Gesellschaft eine grössere Zahl von Taus Exemplaren zur Verfügung gestellt werden. — Um unsern Publikatio mehr artistische Beilagen geben zu können, hätten wir gerne ei regelmässigen jährlichen Staatsbeitrag erwirkt. Ein solcher konnte zv nicht erlangt werden, dagegen ermuthigte uns die Erziehungsdirektion zuvorkommender Weise dazu, in einzelnen vorkommenden Fällen bei ihr Gewährung eines ausserordentlichen Beitrages einzukommen. Es wurden denn auch im verflossenen Jahre Fr. 250 zur Herstellung der geologisc Karte der Umgebung von Twann (Arbeit des Herrn Baumberger) aus zahlt und weitere 250 Fr. als Beitrag zur Veröffentlichung des geologisc Querprofils durch die Centralalpen (von Herrn Dr. R. Zeller) zugesich wofür wir an dieser Stelle unsern besten Dank aussprechen.

Ueber den Lesezirkel berichtet der Geschäftsführer, Herr Dr. Steck: „Die Zahl der Theilnehmer am Lesezirkel ist gegenüber d Vorjahre um sechs zurückgegangen und beträgt deshalb nur noch Zu den bisher gehaltenen Zeitschriften wurde die in monatlichen Numm erscheinende Revue biologique du Nord de la France, die der Gesellscha bibliothek im Tauschverkehr zukommt, beigefügt. — Begreiflicher W haben die bereits seit sechs Jahren zirkulirenden Mappen ziemlich gelit und müssen fast regelmässig vom Geschäftsführer zur Reparatur gege werden, wodurch der Gesellschaft nicht unbedeutende Kosten erwachs Es wird sogar in nächster Zeit an eine theilweise Ersetzung der Map gedacht werden müssen. — Während eine ganze Reihe von Theilnehm sich eine regelmässige Weiterexpedition der Mappen zur Pflicht mac sind bedauerlicher Weise Andere in dieser Hinsicht weniger pünktli Ja es hat sich einer der Theilnehmer soweit vergessen, dass er währ annähernd eines halben Jahres trotz wiederholter Mahnungen die Map zurückbehielt und desshalb durch Beschluss der Gesellschaft von der Li gestrichen und ausserdem mit einer Busse belegt wurde. Die dadu herbeigeführte Störung hatte leider Austritte von Mitgliedern zur Fo und macht sich zudem für alle Theilnehmer durch einen 8wöchentlic Ausfall der Mappen fühlbar. Im Hinweise darauf sollten sich alle Th nehmer mit Rücksicht auf ihre Kollegen einer strengen Befolgung Reglements befleissen."

Die Zahl der Mitglieder der Gesellschaft hat im verflossenen Ja um sechs abgenommen. Zwar sind sieben Mitglieder neu aufgenomn worden, aber dem gegenüber stehen acht Austritte, und fünf Mitglie sind uns durch den Tod entrissen worden, nämlich die Herren Dr. Christe

in Bordighera, Schwarz-Wälly, Prof. Johann Markusen, Dr. G. Glur, der noch im letzten Hefte unserer Mittheilungen seine Erstlingsarbeit veröffentlicht hatte, und Prof. F. A. Flückiger, der vor seiner Berufung nach Strassburg und seit seiner Rückkehr nach Bern stets rege an unsern Sitzungen theilgenommen hat und mehrere seiner Arbeiten in den Mittheilungen veröffentlichte. Die Gesellschaft legte einen Kranz auf seinen Sarg und in der Sitzung vom 22. Dezember führte uns Herr Prof. Tschirch in einem eingehenden Nekrolog das Leben und die hohen wissenschaftlichen Verdienste des Verstorbenen vor Augen.

Für das Vereinsjahr 1895/96 wurde zum Präsidenten gewählt Herr Prof. G. Huber, zum Vicepräsidenten Herr Prof. Th. Studer.

Der abtretende Präsident:

Ed. Fischer.

Sitzungs-Berichte.

883. Sitzung vom 26. Januar 1895.

Abends 7½ Uhr im Storchen.

Vorsitzender: Herr Ed. Fischer. Anwesend: 21 Mitglieder und 2 Gäste.

Herr J. R. Zeller: **Ein geologisches Querprofil durch die Centralalpen.** (Siehe die Abhandlungen.)

884. Sitzung vom 2. Februar 1895.

Abends 7½ Uhr im pharmac. Institut.

Vorsitzender: Herr Ed. Fischer. Anwesend: 16 Mitglieder und 2 Gäste.

1. Herr Ed. Brückner: **Hydrometrische Untersuchungen an der Rhone.**
2. Herr S. Epstein: **Erkenntnisstheorie und exakte Wissenschaft.**

885. Sitzung vom 16. Februar 1895.

Abends 7½ Uhr im pharmac. Institut.

Vorsitzender: Herr Ed. Fischer. Anwesend 24 Mitglieder und 2 Gäste.

1. Herr Th. Studer: **Hirschformen und schweineartige Thiere unserer Molasse.**
2. Herr Coaz: **Die Gletscherbewegung im Jahr 1894.**

Herr Coaz berichtet über die Gletscher-Beobachtungen in den schweizerischen Alpen im Jahre 1894 durch das schweizerische Forstpersonal.

Er erwähnt zunächst die Chronik des Herrn Prof. Forel in Morges über die «variations périodiques des glaciers» in den letzten Jahresberichten des S. A. C., hebt die Unvollständigkeit der Angaben hervor, welche dem Verfasser hierbei zur Verfügung stunden, und bemerkt, dass Herr Forel 1892 die in Basel versammelt gewesene schweizerische naturforschende Gesellschaft veranlasste, ihr Central-Organ zu beauftragen, Schritte bei den eidgenössischen und kantonalen Behörden zu thun, damit Beobachtungen über die Bewegungen der Gletscher stattfinden.

Diese Anregung hat zur Folge gehabt, dass das betr. kantonale Forstpersonal beauftragt worden ist, fragliche Beobachtungen vorzunehmen, wozu ihm das eidgenössische Oberforstinspektorat die erforderliche Instruktion und Tabellen zu den Eintragungen übermittelte. Letzteres hat die Leitung der Beobachtungen und Zusammenstellung derselben übernommen. Theils 1893, theils 1894 sind 68 Stationen eingerichtet worden. 1894 haben an 55 derselben Beobachtungen stattgefunden, welche ergaben, dass die Gletscherenden an 38 Stationen noch im Rückgang begriffen sind, an 5 Stationen haben sie sich nicht verändert, an 12 vorgestossen.

Nach Ansicht des Vortragenden sollten noch circa 20 Gletscherenden-Stationen errichtet werden, um das Beobachtungsnetz zu vervollständigen.

Baltzer hält die Beobachtungen am Ende der Gletscherzunge für ungenügend, um die Vor- und Rückwärtsperioden der Gletscher festzustellen. Es sind hierfür auch Marken an den seitlichen Felswänden weiter oben anzubringen, um damit die Niveauveränderungen der Oberfläche im ganzen Bereich der Zunge zu bestimmen. Seine am unteren Grindelwald-Gletscher zusammen mit Herrn Secundarlehrer Stump angestellten Beobachtungen (Fixpunkte beim Raufbodenband und der Bäregg) ergeben, dass der Gletscher seit 1892 an Masse stetig zurückging, nicht vorwärts ging, oder nach Herrn Coaz's mündlicher Angabe stationär blieb. Der Schluss aus der Veränderung der äussersten Gletscherzunge kann, weil unter Umständen auf lokalen Einflüssen beruhend, trügen.

Ueber den oberen Grindelwaldgletscher existiren leider keine Beobachtungen über Oberflächenniveau, daher die Angaben in Forel's „Rapport" über Vorwärtsgehen dieses Gletschers zweifelhaft erscheinen. Sie beruhen aber auch nur auf dem Vorschreiten des unteren Zungenrandes. Dass der Gletscher seit einigen Jahren etwas aufwühlte, erklärt sich durch den winterlichen Vorstoss und ist noch kein Beweis für wirkliches Vorrücken.

886. Sitzung vom 2. März 1895.

Abends 7½ Uhr im pharmac. Institut.

Vorsitzender: Herr Ed. Fischer. Anwesend: 36 Mitglieder und Gäste.

1. Herr Ed. Brückner: **Demonstrationen mit dem Projectionsapparat des Hochschulvereins.**
2. Herr A. Baltzer: **Sinterbildungen von Hammam Meskoutine.**
3. Herr A Tschirch: **Vegetationsbilder aus den Tropen.**
   Photographie des ultravioletten Spektrums.

887. Sitzung vom 16. März 1895.

Abends 7½ Uhr im Storchen.

Vorsitzender: Herr Ed. Fischer. Anwesend: 18 Mitglieder.

Herr G. Huber: **Ueber die Erweiterung des infrarothen Sonnenspektrums und über die Photographie der Strahlen kleinster Wellenlängen.**

I. P. Langley auf dem Alleghany-Observatorium gelang es, das Bolometer und seine Nebenapparate (automatische Methode) so zu vervollkommnen, dass dasselbe noch genau Temperaturschwankungen angiebt, die kleiner sind, als ein Millionstel Celsiusgrad. Vermittelst dieses Apparates gelang es ihm, das infrarothe Sonnenspektrum bis zur Wellenlänge 6 μ zu verfolgen. Es wurden in diesem Bereich über 2000 neue dunkle (inaktive) Linien gefunden.

Die Photographie der äussersten ultravioletten Strahlen wurde nach mehrjährigen Versuchen von Victor Schumann in Leipzig ausgeführt. Seine Resultate sind nach seinen Berichten an die Wiener Akademie vom Jahre 1893 und nach persönlichen Mittheilungen kurz folgende:

Durch Anwendung eines evacuirten Spektralapparates, von eigens präparirten photographischen Platten mit reinem Silberhaloidüberzug und durch Anwendung von farblosem Flussspath statt Quarz für den optischen Theil seines Apparates, gelang es Schumann, das ultraviolette Spektrum über die bis zum Jahre 1890 als äusserste bekannte Aluminium-Doppellinie N32 ($\lambda = 186$ und 185,2 $\mu\mu$) hinaus um eine Strecke zu verlängern, die etwa $2^1/_2$ mal so lang ist, als die Strecke zwischen den Linien $H\beta$ bis Al. N32. Am weitesten lässt sich das ultraviolette Spektrum des Wasserstoffs verfolgen. Dasselbe schliesst mit einer Linie ab, deren Wellenlänge von Schumann auf 100 $\mu\mu$ geschätzt wird. Die Untersuchungen werden noch fortgesetzt.

888. Sitzung vom 30. März 1895.

Abends $7^1/_2$ Uhr im Storchen.

Vorsitzender: Herr Ed. Fischer. Anwesend: 20 Mitglieder und 1 Gast.

1. Herr H. Frey: **Vorweisung von Calcitkrystallen aus dem Lötschenthal und Baltschiederthal.**

a. Schön ausgebildete normale Rhomboeder mit einem feinen Chloritüberzug.

b. Gelblich aussehende Krystalle, zwei Skalenoeder in Combination, zeigend $\frac{2}{5}$ R 2 . R 2.

c. Krystallplatten nach der Basisfläche entwickelt, häufig von feinen Asbestfasern durchwachsen. Die oR-Fläche zeigt stellenweise feine Aetzstreifen, die sich unter einem Winkel von 60° schneiden.

d. Aus dem Baltschiederthal liegen Krystalle vor, welche mit dem Anlegegoniometer noch als von R u. R3 umschlossen erkannt werden, aber die Kanten sind fast sämmtlich abgerundet, so dass die Krystalle eine mehr oder weniger ellipsoidische Form zeigen.

e. Aehnlich verhalten sich die vorliegenden sogenannten Calcittropfen, welche sehr stark gerundete Krystalle von der Form $\frac{2}{5}$ R2 u. R darstellen.

2. Herr Ed. Fischer gibt an der Hand seiner eigenen Untersuchungen (Denkschriften der schweizerischen naturforschenden Gesellschaft Band 32 I. 1890 und Band 33 I. 1893) und derjenigen Alfred Möllers (Brasilische Pilzblumen, Jena 1895) einen Ueberblick unserer gegenwärtigen Kenntnisse über die merkwürdige **Pilzgruppe der Phalloideen.** Er bespricht die wichtigsten Formen derselben, die von Möller an lebenden Exemplaren verfolgten Streckungsvorgänge des Receptaculums, sodann die jüngern Stadien der Fruchtkörperentwicklung von Clathrus cancellatus und Mutinus caninus. Trotz der grossen Gleichartigkeit, welche die einzelnen Formen der Phalloideen zeigen, müssen wir nach gegenwärtigen Kenntnissen bei denselben zwei Reihen unterscheiden, die durch keine Uebergänge verbunden sind und welche verschiedene Ausgangspunkte besitzen. Die erste derselben wird gebildet durch die Clathreae, deren Anschluss nach unten nach Rehsteiner's Untersuchungen (Botanische Zeitung 1892, Nr. 47—52: Berner Dissertation) bei der Hymenogastree Hysterangium zu suchen ist. Dieser Anschluss hat eine sehr schöne Be-

stätigung gefunden dadurch, dass Möller in Protubera eine Zwischenform entdeckt hat, welche man einfach als receptaculumlosen Clathrus bezeichnen kann. Die zweite Reihe stellen die Phalleae dar, deren Ausgangspunkt vielleicht bei der Hymenogastree Hymenogaster liegt.

3. Herr E. v. Fellenberg: **Vorweisung einiger neuer Acquisitionen des naturhistorischen Museums**, worunter namentlich hervorzuheben, das neue Mineral aus Allchar (Macedonien), welches mit Realgar vergesellschaftet vorkömmt und ein *Thallium Arsen-Sulfur* ist, nach der Formel Tl As S_2. Es krystallisirt in starkglänzenden bräunlichrothen Krystallen, anscheinend des hemirhombischen oder monoklinen Systems. Es wurde *Lorandit*, neuerdings als neu beschrieben von Krenner in Budapest, benannt. Referent hat noch nirgends eine Beschreibung oder Notiz über dieses Mineral gelesen, es scheint in Freiberg analysirt und beschrieben worden zu sein. Ferner liegen vor 2 prächtig krystallisirte Realgar von Allchar, blättriger Auripigment eben daher, ferner *Stromeyerit* (Silberkupferglanz) aus Tasmanien, gestrecktes Wismut (Schneeberg) und ein eigenthümlich stalaktitisch und röhrenförmig gestaltetes Erz (anscheinend Antimonit) von Poopó in Peru, welches *Kylindrit* genannt wird.

4. Herr E. Kissling weist einige für die **marine Molasse des Belpberges** neue Arten vor:

Lima hians Gmel., Marbachgraben, unter dem Cardienlager, häufig.
Lima inflata Chemn., „ Cardienlager.
Avicula Crossei Mayer., „ Tapeslager.
Pinna Brocchii d'Orb., „ Cardienlager, ein besonders schönes und grosses Stück.
Leda spec. „ in den blauen Mergeln.
Nucula Mayeri Hörnes, Hohburg, häufig.
Lutaria latissima Desh., Marbachgraben, Tapeslager.
Murex subasperrimus d'Orb., „ Cardienlager.
Pleurotoma excavata Bell., „ „
Ficula Burdigalensis Sow. „ „

889. Sitzung vom 20. April 1895,

Abends 7½ Uhr im Storchen.

Vorsitzender: Herr Ed. Fischer. Anwesend: 10 Mitglieder und 1 Gast.

1. Wahlen: Zum Präsidenten für das Vereinsjahr 1895/96 wird gewählt: Herr Prof. Dr. G. Huber.

   Zum Vicepräsidenten: Herr Prof. Dr. Th. Studer.

2. Herr E. Kissling: **Klippen, Chablaiszone und bunte Nagelfluh.**

3. Herr L. Fischer: **Demonstration einer Sammlung ausländischer Moose.**

Excursion am 15. Mai 1895
zur Besichtigung des erratischen Blockes bei Gurzelen.

890. Sitzung vom 25. Mai 1895.

Abends 7½ Uhr im Storchen.

Vorsitzender: Herr G. Huber. Anwesend: 19 Mitglieder.

1. Herr Ed. Fischer. **Neuere Untersuchungen über Rostpilze.**

Prof. Ed. Fischer hat seit den im letzten Jahre mitgeteilten I sultaten[1]) eine Reihe **weiterer Infektionsversuche mit Rostpilzen** an stellt, welche folgendes ergaben:

Seit langer Zeit kennt man auf *Chrysanthemum Leucanthem* ein Aecidium (*Aec. Leucanthemi* DC.), dessen Teleutosporen bis heute un kannt geblieben sind. Es ist dasselbe in unseren Voralpen nicht ger selten; Vortragender beobachtete es z. B. häufig in der Nähe von Is fluh im Berner Oberland, an derselben Stelle, wo auch die Aecidien *Centaurea montana* und *Cent. Scabiosa* vorkommen. Gestützt auf ein an Ort und Stelle gemachte Wahrnehmungen wurden im Juni 1894 . cidiosporen dieses Pilzes auf *Carex montana* ausgesät; im Juli traten letzterer Uredo- und später Teleutosporenlager einer *Puccinia* auf. Di wurden überwintert und dienten diesen Frühling zu einem Infektio versuch auf *Chrysanthemum Leucanthemum*. Letzteres ist nun gegenwär sehr reichlich mit Spermogonien besetzt und trägt auch schon einige . cidien. In einem anderen, etwa 14 Tage früher eingeleiteten Versu wurden auf *Chrysanthemum Leucanthemum* reichliche Spermogonien u Aecidien erzielt durch Infektion mittelst Teleutosporen von *Carex monta* welche in Isenfluh im Herbst 1894 an der Stelle gesammelt worden, im vorangegangenen Sommer *Chrysanthemum*-Aecidien aufgetreten war Das *Aecidium Leucanthemi* DC. gehört somit zu einer *Carex*-bewohnen *Puccinia*. Gleichzeitige Sporidienaussaat auf *Centaurea montana* u *C. Scabiosa* blieb ohne Erfolg[2]), woraus hervorgeht, dass die in R stehende *Puccinia* mit den Puccinien, welche zu den *Centaurea*-Aecid gehören, nicht identisch ist; übrigens scheinen auch kleine morphologis Differenzen zwischen den Teleutosporen zu bestehen.

Weitere Versuche über die *Centaurea*-bewohnenden Aecidien erga sodann, dass mit Teleutosporen, welche aus den Aecidiosporen von *C taurea montana* erzogen worden, nur letztere Pflanze, nicht aber *Ce Scabiosa*[2]) — und umgekehrt mit Teleutosporen, die aus den Aecidiospo von *Centaurea Scabiosa* erzogen worden, nur diese letztere, nicht a *Cent. montana* infiziert werden kann.

Wir haben es also hier mit drei weiteren «Species sorores» im Sin J. Schröters[3]) zu thun, welche ihre Teleutosporen auf *Carex monta* bilden. Es sind dieselben den ziemlich zahlreichen bereits bekann heteroecischen *Carex*-bewohnenden Puccinien, die man wohl alle als spec sorores ansehen kann, an die Seite zu stellen.

Zu diesen letztgenannten Puccinien gehört auch *P. Caricis* (Schum die auf verschiedenen *Carex*-Arten beobachtet ist; noch nicht angegeb wurde, soviel dem Vortragenden bekannt, *Carex ferruginea*. Mit Teleu sporen, die auf letzterer auftraten, wurde im letzten Sommer *Urt dioica* erfolgreich infiziert.

Dietel[4]) vermutet, dass ein Aecidium auf *Lappa officinalis* zu *Pu nia silvatica* Schröt. gehöre. Dem Vortragenden gelang es jedoch ni

---

[1]) S. Sitzungsbericht vom 28. April 1894. Diese Mitteilungen, Jahrg 1894, p. XIII.

[2]) Eine einzige kleine Spermogoniengruppe, die auf C. Scabiosa aufti ist unzweifelhaft auf Verunreinigung des Versuchs zurückzuführen.

[3]) 71. Jahresbericht der Schlesischen Gesellschaft für vaterländische Kult Botan. Sektion, 1893, p. 31 f.

[4]) Hedwigia 1888, p. 303.

mit dieser *Puccinia Lappa minor* zu infizieren, ebensowenig wie *Crepis aurea* und *Aposeris foetida,* während auf *Taraxacum officinale* zum Teil massenhafte Aecidien erzielt wurden.

Die Zusammengehörigkeit von *Uromyces Junci* (Desmaz.) mit dem Aecidium auf *Pulicaria dysenterica* ist durch Fuckel[1]), gestützt auf Beobachtungen im Freien, zum erstenmale ausgesprochen und später durch Plowright[2]) bestätigt worden. Winter zog zu diesem *Uromyces* auch ein Aecidium auf *Buphthalmum salicifolium.*[3]) Vortragender konnte aber mit *U. Junci Buphthalmum salicifolium* nicht infizieren, während gleichzeitig mit Sporidien besäte Pflanzen von *Pulicaria dysenterica* reichliche Aecidien reiften.

Wie vorsichtig man mit der Annahme der Zusammengehörigkeit von Aecidien und Teleutosporen sein muss, beweist uns *Uromyces Cacaliae* (DC.). Dieser wurde bisher als Uromycopsis betrachtet, d. h. als eine Art, die bloss Teleutosporen und Aecidien und zwar auf derselben Nährpflanze bildet. Eine Aussaat von Sporidien auf *Adenostyles alpina*, welche Vortragender vornahm, ergab aber direkt Teleutosporen, ohne vorangehende Spermogonien oder Aecidien. *Uromyces Cacaliae* ist somit ein Micro-Uromyces und das bisher dazu gezogene Aecidium muss zu denjenigen unbekannter Zusammengehörigkeit gestellt werden.

2. Herr Th. Studer: **Tertiäre Hirsche.**

891. Sitzung vom 16. Juni 1895, in Langnau,

gemeinsam mit der naturforschenden Gesellschaft von Solothurn.

1. Herr E. Kissling: **Die Herkunft der bunten Nagelfluh.**
2. Herr A. Tschirch: **Ueber die Anwendung der Photographie zur Lösung moderner, wissenschaftlicher und praktischer Streitfragen.**
3. Herr Enz: **Die neuen Theorien über Hagelbildung.**
4. Herr A. Rossel: **Demonstration des Calciumcarbidlichtes.**

892. Sitzung vom 26. Oktober 1895.

Abends 7½ Uhr im Storchen.

Vorsitzender: Herr G. Huber. Anwesend: 33 Mitglieder und Gäste.

Herr Prof. Graf tritt nach sechsjähriger Thätigkeit als Oberbibliothekar der schweiz. naturforschenden Gesellschaft zurück. An seine Stelle wird gewählt Herr Dr. Th. Steck.

Herr Ed. Brückner: **Der Gletscherabbruch an der Altels** (mit Projektionen).

Herr **Baltzer** hat ebenfalls den alten Kanderthalbergsturz zur Prüfung der widerstreitenden Angaben von Brückner und Bachmann untersucht und sich im Allgemeinen von der Richtigkeit der Anschauung Brückner's überzeugt. Es fragt sich, welches das genaue Ende des Kanderbergsturzes sei und ob die äussersten, zunächst Frutigen liegenden Massen nicht vielleicht etwas näheren Ursprung haben könnten, als die 9 Kilometer entfernte Nische des Hauptsturzes.

---

[1]) Symbolae mycologicae 1869, p. 60.
[2]) British Uredineae and Ustilagineae 1889, pag. 133.
[3]) Rabenhorst Krytogamenflora Edit. 2, Pilze p 162.

893. Sitzung vom 9. November 1895.

Abends 7½ Uhr im Storchen.

Vorsitzender Herr G. Huber. Anwesend: 14 Mitglieder und 1 Ga

Herr A. Rossel: **Herstellung von neuen chemischen Verbindung Anwendung hoher Temperaturen.** (Mit Vorweisungen.)

894. Sitzung vom 23. November 1895.

Abends 7½ Uhr im zool. Institut.

Vorsitzender: Herr G. Huber. Anwesend: 29 Mitglieder.

Herr Th. Studer: **Ueber Pithecanthropus erectus Dubois,** eine sup Uebergangsform vom Affen zum Menschen.

895. Sitzung vom 7. December 1895.

Abends 7½ Uhr im pharmac. Institut.

Vorsitzender: Herr G. Huber. Anwesend: 22 Mitglieder und 2

Herr A. Baltzer: **Der Aaregletscher in der Diluvialzeit.**

896. Sitzung vom 21. December 1895.

Abends 7½ Uhr im Storchen.

Vorsitzender: Herr G. Huber. Anwesend: 23 Mitglieder.

1. Herr Ed. Fischer: Vorweisung von **Photographien einer A Phalloideen.**

   Tuberaceen aus dem Jura: Tuber aestivum von Delsberg. Cheiromyces maeandriformis von L

2. Herr Coaz: Vorweisung eines Zweiges der **Araucaria imbrica** Zapfen, aus einem Garten bei Locarno.

3. Herr Th. Studer: **Zwei Krebsreste der marinen Molasse:**
   1) *Atelecyclus Tièchi Studer*, vom Belpberg.
   2) *Scylla* spec., aus Oberschwaben.

4. Herr Th. Steck: **Systematik und Biologie der Schlupfwespen.**

5. Herr F. Schaffer: Vorweisung eines **Petrolprüfungsapparate eines Viscosimeters von Engler.**

Verzeichnis der Mitglieder

der

Bernischen Naturforschenden Gesellschaft.

(Am 31. Dezember 1895.)

Die mit * bezeichneten Mitglieder wurden im Jahre 1895 neu aufgenommen.

Vorstand.

Prof. Dr. *G. Huber*, Präsident vom 1. Mai 1895 bis 30. April 1896.
Prof. Dr. *Th. Studer*, Vicepräsident.
B. Studer, jun., Apotheker, Kassier seit 1875.
Dr. *E. Kissling*, Sekretär seit 1892, Unterbibliothekar seit 1888.
Prof. Dr. *J. H. Graf*, Redaktor der Mitteilungen seit 1883.
Dr. Th. Steck, Oberbibliothekar und Geschäftsführer des Lesezirkels.

Mitglieder.

1.	*Anderegg*, Ernst, Dr. phil. und Gymnasiallehrer, Bern	1891
2.	*Andreae*, Philipp, Apotheker, Bern	1883
3.	*Badertscher*, Dr. A., Sekundarlehrer, Bern	1888
4.	*Balmer*, Dr. Hans, Bern	1886
5.	*Baltzer*, Dr. A., Professor der Mineralogie und Geologie, Bern	1884
6.	*Baumberger*, Ernst, Sekundarlehrer in Twann	1890
7.	*Beck*, Dr. Gottl., Vice-Direktor des Freien Gymnasiums, Bern	1876
8.	*v. Benoit*, Dr. jur. G., Bern	1872
9.	*Bonfi*, A., Rektor und Docent, Bern	1869
10.	*Bonfi*, A., V. D. M., Bern	1891
11.	*Berdez*, H., Professor an der Tierarzneischule, Bern	1879
12.	*Berlinerblau*, Dr. J., Fabrikdirekt. in Sosnowice (Russ.-Polen)	1887
13.	*v. Bonstetten*, Dr. phil. August, Bern	1859
14.	*Bourgeois*, Dr. med. E., Arzt, Bern	1872
15.	*Brückner*, Dr. Ed., Prof. der Geographie, Bern	1888
16.	*Brunner*, C., Dr. phil., Trautsohngasse 6, Wien	1846
17.	*Büchi*, Fr., Optiker, Bern	1874
18.	**Bucci*, Dr. phil., Prosektor	1895
19.	*v. Büren*, Eug., allié von Salis, Sachwalter, Bern	1877
20.	*Bützberger*, F., Dr. phil., Lehrer am Technikum Burgdorf	1893
21.	*Cherbuliez*, Dr. Direktor, Mülhausen	1861
22.	**Chimani*, Otto, Dr. phil., Bern	1895

23. *Coaz,* eidgenössischer Oberforstinspektor, Bern . . . 1
24. *Conrad,* Dr. Fr., Arzt in Bern 1
25. *Cramer,* Gottl., Arzt in Biel 1
26. *Dick,* Dr. Rud., Arzt in Bern 1
27. *Drechsel,* Prof. Dr., Bern 1
28. *Droz,* Arnold, Kantonsschullehrer in Pruntrut . . . 1
29. *Dubois,* Dr. med., Arzt, Privatdocent, Bern . . . 1
30. *Dumont,* Dr. med. F., Arzt, Privatdocent, Bern . . . 1
31. *Dutoit,* Dr. med., Arzt in Bern 1
32. *Eggenberger,* J., Dr. phil., Könitzstrasse 32 1
33. *Engelmann,* Dr., Apotheker in Basel 1
34. *v. Fellenberg,* Dr. phil. E., Bergingenieur, Bern . . . 1
35. *Fischer,* Dr. phil. Ed., Professor der Botanik, Bern . . 1
36. *Fischer,* Dr. L., Professor der Botanik, Bern . . . 1
37. **Frank,* L., Assistent am chem. Laboratorium . . . 1
38. *Frey,* Dr. Rob., Arzt in Rubigen 1
39. *v. Freudenreich,* Dr. E., Bern 1
40. *Fueter-Schnell,* Apotheker, Obstberg, Bern 1
41. *Gerber,* Paul, Dr. phil., Apotheker, Bern 1
42. *de Giacomi,* J., Dr. med., Arzt und Privatdocent, Bern . 1
43. *Girard,* Prof. Dr. med., Arzt in Bern 1
44. *Gosset,* Philipp, Ingenieur, Wabern bei Bern . . . 1
45. *Graf,* Dr. J. H., Professor der Mathematik, Bern . . 1
46. *Gressly,* Alb., Oberst, Maschinen-Ingenieur, Bern . . 1
47. *Grimm,* J., Präparator, Bern 1
48. *Gruner,* Dr. Paul, Gymnasiallehrer, Bern 1
49. *Guillaume,* Dr. L., Direkt. des eidgen. statist. Bureaus, Bern 1
50. *Guillebeau,* Professor Dr., Bern 1
51. *Haaf,* C., Droguist, Bern 1
52. *Haas,* Dr. med. Sigismund, Arzt in Muri b. Bern . . 1
53. *Hafner,* René, Apotheker in Biel 1
54. *Hasler,* Dr. phil. G., Dir. d. Telegraphen-Werkstätte, Bern 1
55. *Held,* Leon, Ingenieur, Bern 1
56. *Hess,* E., Professor an der Tierarzneischule, Bern . . 1
57. *Holzer,* Ferd., Lehrer in Oberwyl bei Büren . . . 1
58. *Huber,* Dr. G., Professor der Mathematik, Bern . . . 1
59. *Huber,* Rud., Dr. phil., Gymnasiallehrer, Bern . . . 1
60. *Jenner,* E. Entomolog, hist. Museum, Bern 1
61. *Jonquière,* Dr., Professor der Medicin, Bern . . . 1
62. *Jonquière,* Dr. med. Georg, Arzt in Bern 1
63. *Jonquière,* Dr. phil. Alf., Bern 1
64. *Käch,* P., Sekundarlehrer in Bern 1
65. *Kaufmann,* Alfr., Dr. phil. und Gymnasiallehrer, Bern . 1
66. *Kesselring,* H., Lehrer an der Sekundarschule in Bern . 1
67. *Kissling,* Dr. E., Sekundarlehrer und Privatdocent, Bern . 1
68. *Kobi,* Dr., Rektor der Kantonsschule Pruntrut . . . 1
69. *Kocher,* Dr., Professor der Chirurgie, Bern . . . 1
70. *Koller,* G., Ingenieur, Bern 1
71. *König,* Dr. Emil, Arzt in Bern 1
72. *König,* Emil, Dr. phil., Gymnasiallehrer, Bern . . . 1
73. *Körber,* H., Buchhändler in Bern 1
74. *Kraft,* Alex., Besitzer des Bernerhofs, Bern . . . 1

75. *Krebs*, A., Seminarlehrer in Bern 1888
76. *Kronecker*, Dr. H., Professor der Physiologie, Bern . . . 1884
77. *Kummer*, Dr. med. J., Arzt in Aarwangen . . . 1890
78. **Kürsteiner*, Dr. med., Bern 1895
79. *Langhans*, Fr., Lehrer am städt. Progymnasium, Bern . 1872
80. *Lanz*, Dr. Em., Arzt in Biel 1876
81. *Leist*, Dr. K., Lehrer an der Sekundarschule, Bern . . 1888
82. *Lesser*, Ed., Dr., Prof. der Dermatologie, Bern . . 1893
83. *Lindt*, Dr. med. Wilh., Arzt in Bern 1854
84. *Lindt*, Dr. med., W. jun., Arzt und Docent, Bern . . 1888
85. *Lory*, C. L., Rentier, Zürich 1894
86. **Lüscher*, E., Dr. med., Bern 1895
87. *Lütschg*, J., Waisenvater, Bern 1872
88. *Marckwald*, Dr. Max, Bonn a. Rh. 1889
89. *Marti*, Christian, Sekundarlehrer in Nidau . . . 1889
90. *Marti*, Lehrer a. d. N. Mädchenschule, Bern . . . 1892
91. *Moser*, Dr. phil. Ch., Privatdocent, Bern 1884
92. *Müller*, Emil, Apotheker in Bern 1882
93. *Müller*, Professor Dr., P., in Bern 1888
94. *Müller*, Max, Dr. med., Bern 1893
95. *Münger*, F., Dr. phil., Sekundarlehrer, Basel . . . 1892
96. *v. Mutach*, Alfr., von Riedburg, Bern 1865
97. *Mützenberg*, Dr. med. Ernst, Spiez 1885
98. *Nanni*, Dr. Wilh., Arzt in Mühleberg 1890
99. *Nicolet*, L., Pharmacien, St. Imier 1892
100. *Niehans-Boret*, Dr. med., Arzt in Bern 1870
101. *Pfister*, J. H., Mechaniker in Bern 1871
102. *Pflüger*, Dr. Professor, Bern 1889
103. *Prêtre*, Henri, Progymnasiallehrer in Biel 1890
104. *Pulver*, E., Apotheker in Interlaken 1890
105. *Pulver*, Fried., Apotheker in Bern 1876
106. *Pulver*, G., Sekundarlehrer in Wiedlisbach . . . 1891
107. *Ris*, Lehrer der Physik am städt. Gymnasium . . . 1869
108. *Rossel*, A. Dr., Professor der Chemie, Bern . . . 1893
109. *Rothen*, Dr. phil., internationaler Telegraphendirektor, Bern 1872
110. *Rothenbach*, Alfr., Gasdirektor in Bern 1872
111. *Rubeli*, Dr. O., Professor an der Tierarzneischule, Bern . 1892
112. *Sahli*, Professor Dr. H., in Bern 1875
113. *Santi*, Dr. med. Aug., Arzt in Bern 1890
114. *Schällibaum*, Dr. H., Arzt in Sils-Maria 1889
115. *Schärer*, Dr. med. Ernst, Bern 1885
116. *Schaffer*, Dr., Kantonschemiker und Docent, Bern . . 1878
117. *Schlachter*, Dr., Lehrer an der Lerberschule, Bern . . 1884
118. *Schmid*, Dr. W., Major im Generalstab, Bern . . . 1891
119. *Schmidt*, F. W., Dr. phil., Assistent am chem. Laboratorium, Bern 1893
120. *Schönenberger*, eidgen. Forstadjunkt 1894
121. *Schuppli*, M., Direktor der N. Mädchenschule, Hilterfingen 1870
122. *Schwab*, Alfr., Banquier in Bern 1873
123. *Schwab*, Sam., Dr. med., Bern 1885
124. *Sidler*, Dr., Professor der Astronomie, Bern . . . 1872
125. *Stähli*, F., Dr. phil., Gymnasiallehrer in Burgdorf . . 1893

126. *Steck,* Th., Dr. phil., Conservator am Naturhist. Museum, Bern
127. *Steiger,* Alb., Dr. phil., Bern
128. *Stooss,* Dr. med. Max, Arzt in Bern
129. *Strasser,* Dr. Hans, Professor der Anatomie, Bern
130. *Studer,* Bernhard, sen., Bern
131. *Studer,* Bernhard, Apotheker, Bern
132. *Studer,* Dr. Theophil, Professor der Zoologie, Bern
133. *Studer,* Wilhelm, Apotheker in Bern
134. *Tambor,* J., Dr. phil., Chem. Laboratorium, Bern
135. *Tanner,* G. H., Apotheker in Bern
136. *Tavel,* Professor Dr. E., Bern
137. *Thiessing,* Dr., Redaktor, Bern
138. *v. Tscharner,* Dr. phil. L., Oberst, Bern
139. *v. Tscharner-de Lessert,* Oberstlieutenant, Bern
140. *Tschirch,* Dr. A., Professor der Pharmakognosie in Bern
141. *Tschumi,* Dr., Lebensmittelinspektor, Bern
142. *Valentin,* Professor Dr. med. Ad., Arzt in Bern
143. *Volz,* Wilhelm, Apotheker in Bern
144. *Wäber-Lindt,* A., Bern
145. *Wagner,* Karl, Dr. phil., Enge-Zürich
146. **Walser,* H., Gymnasiallehrer, Bern
147. *Walthard,* Max, Dr. med., Arzt in Bern
148. *Wander,* Dr. phil., Chemiker, Bern
149. *Wanzenried,* Sekundarlehrer in Grosshöchstetten
150. *v. Wattenwyl-v. Wattenwyl,* Jean, Gemeinderat, Bern
151. *Weingart,* J., Sekundarlehrer in Bern
152. *Wüthrich,* Dr. phil. E., Direktor der Molkereischule Rütti
153. *Wyss,* Dr. G., Buchdrucker in Bern
154. *Wyttenbach-v. Fischer,* Dr., Arzt in Bern
155. *de Zehender,* Marq., Ingenieur, Bern
156. *Zeller,* R., Dr. phil., Geolog, Bern
157. *Ziegler,* Dr. med. A., eidgen. Oberfeldarzt, Bern
158. *Zumstein,* Dr. med. J. J., in Marburg
159. *Zwicky,* Lehrer am städt. Gymnasium, Bern

— — —

Im Jahre 1895 ausgetreten:

Bochicchio, Prof., R. Scuola d'Agricultura, Brescia
Chimani, Otto, Dr. phil., Bern
Epstein, Dr. phil., Bern
Frey, H., Dr. phil., Gymnasiallehrer und Privatdocent, Bern
Fuchs, Pfarrer in Unterseen
Kaufmann, Dr., Sekretär des schweizerischen Industriedepartements, Bern
Rollier, L., Geolog,
Stucki, Fr., Sekundarlehrer, Wangen a. A.
Stucki, G., Sekundarlehrer in Bern
Wartmann, Apotheker, Biel

Im Jahre 1895 verstorben:

Glur, J., Dr. phil., Bern	1890
Schenk, Dr. Karl, Bundesrat	1872
Moser, Fr., Schreinermeister, Bern	1877
Schwarz-Wälti, Commandant, Bern	1872

Korrespondierende Mitglieder:

1. *Biermer*, Dr. Professor in Breslau	1861
2. *Flesch*, Dr. M., Arzt in Frankfurt	1882
3. *Gasser*, Dr. E., Professor der Anatomie in Marburg	1884
4. *Gelpke*, Otto, Ingenieur in Luzern	1867
5. *Graf*, Lehrer, in St. Gallen	1858
6. *Grützner*, Dr. A., Prof. in Tübingen	1881
7. *Hiepe*, Dr. Wilhelm, in Birmingham	1874
8. *Imfeld*, Xaver, Topograph in Hottingen	1880
9. *Krebs*, Gymnasiallehrer in Winterthur	1864
10. *Landolf*, Dr., in Chili	1881
11. *Lang*, Dr. A., Professor in Zürich	1876
12. *Leonhard*, Dr., Veterinär in Frankfurt	1870
13. *Lichtheim*, Professor in Königsberg	1881
14. *Lindt*, Dr. Otto, Apotheker in Aarau	1866
15. *Metzdorf*, Dr. Professor der Vet.-Sch. in Proskau, Schlesien	1870
16. *Petri*, Dr. Ed., Prof. der Geographie in St. Petersburg	1883
17. *Pütz*, Dr. H., Professor der Vet.-Med., Halle a. S.	1870
18. *Regelsperger*, Gust., Dr., rue la Boétie 85, Paris	1883
19. *Rothenbach*, Lehrer am Lehrerseminar in Küssnacht	1871
20. *Schiff*, Dr. M., Professor in Genf	1856
21. *Wälchli*, Dr. med. D. J., Buenos Ayres	1873
22. *Wild*, Dr. Professor, in St. Petersburg	1859

Auszug

aus der

Jahres-Rechnung der bernischen Naturforschenden Gesellsc

1894

Einnahmen.

Saldo letzter Rechnung	Fr.	
An Jahresbeiträgen	„	1
An Eintrittsgeldern	„	
An Zinsen	„	
An verkauften Mittheilungen	„	
An ausserordentlichen Beiträgen	„	
An Legaten	„	1
	Fr.	

Ausgaben.

Mittheilungen	Fr.	1
Sitzungen	„	
Bibliothek	„	
Leszirkel	„	
Reservefonds	„	1
Verschiedenes	„	
	Fr.	

Bilanz.

Die Einnahmen betragen	Fr.	
Die Ausgaben betragen	„	
Es verbleibt ein Activ-Saldo von	Fr.	

Vermögensetat.

Das Vermögen der naturforschenden Gesellschaft besteht auf 31. Dezember 1894 in:

a) einer Obligation der eidgenössischen Bank à 4 %	Fr.	
b) dem Reservefonds auf der Hypothekarkasse	„	
c) dem Saldo obiger Rechnung	„	
	Fr.	

Reservefonds.

Saldo letzter Rechnung	Fr.	
Einlage laut obiger Rechnung	„	
Bestand auf 31. Dezember 1894	Fr.	

Der Kassier: **B. Studer,**

Studer. pinxit.

$\frac{7,5/n}{3/n}$

Boletus Cembrae Studer

Turtmannthal 2000 m.

B. Studer jun.

Beiträge zur Kenntnis der schweiz. Pilze.

b. Wallis.

Nachtrag zu der in den Mitteilungen des Jahres 1890 erschienenen Arbeit.

Bibliographie der schweiz. Hymenomyceten.

v. Haller, A. Historia stirpium indigenarum Helvetiae. Bern 1768.

Schleicher, I. C. Catalogus plantarum in Helvetia cis- et transalpina sponte nascentium. Bd. I—IV, Bex 1800. 1807. 1815 und Chambéry 1821.

Duby. Botanicon gallicum. Paris 1830.

Secretan. Mycographie suisse. Genève 1833.

Lagger, J. Verzeichnis der in der Umgegend von Thun vorkommenden Schwämme. Allgemeine Botanische Zeitung 1836, p. 225. 245.

Trog, I. G. Verzeichnis der schweizerischen Schwämme. Mitteilungen der bernischen naturforschenden Gesellschaft 1844. 46. 50. 57.

Otth. Nachträge zu dem Verzeichnis von Trog. Mitteilungen der bernischen naturforschenden Gesellschaft 1863. 65. 68. 70.

Fuckel. Symbolæ mycologicæ. Wiesbaden 1869, mit Nachträgen von 1871. 73. 75.

Wartmann & Schenck. Schweizerische Kryptogamen. Exsiccata.

Morthier & Favre. Catalogue des champignons du canton de Neuchâtel 1870.

Winter. Standortsverzeichnis der Pilze des Kantons Zürich. Manuskript 1883.

Magnus, P. Erstes Verzeichnis der aus dem Kanton Graubünden bekannt gewordenen Pilze. Jahresbericht der naturforschenden Gesellschaft Graubündens XXXIV. Chur 1890.

Leuba, F. Les champignons comestibles et les espèces vénéneuses avec lesquelles ils pourraient être confondus. Neuchâtel 1890.

Studer, B. Beiträge zur Kenntnis der schweizerischen Pilze. Mitteilungen der bernischen naturforschenden Gesellschaft. 1890.

de Jaczewski, A. Champignons de Montreux et ses environs. Bulletin de la société vaudoise des sciences naturelles XXIX. Lausanne 1893.

Amann, J. Beiträge zur Kenntnis der Pilzflora Graubündens. Jahresbericht der naturforschenden Gesellschaft Graubündens XXXVI. Chur 1892/93.

Bauer, W. Alphabetisches Verzeichnis der von Jack, Leiner und Stitzenberger herausgegebenen 10 Centurien Kryptogamen Badens. Mitteilungen des Badischen Botanischen Vereins N. 87/89 pp. 305/310 1891.

Corboz, F. Flora aclensis. Bulletin de la société vaudoise des sciences naturelles XXIX. Lausanne 1893.

Rolland, L. Excursion à Zermatt. Bulletin de la société mycologique de France. Vol. V. 1889, pag. 164—171.

Chodat, R. et Martin, Ch. Contributions mycologiques. Bulletin de la société botanique de Genève. Nr. 5, 1889, pag. 221—227.

Martin, Ch.-Ed. Contribution à la flore mycologique genevoise. Bulletin des travaux de la société botanique de Genève VII. 1892—94, p. 171—198.

Als ich im Jahr 1890 das mycologische Ergebnis meiner zwei ersten Walliser Reisen veröffentlichte, glaubte ich durch den Besuch mehrerer Thäler des Oberwallis und einiger Punkte des Unterwallis eine Übersicht gewonnen zu haben über die Hymenomycetenflora dieses merkwürdigen Kantons, aber spätere Exkursionen in andere Teile des Rhonethales überzeugten mich, dass dort für den Hymenomycetologen noch viel Arbeit harre, und erst, nachdem ich in fünf weiteren Reisen alle bedeutendern Seitenthäler der Rhone im Wallis durchforscht, gestatte ich mir mit den Ergebnissen dieser Forschungen vor die Öffentlichkeit zu treten.

Auch diese Arbeit darf keinen Anspruch auf Vollständigkeit machen. Ein Land wie das Wallis kann von einem Forscher in seinem Leben nicht erschöpft werden, geschweige denn in wenigen nahren, um so mehr, als die Pilzsaison für die Hymenomyceten immer Jur kurz ist.

Die in der früheren Publikation angeführten Arten werden hier nur soweit wiederholt, als neue Beobachtungen und neue Standorte für dieselben anzugeben sind. Die Pilznamen sind in diesem Fall durch kleineren Druck von den andern verschieden.

Clavariaceæ.

Clavaria abietina P. am Simplon

formosa P. im Lärchenwald am Lac de Champex.

botrytes var. alba Krombh im Tannenwald bei Morgins.

Telephoreæ.

Exobasidium Vaccinii Woronin auf Alpenrosen häufig.

Craterellus lutescens P. bei Monthey.

Hydnaceæ.

Hydnum nigrum Fr. Kastanienwald bei Choëx.

squamosum Tannenwald bei Morgins.

Polyporeæ.

Trametes gibbosa P. im Val de Bagnes.

Polyporus zonatus Nees an Lärchenstämmen.

gossypinus Lèv. an Tannen bei Morgins.

officinalis Vill. an Lärchen. Nicht häufig.

confluens A. & Schw. am Lac de Champex. Im Lärchenwald viel weniger häufig als im Tannenwald.

fuligineus P. im Eifischthal.

pes capræ P. bei Morgins.

ovinus Schaeff. im Nadelwald häufig.

Boletus luridus Schaeff. bei Morgins.

lupinus Fr. im Kastanienwald bei Fully & Martigny Combe.

pachypus Fr. bei Morgins.

subtomentosus L. am Lac de Champex, im Lärchenwald viel spärlicher als im Tannenwald.

rutilus Fr. im Kastanienwald bei Fully[1]).

Cembræ Studer (spec. nova, siehe Tafel I.) im Arvenwald des Turtmanthales oberhalb Plumatt.

Der Hut ist ziemlich fleischig, umbrafarben, in der Jugend schleimig, im Alter trocken mit schwachem, seidenartigem Glanz. Das Fleisch ist weiss oder blass gelblich und ändert seine Farbe beim Bruch nicht. Der Stiel ist schwach keulenförmig, in der Jugend orangegelb mit rotbraunen, unregelmässigen Flecken (nicht Schuppen), im Alter blasser, mit dunkelbraunen Flecken. Die Röhrchen sind gelb bis grünlich-gelb, mit unregelmässig eckigen, gleichfarbigen Poren, am

[1]) In der Schweiz bisher nicht publiziert.

Stiel verkürzt. Bei ganz jungen Exemplaren sind die Poren fast orangefarbig. Ring oder Schleier sind nicht vorhanden. Die Sporen sind elliptisch, olivengrün, mit 1—2 Öltröpfchen. 3 × 7,5 μ.

Der Pilz hat keinen auffallenden Geruch. Der Geschmack ist erst süsslich, später etwas brennend.

Boletus flavidus Fr. im Lärchenwald bei Evolena und Martigny.

luteus L. im Pfymwald an der Rhone.

fusipes Henfler bei Morgins im Tannenwald[1]).

Boletus cavipes überall im Lärchenwald. Die Westgrenze wird gebildet von einer Linie, die sich von Finhaut über Salvan nach Norden zieht. Im Val d'Illiez kommt dieser Pilz nicht mehr vor.

Agaricineæ.

Lentinus lepideus Fr. an Lärchenstrünken häufig.

Marasmius cauticinalis Sow. Martigny.

candidus Bolt, Bouveret.

fœtidus Sow. Chandolin.

scorodonius Fr. Leuk.

torquescens Quél. Val d'Arpette.

Cantharellus fascicularis Strauss Monthey.

Russula puellaris Fr. Val d'Arpette[1]).

emetica Fr. Val d'Illiez.

Queletii Fr. Lötschenthal.

fœtens P. Champex.

olivacea Schaeff. Morgins. Val d'Arpette.

xerampelina Schaeff. Morgins. Lötschenthal.

Linnæi Fr. Lötschenthal.

lepida Fr. Champex.

virescens Schaeff. Monthey.

sardonia Fr. Morgins.

rosacea Fr. Martigny.

furcata Lamarck. Morgins.

delica Vaill. Col du Tronc.

Lactarius subdulcis Bull. Leuk. Lötschenthal.

mitissimus Fr. Lötschenthal Champex.

flammeolus Pollini Simplon.

serifluus DC Eifischthal.

picinus Fr. Champex.

fuliginosus Fr. Morgins.

helvus Fr. Lötschenthal, Eifischthal, Val de Bagnes b. Fionnay im Lärchenwald.

rufus Scop. Martigny.

vietus Fr. Val d'Arpette.

aurantiacus Flor. dan. Berisal, Turtmanthal, Evolena.

vellereus Fr. Champex.

zonarius Bull. Fully.

insulsus Fr. Champex Morgins.

scrobiculatus Scop. überall im Lärchenwald gemein.

---

[1]) In der Schweiz bisher nicht publiziert.

Hygrocybe chlorophana Fr. Morgins, Leuk.
conica Scop. Morgins, Simplon auf den Weideplätzen.
obrussea Fr. Turtmanthal.
ceracea Wulf Morgins.
Camarophyllus virgineus Wulf Martigny, Turtmanthal im Arvenwald.
pratensis P. Eifischthal im Grase.
nemoreus Lasch Martigny.
caprinus Scop. Chandolin, Leukerbad.
Limacium tephroleucum P. Leuk. Morgins.
lucorum Kalchbr. überall im Lärchenwald.
erubescens Fr. Evolena.
penarium Fr. Morgins.
eburneum Bull. Martigny.
Paxillus atrotomentosus Batsch, Morgins.
involutus Batsch Val d'Arpette.
Gomphidius maculatus Scop. Champex.
Hydrocybe obtusa Fr. Martigny.
leucopus P. Martigny.
saturnina Fr. Martigny.
tortuosa Fr. Champex.
damascena Fr. Morgins, Champex.
subferruginea Batsch Morgins, Champex.
Telamonia brunnea P. Eifischthal, Champex.
impennis Fr. Forêt de l'Ersse[1]).
torva Fr. Eifischthal.
Dermocybe raphanoides P. Martigny.
valga Fr. Eifischthal.
fucatophylla Lasch. Eifischthal[1]).
orellana Fr. Eifischthal.
cinnamomea L. Val d'Arpette, Evolena, Simplon.
crocea Fr. Martigny.
sanguinea Wulf Champex.
anomala Fr. Martigny.
decumbens P. Martigny.
ochrophylla Fr. Champex[1]).
Inoloma callisteum Fr. Eifischthal Morgins.
argentatum P. Gondo.
opimum Fr. Martigny, Champex.
Myxacium vibratile Fr. Leukerbad.
mucosum Bull. Val d'Arpette.
Phlegmacium elegantius Fr. Fully.
multiforme Fr. Champex, Morgins.
subtortum P. Val de Bagnes bei Châble.
anfractum Fr. Champex.
percome Fr. Leukerbad.
variicolor P. Champex.
Bolbitius purifluus Lasch Morgins.
Coprinus ephemeroides Bull. Lötschenthal.
deliquescens Bull. Morgins.
fuscescens Schaeff. Martigny.
ovatus Schaeff. Eifischthal.
Panæolus fimicola Fr. Val d'Arpette.
papilionaceus Bull. Champex.

[1]) In der Schweiz bisher nicht publiziert.

separatus minor L. Val d'Arpette.

Psilocybe spadicea Schaeff. Leukerbad.

Hypholoma dispersum Fr. Lötschenthal.

elæodes Paul Martigny.

capnoides Fr. Eifischthal.

Stropharia semiglobata Batsch Champex.

stercoraria Fr. Val Ferret.

obturata Fr. Eifischthal.

Psalliota campestris L. Simplon.

rusiophylla Lasch Turtmanthal[1]).

Crepidotus alveolus Lasch Turtmanthal.

Galera ravida Fr. Morgins.

Naucoria escharoides Fr. Val d'Arpette.

Cucumis P. Martigny.

Flammula picrea P. Martigny.

sapinea Fr. Evolena. Forêt de l'Ersse.

astragalina Fr. Martigny.

fusa Batsch Morgins.

carbonaria Fr. Morgins.

gymnopodia Bull. Champex[1]).

Hebeloma truncatum Schaeff. Morgins.

lugens Jungh. Morgins.

longicaudum P. Monthey.

elatum Batsch Martigny, Lötschenthal.

crustuliniforme Bull. Morgins.

sinapizans Fr. Morgins.

versipelle Fr. Morgins, Martigny, Eifischthal.

punctatum Fr. Turtmanthal.

testaceum Batsch Forêt de l'Ersse.

sinuosum Fr. Eifischthal.

Inocybe geophylla Sow. Turtmanthal.

rimosa Bull. Morgins.

hiulca Fr. Morgins.

fastigiata Schaeff. Morgins.

fibrosa Sow. Fully.

dulcamara A. & S. Morgins.

Pholiota mutabilis Schaeff. Leukerbad.

Secretani Fr. Turtmanthal.

caperata P. Champex Martigny.

Claudopus variabilis P. Leukerbad.

Nolanea hirtipes Fl. dan. Val d'Arpette.

Clitopilus orcella Bull. Fully im Kastanienwald.

prunulus Scop. Chandolin Martigny, Fully.

Pluteus cervinus Schaeff. Simplon. Turtmanthal im Arvenwald.

Omphalia leucophylla Fr. Martigny.

chrysophylla Fr. Forêt de l'Ersse.

Mycena stipularis Fr. Evolena.

epipterygia Scop. Leukerbad, Simplon, Val d'Arpette.

---

[1]) In der Schweiz bisher nicht publiziert.

Clitocybe tortilis Lasch Leukerbad.
cerussata var. difformis Schum. Champex im Gras.
diatreta Fr. Leukerbad.
cyathiformis Bull. in allen Thälern des Wallis häufig.
flaccida Sow. Val de Bagnes.
inversa Scop. Evolena.
geotropa Bull. Evolena.
gilva P. Martigny Evolena.
maxima Fl. d. Wetterau Eifischthal.
nimbata Batsch Simplon.
Lorinseri Wint. Morgins[1]).
Laccaria amethystina Bull. Martigny, Lötschenthal.
proxima Boud. Champex im Lärchenwald.
Tricholoma *leucocephalum* Fr. Champex.
gambosum Fr. Morgins, Turtmanthal.
sulfureum Bull. Leukerbad.
virgatum Fr. Martigny.
cuneifolium Fr. Eifischthal.
saponaceum var.[1]) Fr. in den Lärchenwäldern des Eifischthales in einer merkwürdigen Variante mit gras-grünem Hut, der in der Jugend mit rostbraunen Schuppen besetzt ist, die bei zunehmendem Alter schwinden. Der Geruch ist sehr schwach, das Übrige wie bei der Normart, welche in den Walliser Wäldern häufig vorkommt.
vaccinum P. Martigny.
imbricatum Fr. Leukerbad.
columbetta Fr. Martigny, Lötschenthal.
guttatum Schaeff. Eifischthal.
luridum Schaeff. Turtmanthal.
rutilans Schaeff. Simplon.
albo-brunneum P. Martigny.
coryphæum Fr. Simplon.
inodermeum Fr. Champex[1]).
Armillaria aurantia Schaeff. Martigny.
robusta vide Secretan Nr. 47.
Lepiota seminuda Lasch Morgins.
amiantina Scop. Evolena.
Friesii Lasch Morgins, Eifischthal.
mastoidea Fr. Eifischthal.
Amanita spissa Fr. Forêt de l'Ersse.
rubescens Fr. Morgins.
cæsarea Scop. im Kastanienwald bei Monthey nicht häufig.

Zum Schlusse mache ich mir noch das Vergnügen, Allen meinen Dank auszusprechen, die mich bei dieser Arbeit mit Rat und Litteratur unterstützt haben, besonders den Herren Professoren Fischer in Bern, M. Fayod in Paris, Herrn Professor Bresadola in Trient, Mr. de Jaczewski in Montreux, M. Autran in Genf und Herrn Professor von Tavel in Zürich.

[1]) In der Schweiz bisher nicht publiziert.

J. Eggenberger.

Über eine Eigenschaft einer Gammafunktion mit einer Potenz als Argument.

(Eingereicht im Januar 1895.)

Das Euler'sche Integral II. Gattung sei definiert durch

1) $$\Gamma(y) = \int_0^\infty e^{-x} x^{y-1}\, dx.$$ (e = Basis der nat. Logarithmen.)

Substituiert man darin x durch az, so folgt

$$\Gamma(y) = a^y \int_0^\infty e^{-az} z^{y-1}\, dz \text{ und für } y = 1$$

2) $$\Gamma(1) = a \int_0^\infty e^{-az}\, dz.$$

Weil aber nach 1):

$$\Gamma(1) = \int_0^\infty e^{-x}\, dx = 1,$$

so ergibt sich aus 2):

$$\frac{1}{a} = \int_0^\infty e^{-az}\, dz.$$

Multipliziert man diese Gleichung mit da und integriert beiderseits zwischen 1 und a, so wird

3) $$\log a = \int_0^\infty \frac{e^{-z} - e^{-az}}{z}\, dz.$$

Durch n-malige Multiplikation dieser Gleichung mit da und Integration zwischen den Grenzen 0 und a, erhalten wir rechts:

$$\int_0^a{}^{(1)} \log a \, da = a \log a - a$$

$$\int_0^a{}^{(2)} \log a \, da = \int_0^a a \log a \, da - \int_0^a a \, da$$

$$= \frac{a^2}{2} \log a - \frac{a^2}{4} - \frac{a^2}{2}$$

$$\int_0^a{}^{(3)} \log a \, da = \int_0^a \left(\frac{a^2}{2} \log a - \frac{a^2}{4} - \frac{a^2}{2} \right) da$$

$$= \frac{a^3}{3!} \log a - \frac{a^3}{3!\,3} - \frac{a^3}{3!\,2} - \frac{a^3}{3!}$$

$$\int_0^a{}^{(4)} \log a \, da = \frac{a^4}{4!} \log a - \frac{a^4}{4!\,4} - \frac{a^4}{4!\,3} - \frac{a^4}{4!\,2} - \frac{a^4}{4!}$$

— — — — — — — — — — — — — — —

— — — — — — — — — — — — — — —

$$\int_0^a{}^{(n)} \log a \, da = \frac{a^n}{n!} \log a - \frac{a^n}{n\,n!} - \frac{a^n}{(n-1)\,n!} - \frac{a^n}{(n-2)\,n!} -$$

$$- \cdots - \frac{a^n}{3\,n!} - \frac{a^n}{2\,n!} - \frac{a^n}{n!}$$

$$= \frac{a^n}{n!} \log a - \frac{a^n}{n!} \left[1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n-1} + \frac{1}{n} \right]$$

a

$$\int_0^a{}^{(n)} \log a \, da = \frac{a^n}{n!} \log a - \frac{a^n}{n!} \sum_{x=1}^{x=n} \frac{1}{x}$$

und links:

$$\int_0^a{}^{1} \int_0^\infty \frac{e^{-z} - e^{-az}}{z} \, dz \, da = \int_0^\infty \left(a\, e^{-z} + \frac{e^{-az}}{z} - \frac{1}{z} \right) \frac{dz}{z}$$

$$\int_0^a{}^{2} \int_0^\infty \frac{e^{-z} - e^{-az}}{z} \, dz \, da = \int_0^\infty \left(\frac{a^2\, e^{-z}}{2!} - \frac{e^{-az}}{z^2} + \frac{1}{z^2} - \frac{a}{z} \right) \frac{dz}{z}$$

$$\int_0^{a_{(3)}} \int_0^{\infty} \frac{e^{-z} - e^{-az}}{z}\, dz\, da = \int_0^{\infty} \left(\frac{a^3 e^{-z}}{3!} + \frac{e^{-az}}{z^3} - \frac{1}{z^3} + \frac{a}{z^2} - \frac{a^2}{2!\, z} \right) \frac{dz}{z}$$

$$\int_0^{a_{(4)}} \int_0^{\infty} \frac{e^{-z} - e^{-az}}{z}\, dz\, da = \int_0^{\infty} \left(\frac{a^4 e^{-z}}{4!} - \frac{e^{-az}}{z^4} + \frac{1}{z^4} - \frac{a}{z^3} + \frac{a^2}{2!\, z^2} - \frac{a^3}{3!\, z} \right) \frac{dz}{z}$$

$$\int_0^{a_{(5)}} \int_0^{\infty} \frac{e^{-z} - e^{-az}}{z}\, dz\, da = \int_0^{\infty} \left(\frac{a^5 e^{-z}}{5!} + \frac{e^{-az}}{z^5} - \frac{1}{z^5} + \frac{a}{z^4} - \frac{a^2}{2!\, z^3} + \frac{a^3}{3!\, z^2} - \frac{a^4}{4!\, z} \right) \frac{dz}{z}$$

— — — — — — — — — — — — — — — — — —

$$\beta) \int_0^{a_{(n)}} \int_0^{\infty} \frac{e^{-z} - e^{-az}}{z}\, dz\, da = \int_0^{\infty} \left(\frac{a^n e^{-z}}{n!} + \frac{(-1)^{n+1} e^{-az}}{z^n} + \frac{(-1)^n}{z^n} + \frac{(-1)^{n-1} a}{z^{n-1}} + \frac{(-1)^{n-2} a^2}{2!\, z^{n-2}} + \cdots + \frac{(-1)^3 a^{n-3}}{(n-3)!\, z^3} + \frac{(-1)^2 a^{n-2}}{(n-2)!\, z^2} - \frac{a^{n-1}}{(n-1)!\, z} \right) \frac{dz}{z}$$

$$= \int_0^{\infty} \left[\frac{a^n}{n!} e^{-z} - \frac{a^{n-1}}{(n-1)!} \frac{1}{z} + \frac{a^{n-2}}{(n-2)!} \frac{1}{z^2} - \cdots + \frac{(-1)^{n-2}}{z^{n-2}} \frac{a^2}{2!} + \frac{(-1)^{n-1}}{z^{n-1}} a + \frac{(-1)^n}{z^n} + \frac{(-1)^{n+1}}{z^n} e^{-az} \right] \frac{dz}{z}.$$

Aus den Gleichungen α) und β) folgt:

$$4) \quad \frac{a^n}{n!} \log a = \frac{a^n}{n!} \cdot \sum_{x=1}^{x=n} \frac{1}{x} + \int_0^{\infty} \left[\frac{a^n}{n!} e^{-z} - \frac{a^{n-1}}{(n-1)!\, z} + \frac{a^{n-2}}{(n-2)! z^2} \mp \cdots + \frac{(-1)^{n-2} a^2}{z^{n-2}\, 2!} + \frac{(-1)^{n-1} a}{z^{n-1}} + \frac{(-1)^n}{z^n} + \frac{(-1)^{n+1} e^{-az}}{z^n} \right] \frac{dz}{z}.$$

Setzt man in Gleichung 4) der Reihe nach a = 1, 2, 3 ... a — 2, a — 1 und addiert sämtliche Gleichungen, so ergibt sich, wenn man zur Abkürzung

$$1^{1^n} \cdot 2^{2^n} \cdot 3^{3^n} \ldots (a-2)^{(a-2)^n} (a-1)^{(a-1)^n} = \Gamma(a^{a^n})$$

als neue Funktion setzt:

$$5) \quad \frac{\log \Gamma(a^{a^n})}{n!} = \frac{\sum_{x=1}^{x=a-1} x^n \sum_{x=1}^{x=n} \frac{1}{x}}{n!} + \int_0^{\infty} \left[\frac{e^{-z} \sum_{x=1}^{x=a-1} x^n}{n!} - \frac{\sum_{x=1}^{x=a-1} x^{n-1}}{(n-1)!\, z} + \frac{\sum_{x=1}^{x=a-1} x^{n-2}}{(n-2)!\, z^2} - \mp \ldots \right.$$

$$\left. + \frac{(-1)^{n-2} \sum_{x=1}^{x=a-1} x^2}{2!\, z^{n-2}} + \frac{(-1)^{n-1} \sum_{x=1}^{x=a-1} x}{z^{n-1}} + \frac{(-1)^n}{z^n} + \frac{(-1)^{n+1} \sum_{\alpha=1}^{\alpha=a-1} e^{-\alpha z}}{z^n} \right] \frac{dz}{z}.$$

Ebenso für ein um die Einheit kleineres Argument:

$$6) \quad \frac{\log \Gamma(a-1)^{(a-1)^n})}{n!} = \frac{\sum_{x=1}^{x=a-2} x^n \sum_{x=1}^{x=n} \frac{1}{x}}{n!} + \int_0^{\infty} \left[\frac{e^{-z} \sum_{x=1}^{x=a-2} x^n}{n!} - \frac{\sum_{x=1}^{x=a-2} x^{n-1}}{(n-1)!\, z} + \frac{\sum_{x=1}^{x=a-2} x^{n-2}}{(n-2)!\, z^2} \mp \ldots \right.$$

$$\left. + \frac{(-1)^{n-2} \sum_{x=1}^{x=a-2} x^2}{2!\, z^{n-2}} + \frac{(-1)^{n-1} \sum_{x=1}^{x=a-2} x}{z^{n-1}} + \frac{(-1)^n}{z^n} + \frac{(-1)^{n+1} \sum_{\alpha=1}^{\alpha=a-2} e^{-\alpha z}}{z^n} \right] \frac{dz}{z}.$$

Durch Subtraktion der Gleichung 6) von 5) und unter Berücksichtigung folgender Thatsachen:

$$\sum_{\alpha=1}^{\alpha=a-1} e^{-\alpha z} = \frac{1 - e^{-(a-1)z}}{e^z - 1},$$

$$\sum_{\alpha=1}^{\alpha=a-2} e^{-\alpha z} = \frac{1 - e^{-(a-2)z}}{e^z - 1},$$

$$\sum_{\alpha=1}^{\alpha=a-1} e^{-\alpha z} - \sum_{\alpha=1}^{\alpha=a-2} e^{-\alpha z} = e^{-(a-1)z} \qquad \text{und}$$

$$\sum_{x=1}^{x=a-1} x^n - \sum_{x=1}^{x=a-2} x^n = (a-1)^n$$

erhält man:

$$(7 \quad \frac{\log \Gamma(a^n)}{n!} - \frac{\log \Gamma((a-1)^{(a-1)^n})}{n!} = \frac{(a-1)^n \sum_{x=1}^{x=n} \frac{1}{x}}{n!} +$$

$$\int_0^{\infty} \left[\frac{(a-1)^n e^{-z}}{n!} - \frac{(a-1)^{n-1}}{(n-1)!\, z} + \frac{(a-1)^{n-2}}{(n-2)!\, z^2} \mp \cdots \right.$$

$$\left. + \frac{(-1)^{n-2}(a-1)^2}{z^{n-2}\, 2!} + \frac{(-1)^{n-1}(a-1)}{z^{n-1}} + \frac{(-1)^n}{z^n} + \frac{(-1)^{n+1} e^{-(a-1)z}}{z^n} \right] \frac{dz}{z}.$$

Nach Gleichung 4) ist aber die rechte Seite von Gleichung 7)

$$= \frac{(a-1)^n \log (a-1)}{n!}.$$

Diesen Ausdruck substituiert, ergibt:

$$8) \qquad \frac{\log \Gamma(a^n)}{n!} - \frac{\log \Gamma((a-1)^{(a-1)^n})}{n!} = \frac{(a-1)^n \log (a-1)}{n!}$$

oder

$$9) \qquad \Gamma(a^n) = (a-1)^{(a-1)^n}\, \Gamma((a-1)^{(a-1)^n}).$$

Für $n = o$ folgt aus dieser Gleichung die bekannte Beziehung:

$$\Gamma(a) = (a-1)\, \Gamma(a-1).$$

Die in Gleichung 5) gegebene Funktion genügt somit der ersten Eigenschaft einer Gammafunktion. Der o-Punkt ist für dieselbe ein Unstetigkeitspunkt.

A. Baltzer.

Vom Rande der Wüste.

(Mit 3 Tafeln)

Populärer Vortrag gehalten im November 1894 in der bernischen Naturforschenden Gesellschaft.

(Eingereicht Anfangs Januar 1895.)

Man reist heutzutage mit der Eisenbahn in 28 Stunden von Algier nach Biskra; wem es aber darum zu thun ist möglichst schnell dahin zu kommen, der fährt von Marseille in 36 Stunden per Schiff nach der algerischen Küstenstadt Philippeville (Provinz Constantine) und benutzt von hier die direkte Bahnverbindung, die in 13 Stunden nach Biskra führt.

Im Folgenden versuche ich Ihnen ein Bild zu entwerfen zunächst von der Oase *el Kantara* und dem benachbarten Atlasgipfel *Djebel Metlili,* dann von *Biskra* und endlich von der *Wüste bei Biskra.*

El Kantara und Djebel Metlili.

El Kantara ist ein 499 m. über Meer gelegener Ort im südlichen Atlas, noch 60 km. von Biskra entfernt. Hier gedachte ich irgend eine Bergbesteigung auszuführen und einen ersten Blick auf die Wüste zu werfen. Von der kleinen französischen Schenke bei der Station aus führt die Strasse auf einen engen Durchpass zu, der sich bald als echte Cluse entpuppt, welche die letzte Kette des Atlas gegen die Wüste hin durchbricht. Es ist der berühmte «*Foum el Sahra*» oder Mund der Wüste, eine jahrtausendealte Völkerstrasse. Hier befindet sich eine sehr scharfe Vegetationsgränze zwischen noch mediterraner Flora mit Lorbeer, Myrthe etc. und der Region der Dattelpalme, die wie mit einem Schlage nach Passirung der Clus in etwa 20000 Exemplaren aufzieht. In diesen Palmenhainen liegen die 3 Dörfchen von *el Kantara;* mittendurch schlängelt sich das gleichnamige Flüsschen

mit steilen palmengekrönten Uferabstürzen. Die Lehmhütten der von der Palmenkultur lebenden Araber sehen wir hier zum erstenmal, auch eine alte Befestigung mit Lehmthürmen; darüber ragt die einförmige Wand einer niedrigen, randlichen Atlaskette empor. Diese lang sich hinziehende Wand, mit steil südfallenden Schichten, zeigt eine merkwürdige Erosion. Unten in der steilen Partie treten nur schmale, aber tief eingeschnittene Erosionsfurchen auf, oben im terrassenförmigen Theil sind es breite, baumförmig verästelte Rinnen.

Im Rückweg fand ich auch den Gipfel, den ich zu besteigen wünschte. Er erhebt sich westlich von der Station 1500 m. über Meer und trägt einen damals nicht benutzten «*Poste optique*», wie er den Franzosen diente die Annäherung räuberischer Araber zu erkunden und weiter zu melden. Diese Spitze verhiess mir einen weiten Ausblick, und so wurde für den folgenden Tag mit dem Führer Achmed ben Arabi das Nöthige verabredet.

Früh brachen wir wohlausgerüstet auf, anfänglich durch ein ödes, vegetationsloses Längsthal zwischen 2 Juraketten reitend. Plötzlich öffnet sich in der nördlichen Kette eine wilde, enge, in die phantastischen Coulissen der Kalktafeln eingeschnittene Schlucht, kaum Raum für den Fusspfad lassend. Lang stiegen wir aufwärts, bogen oben in eine weniger tiefe Seitenschlucht ein, dann gings in weiten Bogen an der Bergflanke hin, bis der ersehnte Wachtthurm auftauchte.

Der Ausblick von da oben war ergreifend, aber wie ihn schildern? Zudem liegt der Hauptreiz ja in den Farben, die so gänzlich verschieden sind von dem, was ich von der Heimat gewohnt war.

Vor Allem zieht es den Blick südwärts nach der Wüste, wo er schrankenlos im Raum sich verliert.[1]) Vorn schlängelt sich in vielen Windungen der *Oued el Kantara* (Oued = Fluss und Flussbett) durch das Hügelland hin. Ein kleiner smaragdgrüner Fleck ist die Oase *el Outaya*. Dann Hügelketten und Palmenstreifen: das sind die Oasen von *Biskra*, 60 km. von uns entfernt. Dann folgt eine weite, weite Ebene im zartesten Graugelb, aus der hier und da niedrige, scharfe, fein modellirte Kämme hervortauchen. Sie verschwimmt nach Süden, aber weit hinten taucht ein grosser, glänzender Spiegel auf, in 140 km.

---

[1]) Die beiden Lichtdrucktafeln I und II beziehen sich zwar auf einen viel niedrigeren Punkt, nämlich den nur einige 100 m. über Meer hohen *Col de Sfa*, nördlich von Biskra, doch geben sie immerhin eine annähernde Vorstellung der Wüste bei Biskra.

geradliniger Entfernung: das ist der *Chott Melrir.*[1]) Dahinter trennt sich noch deutlich eine graue und am äussersten Horizont eine graubläuliche zackenlose Kette ab. Über Alledem wölbt sich kein tiefblauer italienischer, sondern ein weisslichblauer Himmel, wie ich ihn dann immer so bei Biskra beobachtet habe.

Nun das Bild im Osten. Zwar hatte ich den grossen Atlas zwischen Batna und Biskra mit der Bahn durchschnitten, aber noch keine Schneespitzen gesehen. Nun lagen sie vor mir, eine Reihe von Ketten bis zu über 2000 m. ansteigend, theils spitze Nadelformen, theils Rücken im Längsprofil. Besonders ein Schneeberg fällt ins Auge, eine ganz flache, schneebedeckte Pyramide, die auf einem niedrigen, steil abfallenden Felsensockel ruht. Im ganzen ist der Blick nicht ebenbürtig einer unserer grossen Hochgebirgsansichten, wie der vom Faulhorn oder Brienzer-Rothhorn.

Im Vordergrund sieht man die Station el Kantara und den schon genannten «Mund der Wüste». Man überschaut deutlich die stundenlange, niedrige Kalkkette, in welcher diese Cluse und noch mehrere andere eingeschnitten sind. Sie ist grell beleuchtet, graublau und ganz vegetationslos. Dahinter liegen noch mehrere ähnliche südwest-nordost streichende Ketten, welche schliesslich am Rand der Wüste ebenso abstossen, wie unsere Juraketten an der Ebene. Sie sind röthlich, weiter hinten bläulich gefärbt und ebenfalls vollständig nackt und kahl.

Wohlthuend unterbricht in Südwest ein grösserer, von Grün eingefasster Teich die Öde.

In West und Nordwest liegt zunächst ganz steriles Bergland mit einzelnen dunkelfarbigen Buschgruppen, dann folgt die grosse Ebene des *Chotts el Hodna* in zartesten gelblichen Tönen, dermalig offenbar ohne Wasser. Darüber ziehen sehr langsam auffällige, tiefschwarze Flecken, es sind die Schatten von Cumuluswolken. Dahinter erscheinen in zartesten hellbläulichen Tönen die Ketten des *kleinen Atlas.*

Endlich in Nord und Nordost gegen *Batna* zu sieht man nichts als zerrissene, gelbliche, vegetationslose Bergrücken, eine ungeheure Öde, aber mit grossartiger Perspektive.

---

[1]) Der *Chott Melrir* misst nach Rondaire (La Mission des Chotts) 6700 km und liegt 24 m. tiefer als der Meeresspiegel. Er ist nach Buory mit einer so reinen, weissen Salzkruste bedeckt, dass er von weitem wie ein gefrorener See aussieht. Seine Gehänge enthalten auch Gyps. Bei Tozeur befindet sich eine Saline.

Das Gesammtbild ist grundverschieden von unseren Alpenscenerien. Es fehlen die grünen Weiden und Waldflächen, die Belebung durch Viehherden und menschliche Ansiedlungen. Der Anblick wäre in seiner Öde unerträglich, wenn nicht in wunderbarer Weise die Farben einen Ersatz böten, Farben von ganz anderer Art wie bei uns und von einer Zartheit der Nuancen, wie sie in unsern Breiten überhaupt nicht vorkommen. Es sind besonders die gelben Nuancen, vom reinen Gelb zu röthlichgelb, braungelb und graugelb, ferner graue und bläuliche Töne in allen Arten. Unser Grün erscheint nur in ganz dunklen Nuancen; über diesen Farbeneffekten vergisst man die Öde.

Ich erwähne noch den Mangel an thierischem Leben, mit Ausnahme krähenartiger Vögel, eines Schakals, der sich, als wir abzogen, sofort über unsere Speisereste hermachte. Schakale sollen hier häufig vorkommen.

Biskra.

Biskra, schon zur Römerzeit ein wichtiger Ort, 111 m. über Meer am Wüstenrand gelegen, ist gegenwärtig von 10000 Einwohnern bewohnt, von denen 432 Franzosen sind, wozu noch die Zuaven- und Spahi-Garnison kommt. Es ist Hauptort eines Militärkreises und liegt am *Oued Biskra*, der im Atlas entspringt. Seinen grossen touristischen Ruf, abgesehen von der Wichtigkeit als Handelsplatz und Ausgangspunkt von Karavanenrouten, verdankt es mehreren Umständen. Seit Eröffnung der französischen Eisenbahn ist es leicht zugänglich, bevorzugt von «globe trotters» wegen seiner eigenartigen Lage am Rand von Wüste und Atlas. Mit Recht heisst Biskra *Wüstenstadt*. In neuerer Zeit tritt sie als klimatische Station auf den Plan, und wird ihr mildes und trockenes Klima hoch gepriesen. Ärztliche Broschüren machen Reklame, besonders noch für die benachbarten heissen Quellen von *Hammam Salahin*. In wie weit Biskra in dieser Beziehung eine Zukunft hat, kann ich nicht sagen, muss aber die Lage der Stadt hochinteressant bezeichnen; ich möchte da ebensoviele Monate zubringen als ich leider nur Wochen verwenden konnte.

Der erste Eindruck, wenn man von der Station zum Hotel fährt, wobei man nur den neuen französischen Theil berührt, hat etwas Badeortmässiges. Ein grosser viereckiger Stadtpark mit Bosquets und Palmen besetzt, von Wasseradern durchrieselt und umgeben von niedrigen Arkaden mit französischen Läden, ferner einige stattliche Gebäude von europäischer Art verrathen, wenn auch nicht die Eleganz

von Interlaken, so doch eine gewisse Behäbigkeit und Wohlhabenheit. Wir schauen in schnurgerade Nebenstrassen mit niedrigen, weissgetünchten Häusern hinein. Das uns empfohlene Hotel *Oasis* ist ein Steinhaus mit breiter Veranda, auf welche die fensterlosen Zimmer mit Glasthüren ausmünden, mit einem 4eckigen grossen Hof, französischer Küche und zum Theil schweizerischer Bedienung, also für uns sofort anheimelnd.

Unser erster Ausgang führt uns auf den Markt, mitten in das echt arabische Gewühl hinein. Da werden Gerste, Weizen, Gemüse, Piperons und vor allem Datteln von den weiss beburnussten Arabern mit lautem Geschrei gehandelt. In langen Reihen stehen hier die Schuhe von Biskra, die Produkte der einheimischen Weberei, Geflechte von Alfa, Sattlerwaren, die arabischen Portemonnaies und Geldtaschen, Handspiegel, Fächer u. s. w. In grossen Schläuchen befindet sich Dattelbrei, der mit Milch zusammen genossen wird, sowie andere Viktualien. Einen originellen Artikel für die Fremden bilden ausgestopfte Eidechsen verschiedener Art, z. B. der Stachelschweif (Uromastyx spinipes) mit seinem stachlichten Schwanze.

Noch sind wir nicht im eigentlichen arabischen Biskra: das sind die Lehmhüttendörfer weiter südlich, die man gut vom Minaret der primitiven Dorfmoschee übersieht. Hier überzeugt man sich, dass Biskra eine Gruppe von Oasen ist, jede mit reichem Palmenstand, zusammen ca. 140000 Stamm, nebst 5000 Oliven. Diese Oasen werden von vielen Bewässerungskanälen durchschnitten, und hier liegen die Lehmhütten der *Biskris* oder Biskrabewohner. Diese Hütten sind äusserst roh, ungetüncht, haben die gelbe Lehmfarbe, oben platt, nach aussen fast fensterlos. Hinter den hochragenden Kronen der Palmen, von denen sich Prachtexemplare bis zu 80 Fuss erheben, breitet sich die fahle Wüste unabsehbar bis zum Horizonte aus. Nur die Palmenwipfel einiger Nachbaroasen, wie Sidi-Okba im Süden und Chetma im Osten, unterbrechen die weite Fläche.

Ersteigen wir die Altane unseres Hotels bei Sonnenuntergang, wie wir es jeden Abend gewohnt waren, so sehen wir ein prachtvolles Bild. Im Osten ragen die bis zum Wüstenrand vorgeschobenen Ketten des grossen Atlas bis gegen 2000 m. empor, in schroffen, nackten Kalkwänden. Dann entwickelt sich ein mir von den «Dolomiten» her wohlbekanntes Schauspiel. Die Kette des *Ahmarkaddou*, d. h. des Berges mit den Rosenwangen, färbt sich beim Untergang der Sonne mattrosenroth, ganz ebenso wie ich es am Rosengarten oder an der

Primörgruppe in Südtyrol sah[1]). Unbeschreiblich ist alsdann das Farbenspiel in der Wüste von zarten blassen, gelblichen, bräunlichen und grauen Tönen. Nicht umsonst liebt der Araber für seine Kleidung die zarten abgetonten Nuancen von Blau, Roth und Gelb mit Verschmähung des Grellen, sein ästhetischer Geschmack ist von der Natur hergeleitet.

In scharf geschnittenen Formen ragen im Westen der Stadt niedrige, kahle Klippenreihen der Montagnes de Sable und des *Col de Sfa* empor. Sind sie auch nur 100 bis einige 100 m. hoch, so charakterisieren sie doch durch ihren scharfen Zuschnitt die Landschaft.

Es sei mir nun gestattet, einige Notizen über Meteorologie, Wasserverhältnisse, Pflanzen-, Thierwelt und Bevölkerung von Biskra anzufügen, dann will ich eine nähere Schilderung der Wüste bei Biskra geben.

Biskra hat, als Folge der französischen Occupation, auch eine meteorologische Station einfacher Art, von Hrn. Colombo besorgt, mit einigen selbstregistrierenden Instrumenten. Hier die Beobachtungen von Colombo, mitgetheilt von Supan:

Die mittleren Monatstemperaturen von Biskra über 12⅛ Jahre (1866—68 und 1875—84) *berechnet aus den mittleren täglichen Extremen, in Celsiusgraden.*

	Min.	Max.	Mittel.		Min.	Max.	Mittel.
Januar	6.9	17.3	12.1	Juli	26.6	40.3	33.4
Februar	8.6	20.0	14.3	August	25.9	39.3	32.6
März	10.8	22.7	16.8	September	22.4	34.9	28.6
April	14.6	26.9	20.8	Oktober	16.2	27.4	21.8
Mai	18.4	31.3	24.8	November	10.8	21.7	16.2
Juni	22.8	35.8	29.3	Dezember	7.2	17.6	12.4

Jahresmittel 21.9

Während meiner Anwesenheit in der ersten Hälfte März 1893 hatten wir immer Mittags einige 20° C. im Schatten.

Das *Klima* von Biskra ist sehr trocken, am trockensten nach Seriziat im Juli, August, November und Januar. Die jährliche absolute Regenmenge beträgt nach Colombo 177 mm., nach Hann 209 mm., also ca. ⅕ bis ⅙ derjenigen von Bern (1020 mm.). Biskra hat 264 heitere und nur 58 trübe Tage (Hann). Am meisten Regen fällt im Februar, März, April, Oktober. Es gibt aber Hochwasser des Oued-Biskra bei

[1]) Unser Landsmann, der Maler Hermengeat, hat in seinen in Oel gemalten Studien von Biskra diesen und andere Effekte gut wiedergegeben.

ganz blauem Himmel, sie kommen aus dem Quellgebiet des Flusses in den hauts plateaux. Schnee und Eis ist eine grosse Rarität, ein Sinken des Thermometers auf 0° gehört zu den Seltenheiten, in der Wüste kommt es wegen kalter Nächte hie und da vor. Nebel gibts nicht, ausser zuweilen über dem Fluss im Herbst und Winter, auch selten Thau.

Die Winde blasen hauptsächlich von Nordwest und Südost, letzterer besonders im Sommer. Es soll überhaupt in Biskra an Wind nicht fehlen und scheint mir dies in sanitarischer Beziehung ein Übelstand zu sein.

Wasserverhältnisse. Wasser ist bekanntlich in der Wüste Bedingung alles Lebens. Die Brunnen werden schon von *Olympiodor* und den arabischen Schriftstellern des Mittelalters erwähnt. Früher schlug der Marabout den Felsen an, jetzt besorgen das Geschäft viel rationeller die Franzosen. Der erste künstliche *artesische Brunnen* wurde 1856 vom General *Devaux* erbohrt. Nichts gab den Franzosen einen grösseren Nimbus in den Augen der Araber, als die Kunst ihrer Ingenieure, Wasser hervorzuzaubern, wo keines sichtbar war, oder es wieder zu erlangen, wo es versiegt war. Mit Freudenthränen begrüssten oft die Araber das ihnen wiedergegebene edle Nass; denn ohne Wasser keine Oase! *Quargla* allein hat 200 artesische Brunnen. Der Überschuss des unterirdischen Wassers von Tougourt bildet einen 10 Stunden langen Lauf. Die Erstellung artesischer Brunnen beruht auf grossen unterirdischen Wasserbecken zwischen undurchlässigen Schichten, wie Thon, etc. Steht das Wasser unter Druck, so springt es nach Durchbohrung der undurchlässigen Schicht; wenn nicht, so entbehrt es der Triebkraft und muss gepumpt werden. An manchen Orten fliesst das Wasser aus den unterirdischen Becken vermittelst trichterförmiger, natürlicher Löcher (die *Bahr* oder *Schreias* der Araber) von selbst ab. Nicht selten verstopft sich der Abfluss, was für die Oase die schlimmsten Folgen haben kann; in diesem Fall gibt es eingeborene Taucher, die in die Trichter eindringen und die Ursache der Verstopfung beseitigen; sie können bis zu 5 Minuten im Trichter aushalten. Es gibt Oasen *Ritan* genannt, welche in künstlich gegrabenen Kesseln angelegt sind, um näher beim Wasser zu sein, z. B. bei *El-Oued,* wo das Wasser 30 ' tief lag und keine Triebkraft hatte.

Bei Biskra befindet sich eine Gyps-Krystall- und Sandschicht in 20' Tiefe. Gyps und Salze sind überhaupt häufig; die Mauern von *Tougourt,* südlich von Biskra, sind z. B. aus Gyps gebaut, was allerdings die Haltbarkeit nicht erhöht.

Die Oasen von Biskra und Sidi-Okba werden durch den *Oued Biskra* bewässert. An ihm liegt aufwärts der Stadt ein Stau- und Sammelwerk (Barrage). Die zahlreichen kleinen Bewässerungsgräben, welche nach den Getreidefeldern und Palmenhainen führen, heissen *Seguia*. Sodann hat Biskra 20 Quellen, 2 km. aufwärts am Fluss gelegen, welche auch im Sommer Wasser führen. Sie haben eine Temperatur von 29½ °, sind gyps- und salzreich, auch Chlormagnesium führend, daher nicht angenehm zu trinken. Die Fremden trinken das importirte Sauerwasser von St. Galmier.

Vegetation und Thierwelt bei Biskra. Ich beschränke mich als Laie in diesen Dingen auf einige Mittheilungen und Notizen, meist nach Schirmer und Seriziat. Flora und Fauna der Wüste sind im Allgemeinen sehr arm infolge der Trockenheit. Es gibt keine 500 Pflanzenspecies in der algerischen Sahara. Die meisten Säugethiere, abgesehen von Kameel, Gazelle, Antilopen, einigen Nagern, fehlen. Auch Mollusken und Vögel sind gering vertreten, am Besten die Reptilien. Durch Anpassung haben Thiere und Pflanzen im Allgemeinen einen besonderen *Wüstentypus*. In der Wüste sind Zwergsträuche häufig, die Blätter der Gewächse sind weiss, gräulich, bläulich, aber nicht grün, ferner schmal, dick und lederartig; es hängen diese auffallenden Erscheinungen mit der grossen Licht- und Wärmeintensität und Trockenheit zusammen. Der Salzreichthum des Bodens hindert die Vegetation. Namentlich wird die starke Verdunstung den Pflanzen gefährlich, und, um diesem Übelstand möglichst entgegenzuwirken, haben sich die Wüstengewächse vermittelst langer Dornen und Reduktion der Blätter, Einrollung und Stellung der Blätter, Gestaltung der Spaltöffnungen, gedrängte Zweigstellung, niedrige Polsterform, lange Wurzeln in wunderbarer Weise angepasst. Alle diese Einrichtungen haben zum Zweck, die Verdunstung auf ein geringes Maass zu reduciren und die Pflanzen dadurch zu schützen. Da mich meine Pflanzenkenntniss hier ganz im Stich liess, so muss ich mich auf wenige Typen beschränken. Salzpflanzen (Salsola etc.) sieht man oft, ferner eine kleine Coloquintenart ziemlich häufig im Wüstensand.

Die *Dattelpalme* gedeiht innerhalb des «Wüstenmundes» bei El Kantara, wie schon erwähnt, ganz plötzlich massenhaft; die Nähe der Wüste und die reflektirenden Kalkwände bedingen eben auch eine namhafte Temperaturerhöhung. Auch *Oleander* ist dort in den trocknen Flussbetten gewöhnlich. Von der Dattelpalme sagt der Araber, sie müsse mit der Wurzel im Wasser, mit der Krone im Feuer stehen, um

reife Früchte zu liefern. Sie kann Kälte unter 6° nicht vertragen. Die Palmen von Biskra sind alle kultivirt. Da es wenig männliche Bäume mit ihren maiskolbenähnlichen Fruchtkolbenständen gibt, so muss die Befruchtung künstlich herbeigeführt werden. Der *Hakem*, eine Amtsperson, besorgt zwischen März und Mai dies Geschäft und die amtliche Beaufsichtigung. Die Haupternte ist im Oktober. Es gibt 53 Dattelsorten in Biskra, die man im Allgemeinen in *weiche* und *trockene* unterscheidet. Die beste weiche heisst *Deglet-Nour*. Die trockenen Sorten sind im Allgemeinen kleiner, haben weniger Zucker und sind haltbarer. Sie werden von den Arabern vorgezogen, die sie mit magerm Fleisch, im Gegensatz zu fettem, oder mit Brot vergleichen.

Die Zweige der Palmen, *Djerets* genannt, werden bekanntlich zu Stöcken verarbeitet; sie bekommen dunkle Flecken, wenn der Baum, z. B. aus Wassermangel, kränkelt. Schöne Stöcke kauft man für 20 ctm. Der Palmwein, *Lakmi* genannt, wird süss und gegohren getrunken, in welch letzterem Zustand er 4—5 % Alkohol enthält. Er ist nicht nach Jedermanns Geschmack.

Das Alfa (*Stipa tenacissima*) wird zur Herstellung von Matten etc. verwendet; Biskra ist dafür die südlichste Station. Von Osttunisien geht Alfa schiffladungsweise nach England. In der Wüste tritt an Stelle von Alfa das «*Drinn*». *Baumwollstauden* werden in der Oase Sidi-Okba kultivirt.

Viel haben die Waden des zu Fuss gehenden Geologen zu leiden von den Stacheln des «Didr» (Zizyphus lotus, Jugubier sauvage), einer Papilionacee. Überhaupt tragen die Mehrzahl der Pflanzen Dornen, z. B. der Agoul (Alhagi Maurorum D. C.). Auch die bekannte «Rose von Jericho» soll hier vorkommen, deren Äste beim Trocknen sich kuglich einrollen und, wenn der Stiel in Wasser gesetzt wird, in Form einer Rose ausbreiten.[1])

Von der Thierwelt habe ich noch weniger gesehen oder erfahren. Auch sie hat mit der Trockenheit zu kämpfen und hat sich in oft wunderbarer Weise *angepasst*. Viele Wüstenthiere brauchen nur in längeren Zwischenräumen zu trinken, das Kameel vermag über 8 Tage, ja 18 Tage nach Rohlfs, ohne Wasser auszuharren. Das *Tedaschaf* besitzt durch veränderten Knochenbau und lange Beine grössere Lauffähigkeit; ähnlich die Springmaus. Bei den Montagnes de Sable sah

[1]) Man kann sie bei Kaufmann E. Bügel in Biel beziehen.

ich *Heuschrecken,* die durch Mimicry ganz die gelbe Farbe des Sandes besassen. Diese Farbenanpassung kommt häufig vor. In Sandlöchern sitzt der *Sandesel,* eine Süsswasserkrabbe. *Scorpione* sind nicht selten; die Jungen von Biskra bringen häufig verschiedene Arten dutzendweis an Fäden angebunden, die von einer Ruthe getragen werden. Die gewöhnlichen *Frösche* quaken in Biskra doppelt so stark wie bei uns, ich weiss nicht, ob es dieselbe Art ist. Von *Eidechsen* kommt der Stachelschweif *(Uromastyx spinipes), Monitor*arten, der Skink (Scincus officinalis) und *Stellio vulgaris* vor. Grosse grüne Eidechsen werden ausgestopft und verkauft. Auch das *Chamaeleon* und *Geckonen* sollen sich finden. Von Schlangen treten *Nattern* und die giftige *Hornviper (Cerastes cornutus)* auf. Die *Schildkröten* sind vertreten. In den artesischen Brunnen soll sich eine Fischart finden und aus den Flüssen auf Spalten hinuntergelangt sein. Zur *Falkenbeize* wird der *Edelfalke* benutzt, es giebt auch *Adler* und *Eulen.* Am 5. März 1893 berührte mich freundlich in Biskra die Ankunft der *Schwalben,* welche auf der Wanderung von Quargla und weiter südlich nach Norden sich befanden. Unter den Vögeln sind am häufigsten die *Steinschmätzer,* die Allerwelts-Sperlinge, sowie die *Oasenwachtel* (Turtur senegalensis). Amseln und Lerchen, Spechte und Kukuk sind selten, zur Dattelreife findet sich in Biskra der *Staar* ein. Der *Strauss* zieht sich nach Süden zurück, die meisten Federn kommen vom Senegal. Unsere Krähen sollen nicht vorkommen.

Von Säugethieren erwähne ich zwei Nager, die Rennmaus *(Meriones pygargus)* und die schon oben genannte merkwürdige hochbeinige Springmaus *(Dipus egypticus)* mit kurzen Vorderbeinen und sehr langen Hinterextremitäten, mittelst letzterer sie sehr rasch springen kann, wobei sie den Schwanz als Stütze und Steuer benutzt. Wir haben auch hier eine Anpassung an die Wüste, indem das Thier nur bei dieser Einrichtung der Extremitäten sich seinen Feinden entziehen kann.

Von Biskra aus wird *Antilopen*jagd (Antilope dorcas) betrieben, *Eber* giebts in den Sümpfen bei Saada, südlich von Biskra, dagegen ist der *Wüstenlöwe* bekanntlich eine Utopie. Nicht vergessen dürfen wir endlich das Kameel, dem der die Gegend zum ersten Mal Besuchende besondere Aufmerksamkeit widmet. Hat er indessen den ersten Kameeltrab «genossen», so vergeht ihm gewöhnlich diese Art von Sport für einige Zeit. Karavanen kommen und gehen. Weisse Thiere (tellis) sind am geschätztesten. Als der Wüste angepasstes Thier

frisst das Kameel auch das holzige und stachliche Gestrüpp der Wüste; Alles ist ihm recht, selten erhält es Stroh oder Gerste und dabei ist es ein unermüdlicher Gänger. In seinem Höcker besitzt es eine Fettreserve, die in Hungersnöthen absorbirt wird.

Biskra und Umgebung hat eine sehr gemischte *Bevölkerung*. Die wichtigsten Typen sind: *Berber*, der Hauptbestandtheil, *Araber* rein oder berberisirend, freigelassene schwarze Soudansklaven, die ein besonderes Viertel in Biskra bewohnen und sich nicht mit einer Berberin verheirathen dürfen, endlich von Negersklaven abstammende Rouaras.

Die *Berber* sind die früheste bekannte Bevölkerung, in Tougourt findet man sie noch von reiner Race, nämlich mit weissem Teint und etwas jüdischen Zügen. Ursprünglich monogamisch und sesshaft haben sie sich derartig mit den Arabern vermischt und ihnen adaptirt, dass man von *arabisirenden Berbern* und umgekehrt spricht. Einen blonden helläugigen vornehmen Berber bewunderte ich oft im Restaurant des Hotels; man zählt in Biskra auf 100 Individuen ein blondes.

Aus der *römischen Epoche* hat man noch die Römerbrücke bei el Kantara; weiter in der Wüste findet sich nichts Römisches mehr. Die letzten Reste der Römer unterwarf der berühmte Nationalheld *Sidi Okba* im Jahre 682. Viele dieser Römer nahmen den Islam an und bildeten den Tribus der *Beni-Rouman*, andere flüchteten in die Berge. Jener Sidi Okba liegt in der Moschee der gleichnamigen Oase begraben; ich habe sie besucht, sie ist die älteste in ganz Algerien, aus Lehm gebaut, länglich viereckig, besitzt eine längliche Halle mit Palmstammsäulen, sowie einen halbdunklen Raum mit 6 uralten Säulengängen.

Im Allgemeinen giebt es viel schöne gutgebaute Leute in Biskra. Die Jugend ist in dieser Fremdenstadt oft recht zudringlich, man wirft wie in Italien den Jungen Münzen in's Wasser. Viertelstundenlang laufen sie mit lautem »Sidi Merci« hinter dem Wagen drein, um einen Sou zu erwischen; in Sidi Okba musste der Ortspolizist Prügel austheilen, um unserer Gesellschaft den Weg zu bahnen; ein andermal wurde ich von radschlagenden Jungens 20 Minuten weit verfolgt. Diese fast nackten Bengel zeichnen sich ebenso durch geschmeidigen Körperbau, wie theilweise durch Frechheit aus. Der Fremdenverkehr wirkt auch hier ungünstig. Eine besondere Klasse bilden die bekannten Tänzerinnen und Freudenmädchen von Biskra. Sie heissen Ouled Nails und gehören dem gleichnamigen im Atlas wohnenden Stamm

an. Ihren Sitz haben sie in einer besonderen Strasse von Biskra, wo gleichzeitig eine Reihe von Schänken untersten Ranges sich befinden. Hier finden ihre Tänze statt, denen selbst prüde Miss von Old-England beiwohnen. Sie haben eine malerische Tracht und werden gegenwärtig von französischen Aerzten sanitarisch controlirt. Nach einiger Zeit gehen diese Mädchen zum Stamm zurück (in dessen Achtung sie nicht sinken) und sollen sich gewöhnlich schnell verheirathen.

Die Wüste bei Biskra.

Zum Verständniss des Reliefs von Nordafrika betrachten wir ein Profil, welches vom Mittelmeer bis in die Mitte der Wüste zum krystallinischen Gebirg Ahaggar geht und 240 deutsche Meilen lang ist. Es schneidet vom mittelländischen Meer den *kleinen und grossen Atlas,* zwischen denen die Hochplateaux liegen. Dann folgt die Depression von Biskra und Tougourt, die im Chott Melrir 32 m. unter Meer (nach Anderen 24 m.) erreicht. Nun hebt sich das Terrain zu ca. 200 m., dem *Plateau bei Quargla,* und dem *Sand-Dünengebiet.* Abermals Hebung zu 3—500 m. zur Steinwüste von *Tinghat.* Darauf eine Depression von 3—400 m.; sodann Ansteigen auf 7—800 m. und nun folgt das bedeutende krystallinische Plateaugebirg von *Ahaggar,* 1500 bis 2000 m. hoch, mitten in der Wüste. Südlich von ihm folgt wieder Flachwüste; daselbst wohnen auch die räuberischen *Tuaregs,* die die Expedition Flatters vernichteten.

Die alte Annahme, die Wüste sei eine *einförmige Fläche,* ist also völlig falsch. Desgleichen ist es unrichtig, dass die Wüste zur Diluvialzeit von Meer bedeckt gewesen sei, es fehlen die Meeresconchylien und Strandbildungen, wie Zittel und die Franzosen, besonders Pomel, es nachgewiesen haben.[1])

[1]) Ganz neuerdings vertritt Ch. Mayer-Eymar (Défense du Saharien, in den Pariser Cpt. rend. 1894) doch wieder die Existenz eines diluvialen Wüstenmeeres, wenn auch nicht in dem weiten Unfang, den man früher demselben gab. Der höher stehende atlantische Ocean soll nach Einbruch der Meerenge von Gibraltar das Mittelmeer geschwellt haben und ein Arm desselben sei von Egypten her nach Westen bis zur algerischen Chottregion vorgedrungen. Er stützt sich auf diluviale Ablagerungen bei Cairo, auf das Vorkommen von einigen Versteinerungen (Cardium edule etc., nach einer älteren Angabe von Desor) beim Chott Melrir und auf ein Bohrloch auf der andern Seite dieses Chotts mit 90 m. mächtigen Planorbis führenden Süsswasserablagerungen. Dies dürfte indessen ein zu schwaches Fundament für die Annahme eines Meeres in der algerisch-tunesischen Chottregion sein. Die Beweiskraft des obigen Cardium edule ist bestritten. Die

Auch die früher angenommene geologische Gleichförmigkeit der Wüste hat sich als Irrthum herausgestellt. Sie ist nichts weniger als etwa eine Art norddeutscher Ebene im Grossen; es sind alle Hauptformationen mit Ausnahme der Trias und des Jura (soweit bekannt) in z. Th. gewaltiger Entwicklung vertreten, so z. B. die palaeozoische Gruppe, die Kreideformation mit dem rothbraunen nubischen Sandstein, die Tertiärformation mit ihren 3 Hauptabtheilungen. Mächtig entwickelt ist das krystallinische Grundgebirg in der schon genannten *Ahaggargruppe;* Basalte kommen vor im *Tibestigebirg.*

Bei Biskra lernte ich kreideartige Bildungen mit Feuersteinen, dem untersten Tertiär (Soissonien) angehörig, kennen, ferner Absätze heisser Quellen, vor Allem aber den eigentlichen Wüstenboden: das durch verschiedene geologische Agentien tiefgreifend veränderte Anstehende, gewöhnlich weithin verschleppt und vertragen durch Wind und Wasserwirkung. Diese Wüstenbildungen werden unsere Aufmerksamkeit vorzugsweise in Anspruch nehmen.

Man unterscheidet folgende Wüstentypen: [1])

Felswüste, arabisch Djebel, Tasili, die gebirgigen und nacktfelsigen Theile.

Steinwüste, arabisch Hamada, Sserir.

Sandwüste, arabisch Erg, Areg.

---

alten Litoralbildungen des Mittelmeeres liegen wenig höher als der jetzige Spiegel (Pomel), Mayer nimmt eine Erhöhung des Spiegels von 200 m. an; Zittel fand keine Uferlinien für ein Saharameer. Die egyptischen Diluvialschichten sind einstweilen noch lokal und gestatten keinen Schluss auf ein grösseres Saharameer. — Was die oft zahlreich lose herumliegenden Versteinerungen der Wüste anlangt, so sind sie nicht diluvialen Alters, sondern durch die Verwitterung älterer Schichten frei geworden. Das Salz der Wüste entstammt ebenfalls älteren Formationen, denn alle Meeresablagerungen enthalten mehr oder weniger Salz. Die Saharameerhypothese, welche einst für die Erklärung unseres *Föhn's* eine so grosse Rolle spielte, ist von fast allen Forschern fallen gelassen worden. — Auch die Idee, das Meer wieder in die flache Depression der Chotts von Osten her einzuleiten, um eine Klimaverbesserung im Grossen zu erzielen, hat sich als unausführbar erwiesen. Vom «Mer intérieur» ist es still geworden; dagegen werden von den Franzosen lebhaft Studien für das Project einer durch die Wüste führenden transsaharischen Eisenbahn gemacht.

[1]) Nach *v. Richthofen* lassen sich folgende Typen unterscheiden: *Eluvialwüsten, Denudationswüsten* und *Aufschüttungswüsten.* Die Formen der Denudations- oder Erosionswüste sind aus den Plateaux gewissermassen herauspräparirt, wodurch isolirte Kuppen «*Zeugen*» entstehen, in welche das Plateau aufgelöst ist und welche gleichsam Zeugniss ablegen für die frühere Ausdehnung desselben.

Lehmwüste, Gebiet der Sebkhas und Chotts (das sind die zahlreich vorkommenden Salzseen, besonders im Süden von Tunisien und Algerien).

Unter *Steinwüste* (Hamada) versteht man die weiten plateauförmigen mit vorwiegend eckigen Trümmern bedeckten, meist ganz vegetationslosen Theile; sie sind der Schrecken der Reisenden mehr noch als die Sandwüste. Flache Erosionsthäler und Tafelberge (stehengebliebene Plateaureste, vide Anmerkung am Schluss) fehlen nicht. In der algerischen Sahara giebt es nach Duveyrier 119 Millionen Hektaren Hamadaplateaux und 45 Hektaren Sandwüste.

Sserir (Kieswüste) nennen die Beduinen die flachwelligen Ebenen, welche mit *runden* Kieseln erfüllt sind.

Die *Sandwüste* (Erg in der westlichen, Areg in der östlichen Sahara genannt) bildet mit Sand und Sandbergen erfüllte Ebenen. Sie stellt weder ein centrales Sandmeer dar, noch entspricht sie einem mit Sand erfüllten Meeresboden. Der Saharasand ist nicht Meeressand. Der feine und gröbere Sand entstand vielmehr und entsteht noch durch Verwitterung der krystallinischen Gesteine und der Sandsteine, wobei durch den Wind eine vielfache Verführung und Sortirung stattfand, in Folge letzterer der leichtere Glimmer und zermahlener Feldpathstaub ausgeblasen wurden. Charakteristisch sind die *Sanddünen,* welche in Form von Hügeln und geraden- oder bogenförmigen Rücken meilenweit sich erstrecken und bis zu 100 Meter hoch werden. Sie bestehen aus einem meist hellen und reinen Sand.

Die *Lehmwüste* hat weniger Bedeutung. Sie geht aus dem Boden der Salzseen hervor, deren viele zeitweilig ganz trocken werden oder auch verschwinden. Solcher Boden ist gyps- und salzreich. Der Typus der Lehmwüste ist in den Niederungen der Chotts im südlichen Tunisien und Algerien entwickelt.

Über die Art der Erosion sind die Ansichten getheilt. Die einen nehmen vorwiegend Wassererosion an, Prof. F. Walther in Jena dagegen fast ausschliesslich «*Deflation*» d. h. die Thätigkeit der bewegten Luft in Aufhebung und Fortführung des lockeren Materials, nach vorhergegangener Zerstörung der Unterlage. Vorbereitende Hauptagentien der Deflation sind *Insolation, grelle Temperaturschwankungen* (vergl. Tabelle pag. 18), *Sandgebläse, ungleiche Erwärmung,* und untergeordnet chemische *Verwitterung.* Dadurch sollen alle Tafelberge und auch die Uadis und Sserirs entstanden sein.

Wenn ich mich nun auch von den ausserordentlichen Wirkungen der Deflation vielfach überzeugt habe, so möchte ich doch die Wasserwirkungen nicht in diesem Grade ausschliessen; es wird noch weiterer exakter Untersuchungen bedürfen, um jedem Agens den ihm gebührenden Antheil zuzuweisen.

Bei Biskra sehen wir diese Typen im Kleinen vereinigt, daher ist es so geeignet zur Orientirung und Jedem zu empfehlen, der die Wüstenphänomene kennen lernen will.

Zu diesem Ende machen wir einige Spaziergänge in die Umgebungen und zwar nach Montagne de Sable, nach Hammam Salahin, vielleicht auch nach dem Kappenberg, nach Sidi-Okba, oder dem eine prachtvolle Übersicht bietenden Thurm bei Col de Sfa und nach der Oase Chetma.

Nach den Montagnes de Sable.

Wir wählen die «Route de Zibans», die westlich des alten Biskra hinaus in die Wüste führt und von Karavanen belebt ist. Rechts haben wir eine ca. 100 Meter hohe scharf geschnittene kahle *Kreidekalkkette*, deren nördlichster Ausläufer den alten Befestigungsthurm beim Hotel Victoria trägt. Ich habe sie als stellenweise stark denudirte *Anticlinale* erkannt. Sie hat einige Einschnitte, die bis aufs Niveau der Wüste heruntergehen. Durch einen derselben fliesst der Abfluss der warmen Quellen von Hammam Salahin. Dorthin steuern wir. Zu beiden Seiten der Wüstenstrasse sieht man, nachdem man die bebauten Felder der Oase verlassen hat, stundenweit das stachliche Zwerggestrüpp in kleinen Gruppen und Polstern, dazwischen Wüstensand. Überall Haufen von Sand bis zu 10 und 20′ ansteigend. Der Sand ist gelblich gefärbt und auffallend rein. Näher an der erwähnten Kette, die uns immer rechts begleitet, werden die Sandmassen immer grossartiger; man sieht, sie sind vom Wind hergeschafft. Charakteristisch sind die bekannten *Windfurchen* im Sand. Ich sah zweierlei Typen: schwach gebogene, oft sich gabelnde Kämme, und gekerbte, welche aussehen, wie wenn man eine etwas flach- und langgestreckte Ziffer 3 mehrfach aneinandersetzt. Letztere sind ebenfalls oft gegabelt. Erstere entsprechen vielleicht ruhiger anhaltender, letztere ungleichmässiger stossweiser Windwirkung.

Salzausblühungen, ferner die sonderbaren Lehmkugeln, von denen noch die Rede sein wird, finden sich hier; man beobachtet die sandfarbigen kleinen Wüstenheuschrecken, die apfelgrossen Coloquinten mitten im Sand, viele bleichfarbige Wüstengewächse mit kleinen fleischigen Blättern. Hier tummelte ein *Spahi* mit wallendem rothem, inwendig weissem Mantel, weissem schwarzumwundenem Turban, blauen Hosen und rothen Stiefeln seinen feurigen Araber, eine malerische

Erscheinung. Er begriff nicht, dass ich zu Fuss herum lief, und forderte mich auf, hinten aufzusitzen, was ich aber höflich ablehnte. Ich erkletterte vielmehr auf Schusters Rappen mit vieler Mühe im lockeren Triebsand die Klippenkette an einer Stelle und erhielt einen Begriff von der Gewalt der Staubstürme, die den Sand 100 Meter hoch hinaufgetrieben haben. In Folge dieser Sandfelder an den Gehängen glaubt man von ferne schmutzige Schneefelder zu sehen. Mitten drinnen in der Wüste erscheinen grosse Dünenzüge. Bequemer ist es, den genannten Einschnitt in der Kalkkette zu benutzen, der auf die andere Seite in ein grosses *Sandbassin* führt, welches weiter westlich abermals durch Berge begränzt ist.

Im Einschnitt sieht man vorzügliche *Sandschliffe und Polituren* (vergl. Tafel III). Der Kalkfels ist auf grosse Strecken hin abgerundet, gekörnelt und glatt polirt. Ich unterscheide *glänzende Politur*, besonders an dichten und feinkrystallinischen Kalksteinen, und *matte Politur*, besonders an Sandsteinen und grobkrystallinischen Kalksteinen. Die Sandsteine sind zudem oft mit einer schwarzen Rinde versehen und hauptsächlich östlich von Biskra zu finden.

Man begreift sofort die Möglichkeit des Vorganges, wenn man einen Sandstaubsturm erlebt, wie ich am Anfang März. Der Südoststurm wirbelte förmliche Wolken in die Höhe, sodass die weiteren Umgebungen wie durch einen Schleier erschienen. Bald sind Nase und Ohren versandet, Sand in den Taschen, feinster Staub sogar zwischen Uhrglas und Zifferblatt!

Viele meiner Stücke zeigen feine vom über die Oberfläche hinrieselnden Triebsand erzeugte Rillen und Sculpturen, deren Hervorragungen glänzend polirt sind, während die Zwischenräume matt erscheinen. Breitere Furchen dagegen, wie sie bei uns die beginnende Karrenbildung erzeugt, ferner Vertiefungen an windgeschützten nicht polirten Stellen beziehe ich auf Wasserwirkung. Wir müssen die geringere Häufigkeit des Regens in dieser Gegend bedenken, jedoch ist er immerhin genügend, um Regenfurchen auf dem anstehenden Gestein zu erzeugen; bald tritt aber der wegen Häufigkeit der Winde viel constantere Sandschleifprozess wieder ein, der den Effect des Regens wieder aufhebt, die vom Regen verwischte Politur wieder auffrischt und neue Rillen erzeugt. So wechselt Regenerosion mit Windwirkung, und das Volumen der Felsen nimmt dadurch sehr langsam ab.[1])

[1]) Die erwähnten, auch von Anderen schon beschriebenen Rillen sind etwas verschieden geartet. Die einen länglich gestreckten, tiefer eingeschnittenen, folgen im Ganzen einer Richtung, wobei sie sich allerdings verzweigen und krümmen.

Die Hitze, die im direkten Sonnenlicht eine ausserordentliche Höhe erreicht, bewirkt oft Spaltungen, und Rissigwerden. Die Risse können peripherisch auftreten und ein Abblättern oder sogar ein plötzliches Ausspringen von grösseren rundlichen Segmenten erzeugen, gewöhnlich aber sind sie radial oder stellen sogar ein unregelmässiges polygonales Netzwerk dar (Taf. III Fig. 13 und 14). Bemerkenswerth ist, dass diese Risse der Kalksteine, wie ich beobachtete, zuweilen durch secundären krystallinischen Kalkspath oder verwandte Carbonate wieder zugeheilt sind, eine Erscheinung, die sich *nur durch Wasserwirkung* und *nicht* durch Deflation erklärt. Dunkle Steine springen ceteris paribus leichter, weil sie mehr Wärme aufsaugen. Es soll dies sogar unter lautem Knall stattfinden.

Gehen wir nun im erwähnten Sandbassin nach Biskra zurück, wobei wir tüchtig im Sand waten, so fallen uns aus dem Sand hervorragende kantige Gesteinsbrocken auf. Mit grosser Freude erkenne ich sofort die viel besprochenen «*Dreikanter*», wie sie Walther und andere Forscher aus anderen Theilen der Wüste beschrieben haben und wie sie selbst im norddeutschen Flachland und im Rhonethal, sowie bei Wien, auftreten. Sie entstehen bekanntlich, indem der Wind den Schleifsand bald längs der einen, bald längs der andern Seite hintreibt. Dadurch bilden sich Facetten, die, wenn sie zum Schnitt kommen, Kanten erzeugen. So entstehen pyramidale Dreikanter oder auch andere Formen von Kantern. Tafel III (Fig. 6, 9, 10, 11, 12) zeigt einige Beispiele von Kantern, die ich dort gesammelt habe: 9 und 10 stellen Dreikanter dar, 11 und 12 sind oben durch eine Kante abgeschlossen, 7 und 8 sind Kantergeschiebe aus lockerer *sandiger* Grundmoräne von Bern. Dass letztere Windkanter sind, halte

---

Die Furche ist matt, die hervorragende Rippe an der flacheren Seite also einseitig polirt, der Rippenkamm wie abgeschmolzen aussehend. An anderen Stücken ist eine lineare Anordnung nicht ersichtlich, die Sculptur tritt hieroglyphenartig hervor, wie wenn bei Aenderung der Windrichtung die Kämme mehr zerstückelt worden wären. Bei noch anderen sind die Kämme ganz stumpf geworden. Charakteristisch ist auch die feingrubige, wie pockennarbig aussehende Oberfläche vieler Steine, die durch den directen Aufprall der Sandtheilchen erzeugt wird. Diese Grübchen werden auch grösser und treten als regelmässig angeordnete Schüsselchen auf. Regelmässig gestriemt ist Fig. 18, Tafel III.

Rillen, Striemung, Sculptur etc. sind also vorwiegend durch rieselnden und aufprallenden Sand (Sandgebläse), untergeordnet durch Structur des Gesteins und Wasserwirkung bedingt und beeinflusst.

ich zwar für möglich, jedoch ist nicht ausgeschlossen, dass sie gewöhnliche Gletscherkanter[1]) oder Scheuersteine darstellen.

Alle hier abgebildeten Wüstenkanter bestehen aus hellem dichtem Kreidekalk. Der Kanterschleifprozess war bei dem heftigen Winde in vollem Gange. Überall rieselte der Sand in kleinen Strömen an den Steinen hin. Die Erscheinung fand direkt vor meinen Augen statt. — Sie sehen, wie in Biskra ein einziger Spaziergang, der $^3/_4$ eines Tages in Anspruch nimmt, recht interessante Beobachtungen zu machen erlaubt.

Nach Hammam Salahin (Eaux chaudes) und dem Salzsee.

In Begleitung des Herrn Dr. Fick von Zürich, besuchte ich am 15. März das berühmte arabische Bad Hamman Salahin. Das dahin führende primitive Strässchen führt am Bahnhof von Biskra ab und man ist alsbald in der *Steinwüste*, d. h. einer mit Steinen übersäeten Fläche mit keiner oder kümmerlichster Vegetation; hier und da ist sie von einem Trockenbett (Oued) unterbrochen. Die Herkunft dieser Steine machte mir anfänglich Kopfzerbrechen, sie sind nämlich vorwiegend eckig, also nicht ohne Weiteres als Fluss- oder Brandungsgerölle zu betrachten. Nach und nach bemerkte ich, dass sie vielfach durch die Wirkung der Hitze, der grellen Temperaturcontraste der Wüste und vom Sandschliff veränderte Fragmente anstehenden Gesteins sind, z. Th. allerdings bei Biskra auch durch Wasser herbeigeführt wurden. Man muss nämlich bedenken, dass die Regengüsse in dem vegetationslosen Boden, wie bei uns die Wildbäche wirken. Sie reissen ihn im Nu auf, bilden bald da bald dort vorübergehende Wasserläufe, die für gewöhnlich trocken liegen.

Im Einschnitt eines 20 Schritt breiten Oued sah ich anstehend grünlichen Lehm mit einzelnen Nestern eines weissen mehligen Salzes. Beiläufig sei bemerkt, dass bei Biskra viel Salpeter vorkommt, den die Eingebornen früher zur Pulvergewinnung benutzten, bis es ihnen von den Franzosen verboten wurde, die eine *Salpetrière militaire* eingerichtet haben.

Näher bei den Bädern beginnt ein unregelmässiges Gehügel, welches auf Tafel II den Vordergrund bildet, ein Stück *Plateau- und Erosionswüste*. Ich konnte hier die Schichtenfolge am Ablauf der

[1]) Gletscherkanter sind durch feinsten lehmigen Schleifsand unter dem Gletscher in der Grundmoräne geschliffen, Windkanter durch das Sandgebläse. Beide aber besitzen trotz so verschiedener Entstehung den eigenthümlichen Firnissglanz.

Tafel I. Ausblick in die Wüste Sahara vom Col de Sfa

heissen Quellen untersuchen. Am 30′ hohen Absturz liegt unten *weisslicher Lehm*, darüber röthlicher Lehm mit Einlagerungen von röthlichen dichten Klebschiefern, dann hellgrünlicher, lehmiger Sand mit weissen, knolligen Kalk- oder Aragonitkoncretionen, hierauf *Thermaltuff* mit Pflanzenstengeln und Schnecken. Er ist schwarz, von zelliger Beschaffenheit und sieht von Weitem wie Lava aus. Das sind wohl Alles Thermalablagerungen.

Das graue, einstöckige, sehr bescheiden aussehende Badehaus bildet ein grosses Carré mit innerm Hof, in dessen Mitte ein schönes Sammelbecken mit heissem Wasser sich befindet, welches deutlich aufwallt und Blasen wirft. Seine Temperatur ist 35° *R.*, der Geschmack salzig. Die primitiven, nicht sehr sauberen Badezellen liegen rings herum und hat jede ein Steinbassin; wir nehmen da ein Bad von 29° R. Am Eingang ist eine Schenkwirthschaft. Die Araber kommen an gewissen Tagen massenhaft heran um zu baden, sie baden auch familienweise im benachbarten Salzsee und halten viel von der Heilkraft des Wassers.

Später begab ich mich nach dem sehr interessanten *Salzsee*, ca. ½ Stunde vom Badhaus entfernt. Wenn ich nicht irre, ist auf Tafel II die Lage desselben durch eine schwache Rauchsäule angedeutet. Überall Thermalablagerungen, salziger und desshalb öder und steriler Boden; im Hintergrund die Kalkkette des *Col de Sfa*. Man durchquert eine kleine Fläche und sieht dann vor sich einen ca. 100′ hohen *Plateauhügel*, in dessen Gehänge Rinnen eingerissen sind, die dem See z. Th. wohl als Ablauf dienen, gegenwärtig aber trocken lagen. Sie gestatten die Beschaffenheit des Hügels zu erkennen. Er besteht unten aus röthlichem, sandigem, kalkreichem Lehm, darauf liegt ebensolcher sandiger, grünlicher, standfester Lehm mit Salzen imprägnirt, dann folgt zuoberst eine Decke von schwarzem zelligem Süsswassertuff, also dieselben Ablagerungen, wie oben angegeben.

Durch den Graben ansteigend, bot sich mir ein interessanter Anblick. Auf dem Plateauhügel liegt in einer kreisrunden trichterförmigen, mit Wasser erfüllten Vertiefung ein *Teich* von etwa 250′ Durchmesser. Der Rand besteht aus thonig-sandig-kalkiger Erde, auf der eine Menge Schnecken herumliegen. Die Temperatur mass ich zu 14¾° R. Der Geschmack des Wassers ist salzig. Der Hohltrichter hat innen noch einen kleinen Absatz. Die Tiefe des trüben Wasserbeckens scheint nicht unbedeutend zu sein.

Das ganze Gebilde ahmt einen kleinen Krater oder ein Mar nach, jedoch ist es aufzufassen als ein von der Therme gebildetes *Becken*.

Diese Therme[1]) ist auffallend kälter als die beim Bad selbst, und kann nicht wohl in direktem Zusammenhang mit ihr stehen.

An diesem Ort will ich noch meine Beobachtungen über Herkunft der *Lehmkugeln*, «Boules du désert» mittheilen, deren eine Anzahl auf Tafel III Fig. 1 bis 5 abgebildet ist. Schon oben erwähnte ich, dass sie bei den Sanddünen vorkommen. Es sind aus einem kalkreichen Lehm bestehende Gebilde von runder oder länglicher Gestalt; zuweilen haben sie auch *Geschossform* Fig. 2. Es sind in ihnen Pflanzenstengel, Schnecken, Kalkstückchen mit Sandschliff etc. eingebacken. Nach einigem Umherlaufen habe ich ihren Ursprung entdeckt. Sie kommen im Abfluss der Thermen vor, der nach längerem Lauf durch die früher erwähnte Kette der Montagnes de sable in die Wüste eintritt und dort bald versiegt. Indem ich diesem Abfluss von aussen gegen innen nachging (er lag dermalen trocken), traf ich bald auf die oben schon erwähnten *Lehmlager, aus denen sie sich bilden*. Abgerissene Lehmklumpen werden im Bachlauf *gerollt* oder in den Thermenbecken bewegt, zum Theil auch vom Winde weitergetrieben. Dabei bekommen sie die rundliche Form und imprägniren sich mit Steinchen, Stengeln und Schnecken. Die conische Endigung (Fig. 2) dagegen kann ich mir nicht anders als durch Sandschliff erklären. Das Thermalwasser mag sie auch noch etwas chemisch verändern, sodass sie den Transport besser aushalten. Sie werden nun theils unterwegs, theils erst draussen in der Wüste abgesetzt; beim späteren Trocknen bekommen sie oft Risse. Das ist das *Räthsel* der Lehmkugeln, welches ich in Biskra aufgefordert wurde zu lösen.

Zum Schluss berichte ich noch über einen kurzen Spaziergang nach dem *Kappenberg* im Osten von Biskra, der in $^1/_2$ Tag leicht zu machen ist. Der genannte Name ist meine Erfindung; er steht weder auf der Karte noch führt ein Weg hinauf; mich reizte er, weil ich ihn, die Strasse vom Hotel Oasis nach Osten herabschauend, immer als einen Hügel von circa 150 bis 200 Meter Höhe über Biskra vor Augen hatte.

Man passirt den Oued Biskra, was dermalen ohne Brücke möglich war, lässt sich von den Hunden der Nomaden, die dort ihre Zelte haben, anbellen und von Schaaren von Kindern anbetteln, besucht wohl auch eines der Zelte. Weder sie noch ihre Insassen sind sehr appetitlich. Der *Ouedlehm*, das Produkt des Flusses, ist ein fei-

[1]) Ob hier überhaupt eine Therme vorliegt, d. h. ob die Mitteltemperatur höher ist als das Jahresmittel von Biskra, ist mir allerdings nicht bekannt.

Tafel II. Denudationsformen am Rande der Wüste Sahara

ner kalk- und sandreicher Lehm, standfest daher Abstürze bildend. Dass solcher Lehm hier und anderwärts sich auch flächenhaft verbreiten und eine Art kleiner Lehmwüste bilden kann, scheint einleuchtend. Desgleichen sind grössere Flächen mit den runden Flusskieseln des Oued bedeckt, also Sserirflächen im Kleinen.

Ich wendete mich nun nördlich, wo man ein Stück Erosionswüste im kleinen Massstab vor sich hat. Es ist dies das aus einer einheitlichen, schwach gegen die Wüste zu abfallenden Platte herausgeschnittene Haufwerk von Hügeln, mit flachen Kuppen, ein richtiges Erosionsgebirge, am Rand des Atlas. Bei dieser Erosion waren nicht die Winde der Motor für den Schleifsand und die Geschiebe (Ablation), sondern die Wassergerinne; dagegen haben Sandgebläse und Insolation wesentlichen Antheil an den Details der Felsarchitectur. Grosse weisse Stellen an den nackten und kahlen Hängen bestehen aus kreidigem Kalk.

Ich kletterte nun zum *Kappenberg* hinauf und fand dabei folgende Zusammensetzung: In der Basis kreidiger Kalk mit Feuersteinen (unterstes Eocän, Soissonien); darüber heller dichter Kalk z. Th. marmorartig mit Bivalvendurchschnitten. Endlich bildet die Kappe ein grobes Conglomerat von Kalk- und Sandsteingeröllen. Seiner *Widerstandsfähigkeit* verdankt die Kappe ihre Erhaltung. Man sieht deutlich, dass auch andere Hügel solche Kappen tragen; es bildet das Conglomerat eine zusammenhängende gleichhohe Decke, die eben durch die Erosion zerschnitten wurde. [1])

[1]) J. Walther in seiner gehaltreichen Abhandlung «die Denudation in der Wüste» (Abhandlg. d. k. sächs. Acad. d. Wissenschaften XVI, 1891) meint die «Deflation» genüge zur Erklärung solcher Plateaurelicte (Zeugen). Auch zugegeben, dass dieselbe in Verbindung mit Sandgebläse und Insolation ihr Theilchen zur Ausweitung beigetragen hat, bin ich doch überzeugt, dass es sich bei dem zerschnittenen Tafelland, nordwestlich und nordöstlich von Biskra, in erster Linie um Wassererosion handelt. Die klimatischen Verhältnisse (Regenmenge), die unmittelbare Nähe des Atlas, schliessen hier die Wassererosion nicht in dem Grade aus, wie es Walther für die innern Theile der Wüste annimmt. Es trifft hier nicht zu, dass Zeugen in wasserreicheren Wüstengebieten selten seien (vgl. Taf. II u. III), und den Satz: «Ihr (der Zeugen) absolutes Fehlen auf der ganzen Erde mit Ausnahme der Wüsten» (loc. cit. pag. 410), können wir allerdings nicht unterschreiben, so wenig wie den Satz, dass die Bildung von Zeugen *an das Wüstenklima gebunden sei.* Dagegen ist eine Modellirung der Berge bei Biskra durch das «Sandgebläse» mit Bezug auf die feinere Architektur der Felsen und die Gratbildungen zuzugeben. Walthers mit vieler Wärme der Überzeugung und Anschaulichkeit vorgetragenen Ausführungen über Deflation haben mich, so zu-

Die ganze Kappe ist mit oft vom Sandschliff polirten Steinen bedeckt. Besonders interessant sind die Gerölle mit pechschwarzer, sogenannter «Schutzrinde» und mattem Firnissglanz (Tafel III Fig. 18). Es sind dies mit Salzsäure schwach brausende Sandsteine. Inwendig erscheinen sie graugelb und von eisen- und manganschüssigem Bindemittel röthlich gefleckt (wie man unter der Loupe sieht). Eisen und Mangan bewirken, wie man annimmt, die Schwarzfärbung. Sie haben nicht selten Risse, weil schwarze Steine sich stärker als helle erhitzen.

An ganz *reinen* eisen- und manganfreien Kalksteinen und Flint habe ich die Erscheinung der schwarzen Schutzrinde im Gegensatze zu Walther (loc. cit. pag. 460) nicht beobachtet, die Flinte des Suessonien sind nur schwach bräunlich, aber nicht schwarz gefärbt; jedenfalls glaube ich nicht an seine Vermuthung, dass der Eisen- und Mangangehalt *von aussen* durch Staub und Windwirkung dazugekommen sei; er war sicher schon im Stein vorhanden.

---

treffend sie auch in vieler Beziehung sind, doch auch rücksichtlich der heiklen Frage der Entstehung der Thäler im Innern der Wüste nicht völlig überzeugt. Ohne die thalbildende Wirkung dieses Agens als Theilfactor leugnen zu wollen, möchte ich doch den Procentsatz, welcher der Erosion am Gesammteffekt zukommt, Walther gegenüber, vermehren. In dieser Beziehung mache ich geltend, dass Circusformen, abgesehen von den Alpen, in unserem Jura und in der Molasse häufig vorkommen, wo doch Niemand an Windwirkung denkt; ferner dass sich «Säulengänge» sowie kesselförmige Aushöhlungen auch in unserem Jura und in der sächsischen Schweiz an den Felswänden finden. Können ferner nicht *alte* breite Erosionseinschnitte durch Sand eingedeckt und dadurch gewissermassen conservirt worden sein, ist also das Relief der Wüste nicht schon zum Theil älteren vordiluvialen Datums? Müssen so viele Uadis als nur vom Wind aus dem gelockerten Anstehenden herausgeblasen betrachtet werden? Kann man's einem firnissglänzenden Sserirgeröll oder einem verändertem Schotter in allen Fällen deutlich ansehen, dass sie nicht als Flussgeröll hertransportirt wurden und nicht erst sekundär ihre Politur erhielten? Dass die bedeutende Areale einnehmenden Bergländer in der Wüste (Ahaggar, Tibesti, Aïr) und ihr Randgebiet ein anderes meteorologisches und Denudationsregime haben, giebt gewiss auch Walther zu (vergl. auch Schirmer: le Sahara, Cap. IV, les Pluies); warum tritt in den dazwischen liegenden der Deflation preisgegebenen Wüstenabschnitten die Thalbildung so zurück? Doch wohl, weil der Deflation neben der accumulirenden Wirkung eine bedeutende Tendenz zur Verebnung innewohnt, wie ja Walther und Stapff betonen, und sie deshalb nie einen so schneidigen Effekt erzielen kann wie die Erosion es z. B. in unserem schweizerischen Hügelland zwischen Jura und Alpen vermag.

Ausser Frage bleibt natürlich, dass die denudirenden Faktoren in der eigentlichen Wüste, verglichen mit Gegenden ausserhalb derselben, graduell stark verschieden wirken und eine starke Verschiebung zu Gunsten der trockenen Verwitterung und Deflation erlitten haben, wodurch eben viele Eigenthümlichkeiten des Wüstenreliefs bedingt sind.

Der Blick vom Kappenberg in die Wüste hinein ist höchst originell; man sieht die Oasen Chetma und Sidi Okba. Zu Füssen breitet sich *Gestrüpp-* und *Weidewüste* aus, mit den kleinen Polstern von Stachelgewächsen und Zwergbüschen. So unverdaulich diese Vegetation scheint, dient sie doch den Heerden der Nomaden zum Futter. Die Gebirgsbewohner des Atlas ziehen im Winter mit ihren Viehheerden aus den Bergen in die Gestrüppwüste hinaus und lassen sie dort weiden.

Damit schliesse ich meine Reiseerlebnisse und hoffe, dass es mir gelungen ist, Ihnen ein naturwissenschaftlich deutliches Bild vom Wüstenrand bei Biskra zu geben, dessen Besuch ich zum Interessantesten rechne, was ich je noch auf Reisen gesehen.

Nachtrag.

Soeben kommen mir noch zwei neueste Separatabdrücke zu, in deren einem »Ueber Windschliffe am Laufen bei Laufenburg am Rhein« Hr. Dr. J. Früh[1]) die fettglänzenden firnissartigen Gesteinsoberflächen bei'm Laufen als Windschliff deutet. Danach sind solche Erscheinungen unsern Gegenden nicht absolut fremd und es gilt dies, wie oben (pag. 29) bemerkt, auch von der Existenz der Windkanter. Noch möchte ich hier auf das Schneegebläse hinweisen, welches durch Antreiben des körnigen Schnee's an die Felswände in den Alpen entsteht und mechanisch an der Ausbildung der gerundeten Formen mithilft. Der Aelpler sagt: »es guxet«, wenn in der Höhe die gefürchteten stossartigen Windwirbel und Schneetreiben wüthen. Der feine Schnee stäubt in Schleiern über die Kämme weg und füttert sich in alle Felsenritzen, wo er dann auch später bei der Insolation schmelzend an der äusseren Architectur der Wände mitarbeitet. Gesteigerte Wirkung der Winde im Gebirg beweisen auch die eigenthümlichen akustischen Phänomene, wie man sie vom Roththal an der Jungfrau und von der Grimsel kennt: das langgezogene »Jehu« der »Grimselstimme«, das Pfeifen und Peitschenknallen des gespenstigen Säumers.[2])

[1]) Globus, Band 67, Nr. 8.

[2]) Vgl. Bähler, Mittheilungen über Grimselpass und Grimselhospiz pag. 33. Biel bei E. Kuhn 1895.

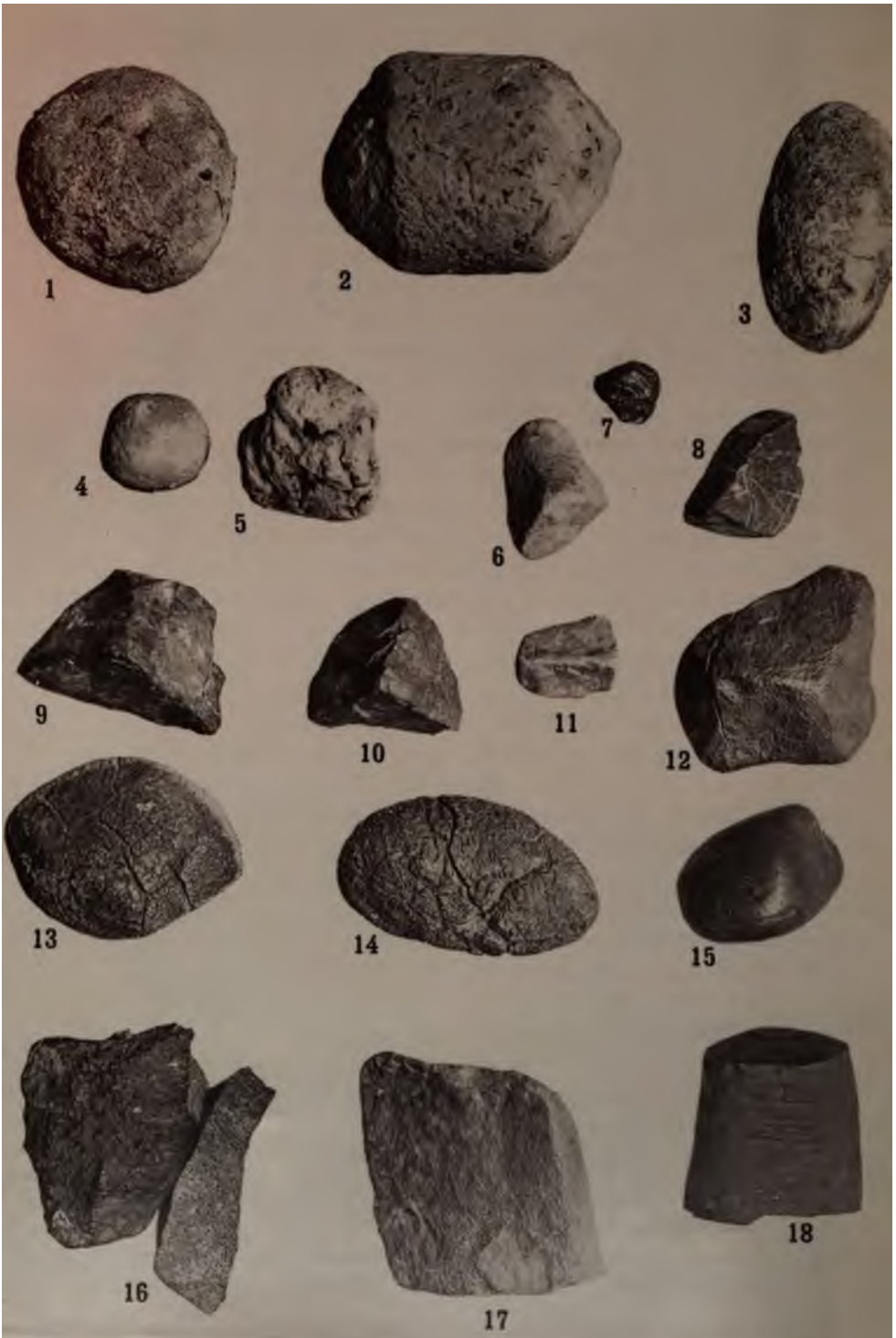
V. Goldschmidt[1]) «Ueber Wüstensteine und Meteoriten» weist auf die Analogie gewisser Oberflächenerscheinungen an den Wüstensteinen mit denen an Meteoriten hin. Die rundlichen Vertiefungen an ersteren werden zum Theil, wie von Walther und O. Fraas, durch schalenförmiges von ungleicher Erwärmung herrührendes Ausspringen erklärt, zum Theil aber auf «bohrende Wirbel» zurückgeführt, indem der vom Wind angeschleuderte Quarzsand in den gebildeten Vertiefungen wirbelförmig umgetrieben wird, während er auf der Leeseite abfliessend die Rillen erzeugt. Dergleichen Vertiefungen kommen nach Goldschmidt nun auch an den Meteoriten vor und sollen auf dieselbe Weise durch Bohrung entstanden sein. Desgleichen glaubt er, dass Rundung der Ecken und Politur der Meteoriten, soweit sie nicht auf Anschmelzung beruhen, auf die Wirbel der gepressten Luft zurückführbar sind.

Meine Kalk- und Sandsteine (Urgebirgsarten sind nicht darunter) zeigen, wie schon oben berührt, die Erscheinung ebenfalls. Die Sandsteine, entsprechend ihrem durch Quarz bedingten feinkörnigen Gefüge, sind in der gewöhnlichen Art feingrubig ausgeblasen. An einigen dichten Kalksteinen zeigen sich grössere und kleinere Schüsselchen bis zu $^1/_2$ cm. breit (Fig. 13 auf der Unterseite), einzelne sind noch grösser (Fig. 12 oben links). Offenbar ist die Gesteinsart und ihre Structur dabei ebenfalls von Einfluss.

Die oben erwähnte «schwarze Schutzrinde» meiner sehr harten und quarzreichen Steine vom Gipfel des Kappenberges (Fig. 18) habe ich mit Korund abgeschabt und untersucht, sie enthält Eisen und *Mangan*. Ausserdem ist sie reich an *organischer Substanz*, erglüht beim Erhitzen mit Salpeter und liefert ein sauerreagirendes Destillat nebst braunen Tröpfchen. Ich vermuthe, dass die schwarze äusserst dünne Rinde im vorliegenden Fall auch auf dem Vorhandensein dieser organischen Substanz beruht, da dieselbe zwar im Innern auch vorkommt, in der Rinde aber, wie ich mich überzeugte, concentrirt ist; merkwürdig ist nur, dass sie nicht oxydirt und ausgebleicht wurde.

Walther sagt: «Es scheint, dass nur eine gewisse Modification der Kieselsäure sich für die Bräunung eignet». Ich glaube vielmehr, dass die Natur des Bindemittels für die Tiefe der Färbung der Sandsteine entscheidend ist.

[1]) Tschermaks min. u. petrog. Mitth. Bd. XIV. Heft 2.



Tafel III. Reduktion 2½ der nat. Grösse.

Wind-, Hitze- und Wasserwirkungen an Steinen aus der Wüste bei Biskra.

Tafel III. *Wind-, Hitze- und Wasserwirkungen an Steinen aus der Wüste bei Biskra* (mit Ausnahme von 7 und 8). Reduktion $^5/_8$ der natürlichen Grösse.

1 bis 5: Lehmkugeln, «boules du désert», von verschiedener Form (eigenthümlich besonders die Form 2 durch Rollung und Windschliff entstanden), vergl. pag. 31.

6. Winddreikanter mit zwei scharfen und einer abgerundeten Kante.

7 und 8 Gletscherkanter (Scheuersteine) von *Bern*. (7 hat stark gerundete Kanten.)

9 und 10 Dreikanter. 9 hat rechts einen sekundär wieder ausgeheilten Riss

11 und 12 Sattelkanter mit hieroglyphenartiger Sculptur; 12 gespalten, links oben mit einer schüsselförmigen Vertiefung. (Sämmtliche abgebildete Kanter sind der Gesteinsart nach Kalk, haben Firnissglanz, Sandpolitur und, in Folge von Sandgebläse, Rillen, schriftartige oder mäandrische Sculptur, sowie Spuren von Regenwirkung.) Vergl. pag. 29.

13 und 14. Durch Hitze und grellen Temperaturwechsel zersprungene Kalkgerölle. (14 rund, röthlich gefärbt; 13 kantig, dunkel auf der Oberseite, auf der Unterseite mit zahlreichen von Wasser herrührenden runden, 1 bis 5 mm. grossen Vertiefungen.)

15. Rothes Kalkgeröll mit Glättung, blatternarbiger Oberfläche und Firnissglanz, durch Wind und feinen Flugsand erzeugt.

16. Anstehender, innen röthlicher, feinkrystallinischer Kalk mit Rillen. Sandpolitur und Glanz auf den hervorragenden Theilen, die Vertiefungen bleiben matt. Vergl. pag. 28 Anmerkung.

17. Grauer, feinkrystallinischer bis dichter Kalk mit maeandrischer Sculptur; hervorragende Theile polirt, Zwischenräume feinporig ausgeblasen.

18. Pechschwarze Rinde an einem innen grauen, mangan- und eisenhaltigen, bituminösen Sandstein, welcher Sandstriemen und mattglänzende Oberfläche zeigt. (Vergl. pag. 34 und Nachtrag).

A. Rossel.

LES PARASITES VÉGÉTAUX
DE LA
VIGNE PROVENANT DE L'INTRODUCTION DE LA VIGNE AMÉRICAINE
ET LES
MOYENS DE LES COMBATTRE.
Épidémie du Mildew en 1894.

Conférence faite dans la Séance du 27 Octobre 1894.

Nous appelons nouveaux parasites de la vigne ceux, qui ont été, comme c'est démontré par l'évidence, *introduits par les vignes américaines* en Europe. Ce sont le Black-rot, le Peronospora viticola et l'Oïdium Tuckeri. Ces maladies n'existaient pas chez nous avant 1840 et les deux premières avant 1860.

Le Black-rot a été découvert pour la première fois au mois d'août 1885 par M. M. P. Viala et L. Ravaz. [1]) Cette maladie est la pourriture noire des raisins qui cause de grands ravages aux Etats-Unis; elle est avec le mildiou (Peronospora viticola) le plus grand obstacle à la culture de la vigne en Amérique. *Cette maladie n'a pas encore fait son apparition en Suisse.* M. Viala a constaté sa présence dans le département du Hérault le 11 août 1885 chez M. Ricau Henri, régisseur du domaine de Val-Marie à Ganges.

Les grains présentent une petite tache rouge qui s'étend sur *toute la surface* de celui-ci en 2 jours; le grain est comme pourri, il se flétrit, se dessèche au bout de trois ou quatre jours et devient *noir foncé.* La surface est alors recouverte de taches noires, très nombreuses et visibles à l'œil nu, qui sont constituées par les organes fructifères du champignon qui cause le Black-rot: le Phorna uricula, décrit par M. Viala.

[1]) Extrait des comptes rendus de l'Académie des sciences du 7 septembre 1885. Note présentée par M. van Fieghem.

Les fructifications sont distribuées indifféremment; les unes sont des *pyramides* avec *stylospores* ovoïdes, incolores (diamètre 0,0045^{mm} à 0,0093^{mm}) et fixées sur de fins stigmates, les autres sont des *spermogonies* avec spermaties en bâtonnets très ténus et incolores. L'enveloppe épaisse de ces anceptacles est percée à un sommet d'une ouverture par où sortent en grand nombre les corps reproducteurs.

Le Black-rot n'a aucune analogie avec *l'anthracnose* et le *Peronospora viticola*. Sa gravité serait tout aussi grande que celle de ce dernier, si son extension était aussi rapide.

Les traitements sont ceux proposés pour le Peronospora viticola, l'emploi des sels de cuivre.

L'Oïdium Tuckeri a été découvert en 1845 par un jardinier du nom de Tucker dans les serres de Margate, localité située à l'embouchure de la Tamise; en 1847 on constatait la maladie dans les serres de M. de Rotschild à Suresne. En 1850 la maladie se répandait dans les vignobles de la Seine.

En 1851 l'invasion des vignobles de l'Europe était générale; en 1852, 1853, 1854, 1855 et 1856 les vignobles du midi de la France ont beaucoup souffert.

La maladie est très bien étudiée et décrite; elle altère les raisins, les feuilles et les rameaux et peut provoquer la perte complète des récoltes. Berkeley a constaté qu'elle était occasionnée par un petit champignon appartenant au groupe Oïdium; depuis lors Tulame, Béranger, Trévisan en ont fait la description et rapportèrent le champignon au genre Erysiphe, de la famille des Erysiphes, groupe des Perisporiacées, ordre des Acernycètes; mais le nom d'Oïdium Tuckeri est resté populaire.

D'après G. Foës (cours de viticulture) *l'Erysiphe Tuckeri* est très distinct de *l'E. communis* des pois et des liserons; il est bien constaté qu'il est particulier à la vigne et importé de l'Amérique.

Il est formé d'un *mycelium*, formé de filaments fins, nombreux et ramifiés en tubes non cloisonnés. *Il ne pénètre pas les tissus.* on trouve sur les filaments des renflements en forme de petites pelotes qui jouent le rôle de suçoirs et prennent la nourriture dans les cellules de l'épiderme de la vigne.

Les filaments se développent en grand nombre et forment à l'œil nu comme une toile d'araignée. Les cloisons se limitent et forment des spores qui se détachent et fructifient à une température de 23 à 25 degrés centigrade en présence de l'humidité.

On a remarqué que l'oïdium se multiplie, surtout là où les racines prennent peu d'humidité, par conséquent aux treilles; les soins donnés à la culture, le travail rationnel de la terre sont de bons remèdes contre l'oïdium; là où l'épidemie prend une forte extention on l'entrave par le soufrage, c'est à-dire que l'on répand de la poussière de soufre sur toutes les parties vertes dès les premiers symptômes de la maladie et on renouvelle l'application chaque fois que l'oïdium reapparaît sur les ceps.

Chez nous les attaques d'oïdium sont moins dangereuses que précédemment et présentent moins de dangers sérieux dans les vignes.[1])

Il n'en est pas de même du Peronospora viticola qui, si nous ne traitons pas nos vignes d'une manière rationnelle, tend à détruire pour toujours le vignoble européen.

En 1873 Cornu rendait attentif, dans un travail destiné à l'Académie des sciences, que la grande quantité de vignes américaines, introduites en Europe par suite de l'épidémie du phyloxera, ne manqueraient pas, si on n'y prenait garde, d'y introduire une autre maladie tout aussi dangereuse: le mildew, car il avait constaté, ainsi que Farlon, que le Peronospora se trouvait sur presque toutes les variétés de vignes américaines. En 1878 Planchon a constaté la première épidémie de mildew sur des Jaquez en France; en 1879 l'extension devenait déjà considérable, on constatait le Peronospora dans le département du Rhône, à Yenne en Savoie (Baisset), en Italie à Boghera près de Pavie (Pizotta). En 1880, Prilleux constatait la présence du parasite en Vendôme (Loire et Cher), dans la Touraine près de la ville de Tours ainsi qu'à Mettray en Indre et Loire. En même temps on le signalait en Algérie pour la première fois, et ce n'est que le 13 juin 1881 qu'il fit également pour la première fois son apparition en Grèce. En 1882 il dévastait une partie du vignoble d'Alsace et en 1883 il était partout en Europe où l'on cultive la vigne. Les premières fortes épidémies en Suisse datent de 1885 et 1886.

Lors de l'épidémie les feuilles présentent à leur face intérieure des taches blanches, ayant l'aspect de moisissure. A la face supérieure

---

[1]) En 1894 l'épidémie a été assez forte entr'autre dans le canton de Vaud. M. Henri Mercanton à Cully a proposé et introduit un moyen aussi simple qu'ingénieux pour sulfurer les ceps de vignes. L'ouvrier porte à chaque main un sac rempli à moitié de fleur de soufre, il marche lentement entre deux rangées de ceps et secoue videmment les sacs au dessus des plantes. Le travail se fait de cette façon d'une manière satisfaisante.

correspondent des taches rouges, et peu à peu la feuille se dessèche de sorte que, si l'épidémie est considérable, bientôt toutes les feuilles tombent, la respiration cesse, le fruit ne mûrit pas et la récolte est perdue.

La maladie peut s'étendre sur les raisins, c'était le cas en 1894; les grains ne sont atteints qu' à l'état jeune et assez rarement. L'aspect des grains est alors très caractéristique, on remarque à la surface des brunissements et des durcissements de la peau; il suffit de placer les grains à une température de 23 degrés centigrades sous une cloche de verre avec un peu d'eau pour constater le développement du mycelium à l'intérieur.

Le mycelium vit donc à l'intérieur du grain et de même à l'intérieur de la feuille, ce qui fait la grande différence entre le développement de l'oïdium et du Peronospora.

Les spores se déposent à la surface *supérieure* de la feuille, de là le mycelium *pénètre* dans la feuille, détruit les cellules non seulement de l'épidèrme, mais de l'intérieur et apparaît sous la feuille sous forme d'efflorescence blanche.

Les efflorescences forment une végétation luxuriante formée de ramicelles, chargée de spores ovoïdes. Nous donnons ici un dessin du parasite très agrandi, ainsi que des spores et œufs d'hiver (oospores).

Le Peronospora se développe actuellement partout dans les vignes où la température atteint 20 à 30 degrés *par le vent du sud humide*: le vent du nord *sec* tue la maladie, l'abaissement de température lui est également défavorable. L'influence du Peronospora sur le vignoble est considérable, aussi a-t-on dû chercher un remède à la maladie et celui-ci a été trouvé dans les sels de cuivre.

Les moyens pour combattre le Peronospora consistent donc d'abord dans une bonne et rationnelle culture, en second lieu dans le traitement des vignes par les sels de cuivre.

Ce dernier traitement est un travail nouveau, qui ne peut plus être négligé, le sulfatage de la vigne est aussi nécessaire que tout autre travail à faire dans le vignoble. Négliger le traitement des vignes peut avoir pour la récolte des conséquenses très fâcheuses. En 1894 les vignes non sulfatées ont perdu en Suisse la moitié de la récolte et les vignes sulfatées trop tard un bon tiers; seules les vignes sulfatées à temps ont donné une quantité et une qualité normale.

Le sulfatage a lieu au moyen d'une aspersion d'oxyde de cuivre hydraté en suspension dans l'eau au moyen d'un pulvérisateur.

L'oxyde se prépare en précipitant une solution de sulfate de cuivre par un lait de chaux (bouillie bordelaise) ou d'azurine (sulfate de cuivre ammoniacal). Le premier produit contient pour 100 litres d'eau 3 kg. de sulfate de cuivre et 3 kg. de chaux, préalablement éteinte et tamisée. L'azurine contient pour 100 litres d'eau 500 gr. de sulfate de cuivre et la quantité d'ammoniaque nécessaire pour dissoudre exactement l'oxyde de cuivre hydrate produit en précipité par l'ammoniaque.

La bouillie bordelaise a le défaut de sécher par le vent du nord et d'être chassée par le vent, de sorte que les traitements doivent être fréquents, l'azurine celui d'être assez facilement lavée par l'eau de pluie, de sorte que plusieurs traitements sont également nécessaires.

M. Siegwart, chimiste à Schweizerhall, qui s'occupe beaucoup de cette question, a introduit pour la première fois en Suisse l'azurine concentrée; depuis cette année il fabrique, sous le nom *d'azurine bordeaux*, un liquide qui dépose des taches d'oxyde de cuivre hydraté qui tiennent sur la feuille beaucoup mieux que les préparations faites jusqu'ici.

Les traitements doivent être préventifs, c'est-à-dire qu'ils doivent avoir lieu avant l'apparition de la maladie; une feuille atteinte ne peut plus être sauvée par le sulfatage; un sulfatage tardif peut avoir encore un bon effet, mais la mauvaise influence du mildew se fera toujours sentir sur la quantité et la qualité du vin. Il faut donc sulfater tous les ans régulièrement avant le 15 juin dans nos contrées pour la première fois et fin juillet pour la seconde fois; quelquefois, si le temps devient chaud et humide, un troisième sulfatage est indiqué.

Nous espérons que le sulfatage Siegwart permettra de sulfater moins souvent, ce qui économisera la main d'œuvre.

On s'est demandé si les sels de cuivre employés régulièrement à la désinfection, gêneraient le développement de la vigne. L'expérience a démontré le contraire, il semble même que les sels de cuivre sont favorables au développement des plantes et particulierèment du vignoble. C'est du moins ce que semble démontrer le savant travail du professeur Tschirch de l'université de Berne qui s'est occupé particulièrement de l'influence des sels de cuivre sur la végétation.

Il fallait aussi savoir si les sels de cuivre pourraient être remplacés par un autre désinfectant. C'est M. le Dr. Wütherich de Berne qui s'est chargé de ce travail, qu'il a exécuté dans les laboratoires de l'université de Berne. Il s'est surtout occupé du Peronospora infestans

de la pomme de terre et il a établi d'une manière certaine qu'aucune substance ne pourrait remplacer les sels de cuivre, sans en excepter le lisol que l'on recommande dans les derniers temps. Nous recommandons la lecture de ces deux savants travaux à ceux qui s'intéressent à cette importante question.

Il nous reste à constater quelle a été l'influence du mildew sur le développement des raisins en 1894. Nous avons fait l'analyse des raisins de vignes non sulfatées, et voici le résultat de nos recherches.

Pour les vignes en bon état, le poids de la vendange pressée des blancs s'est élevé jusqu'à 82 degrés à l'éprouvette normale, ce qui indique 16,4% de sucre, qui donneront par la fermentation 10,2 % d'alcool, ce qui dénote une belle maturité. Pour les vignes même faiblement atteintes, le degré est descendu à 70 et 72 degrés à l'éprouvette normale, ce qui représente 14 à 14,4 % de sucre ou 1,25 % d'alcool en moins. Les rouges traités et bien exposés (Pinot noir de Bourgogne, Klevner, Savagner) ont donné, comme l'année dernière, d'excellents résultats; on signale même à Douanne un rouge qui jauge 100 degrés, ce qui serait tout à fait hors ligne. Un vin de 100 degrés correspond à 20 % de sucre ou 12,5 % d'alcool en volume.

A côté de ces vins, il en existe qui ont fortement souffert de la présence des vins mildiousés et ceux-là seront facilement reconnaissables au goût, car le degré descend quelquefois jusqu'à 45 ou 50 degrés, ce qui équivaut à 10 % de sucre maximum. En même temps ces vins sont très acides: J'ai fait cette semaine une analyse détaillée de raisins mildiousés non traités, pris en vigne le 22 octobre 1894; voici les résultats obtenus, qui démontrent, combien la présence de ce raisin, même en petite quantité, peut influencer sur le raisin de bonne qualité dans la vendange quand elle en contient:

Poids spécifique, 1,028.
Degrés à l'éprouvette, 28 degrés (température normale).
Sucre 5,3 %.
Alcool après fermentation, 3,5 % en volume.
Acidité 19,275 ‰ ou grammes par litre!!

Il était important de constater à quel état se trouvait l'acidité, car on sait que dans les raisins mûrs l'acide est presque tout entier à l'état de tartre, c'est-à-dire de tartrate acide de potasse, en d'autres termes, qu'il est en partie neutralisé par une base, la potasse, qui lui enlève sonâc reté et contribue à donner au vin ses qualités hygiéniques;

or, l'analyse des produits de l'acidité des raisins mildiousés et non sulfatés a donné comme résultat :

acide tartrique à l'état de tartre 7,896 grammes par litre; de sorte qu'il se trouve dans ce liquide près de 2 1/2 fois plus d'acide libre que d'acide combiné sous forme de tartre et qu'un vin de cette catégorie, quoique pur, serait déclaré falsifié en cas d'analyse officielle. J'ai tenu à constater ces faits, car on doute encore dans certains milieux qu'il s'agisse d'une maladie nouvelle de la vigne, et c'est cette erreur qui a fait que les vignes, l'année dernière, ont été incomplètement traitées, ce qui a occasionné pour le vigneron une très grande perte.

Dans les cantons de Zurich, Vaud et Valais les traitements des vignes aux préparations de sulfate de cuivre sont obligatoires et les vignerons s'en trouvent parfaitement bien; d'autres cantons, entre autre le canton de Berne, ne veulent pas se soumettre à cette obligation, malgré l'initiative prise par les chefs des Départements de l'agriculture. Une pareille opposition n'est pas justifiable, surtout en présence des résultats néfastes donnés par les vignes non sulfatées en 1894.

Signalons en terminant le remarquable travail de M. Rumm fait à l'université de Berne sur l'influence des sels de cuivre sur les spores de parasites. Le travail d'une valeur scientifique et pratique incontestable constate que la bouillie bordelaise n'a d'effet qu'en tant que l'oxyde de cuivre tient fortement sur la feuille. La bouillie lavée, c'est-à-dire l'eau de lavage qui découle de l'oxyde de cuivre est sans effet sur les spores.

Le travail pratique de désinfection doit donc se faire de manière à ce que les gouttes d'oxyde de cuivre soient aussi près l'une de l'autre sur les feuilles de vignes et qu'elles résistent au vent et à la pluie.

Pour l'essai des différents liquides cuivreux employés contre le Mildew, je fais l'expérience suivante :

Les liquides dilués d'après la méthode ordinaire et indiquée par l'expérience sont avec une petite brosse trempée dans le liquide et secouées violemment, projetés en fine goutte sur une plaque de verre de vitre. Après avoir laissé sécher on donnera la préférence au produit donnant les taches les plus adhérentes et dissolvant le moins facilement dans l'eau, à la condition toutefois qu'il contienne la quantité de sulfate nécessaire.

M. Rumm par son observation basée sur une étude vraiment scientifique a rendu un véritable service à l'agriculture.

R. Zeller.

Ein geologisches Querprofil durch die Centralalpen.

Einleitung.

Die historische Entwicklung der Alpengeologie zeigt, dass bei der geologischen Erforschung *kleinerer Gebiete* die Darstellung der thatsächlichen Verhältnisse in gleichem Maasse durch Karten und Profile geschah; wo es sich dagegen darum handelte, zusammenfassend den Bau eines *grossen Alpenstückes* zur Anschauung zu bringen, eilte die Karte dem Profil voraus. Denn eher kann man aus Specialkarten eine Übersichtskarte kombinieren, als aus verschiedenen Lokalprofilen ein grosses Übersichtsprofil zusammenstellen. Jene ist weit mehr nur die Wiedergabe des thatsächlich Beobachteten, während beim Profil die persönliche Auffassung stark mitspielt, und deshalb Profile verschiedener Autoren noch schwieriger in Übereinstimmung zu bringen sind als ihre Karten. Dazu kommt auch der Umstand, dass man beim Profil mehr oder weniger an eine Linie gebunden ist und die Lokalprofile nicht immer jene Gegenden schneiden, die man bei Herstellung eines grössern Profiles berührt. So ist es begreiflich, dass es schon lange geologische Übersichtskarten der Alpen gab, bevor von Giordano [1]) im Jahre 1873 der Versuch gemacht wurde, ein Querprofil vom Nordrand der Alpen bis zur lombardischen Tiefebene durchzulegen. Und doch ist nichts so sehr geeignet wie ein durchgehendes Profil, um die Grundzüge im Bau der Alpen, die Verteilung der Gesteinsarten und ihre Lagerung, die Verbindung der verschiedenen Zonen untereinander und ihre Bedeutung als Teil des Ganzen dem Beschauer vor die Augen zu führen. Eine langatmige Beschreibung hat hier so wenig Wert wie etwa Spekulationen über die Grenzen der Festländer alter Formationen ohne den Versuch kartographischer Darstellung. Ein Gesamtprofil muss stets präcis sein und kann nichts verschleiern oder unter allgemeinen Redensarten verdecken. Endlich ist es, wenn auch empirisch gehalten, sehr geeignet, theoretische Fragen zu beleuchten oder neue aufzuwerfen.

[1]) F. Giordano, Esame geol. della catena alpina del San Gottardo.

Der Erfolg, welcher z. B. Heims Querprofil durch den Nordabfall der Centralalpen [1]) zu teil geworden ist, gilt nicht so sehr der Darstellung der speciellen Verhältnisse des Reussthales, als vielmehr dem Versuch, ein allgemeines, theoretisches Bild des Gebirgsbaues der Schweizer Alpen zu geben. Der schon existierende Gedanke des Zusammenhanges der passiv gefalteten Massive untereinander wurde hier zum deutlichen Ausdruck gebracht, und es ist deshalb dieses Profil, obschon es die Alpen nicht ganz durchschneidet, in alle grösseren Hand- und Lehrbücher der Geologie übergegangen.

Warum nicht schon das Profil von Giordano dieses Erfolges teilhaftig geworden ist, begreift sich, wenn man bedenkt, dass diesem Autor nur sehr lückenhafte und oberflächliche Detailaufnahmen zu Gebote standen, indem sein Profil Gebiete berührt, deren äusserst verwickelter geologischer Bau erst in neuester Zeit klargelegt worden ist.

Unterdessen ist man uns in den Ostalpen zuvorgekommen. A. Rothpletz hat im Jahre 1894 einen Querschnitt durch dieselben veröffentlicht, der uns in äusserst deutlicher Weise jene Vorteile von Übersichtsprofilen zeigt, die wir oben kurz angedeutet. Besonders wohlthuend wirkt in diesem Querschnitt die ausgesprochene Absicht, nur das Thatsächliche zur Darstellung zu bringen und die theoretische Spekulation vollständig dem Beschauer zu überlassen. In dieser Beziehung setzt er sich in direkten Gegensatz zu dem oben erwähnten Heim'schen Profil.

Ein mit dem letzteren in der Richtung zum Teil übereinstimmendes Profil ist in neuester Zeit durch C. Schmidt [2]) zu einem reellen durchgehenden Querschnitt und zwar im Sinn und Geist der heute herrschenden Ansichten über die tektonischen Probleme ausgearbeitet worden. Es liefert dieses Profil den Beweis, wie instruktiv solche Übersichten über den Bau der Centralalpen sind, und selbst wenn die vorliegende Arbeit nicht schon bereits bei der Publikation des Schmidtschen Profiles in den Aufnahmen vorgelegen hätte, so würde letzteres Profil erst recht den Anstoss zur Aufnahme eines zweiten gegeben haben.

Denn obwohl im grossen und ganzen, namentlich was die Zusammensetzung der Zonen und ihre Aufeinanderfolge anlangt, zwischen dem Aarethal und dem Reussthal Übereinstimmung herrscht, sind doch im einzelnen die tektonischen Verhältnisse so verschieden, dass es sich

[1]) Heim, Untersuchungen über den Mechanismus der Gebirgsbildung. Atlas. Taf. 13. Fig. 13.

[2]) Livret-Guide géologique de la Suisse. Exkursion 8: C. Schmidt, Centralalpen.

durchaus lohnt, eine eigene Profillinie durch die westlichen Centralalpen zu legen. Zugleich will meine Arbeit ein eigentliches Querprofil sein, entlang einer geraden Linie, und nicht eine Art Sammelprofil tektonisch interessanter Stellen, die oft in der Streichrichtung weit auseinanderliegen. Zwar können ja Abweichungen von einer geraden Projektionsebene nie ganz vermieden werden, sofern nicht das Profil darunter leiden soll; immerhin durften sie nicht zu häufig und nicht zu gross sein.

Eine Linie, welche diesen Bedingungen vorzüglich entsprach, war die gerade Verbindung der Orte Solothurn, am Südabhang des Jura, und Arcisate, ein Städtchen in der Nähe von Varese. Die Projektionsebene ist, können wir auch sagen, die gerade Verbindung der Städte Solothurn und Mailand. Ihre Richtung ist N 34° W—S 34° E, also annähernd senkrecht auf das Streichen der Alpen. Die gewählte Linie erwies sich bei der Arbeit wirklich so günstig in Bezug auf die nicht zu umgehenden Abweichungen, dass diese nur ganz selten den Betrag von 4 km. erreichen und ihn, abgesehen von den im Hintergrund projizierten Gebirgen, nie überschritten.

Ganz neu aufgenommen sind der Querschnitt durch die Faulhorngruppe und die Strecke vom Rhonethal bis zum Langensee. In den übrigen Stücken wurden entweder bereits vorhandene Lokalprofile unverändert eingesetzt oder aber, wo solche zu weit von der Projektionsebene abweichen, auf Grund der vorhandenen Aufnahmen, sowie eigener Begehungen ein neues Profil konstruiert.

Als kräftiger orographischer Abschluss des schweizerischen Molasselandes wurde die erste Jurakette, der geologisch wie landschaftlich klassische Weissenstein nach den Aufnahmen von Lang [1]) in das Profil einbezogen. Für das Molasseland bis Marbach ist die eigene Profillinie aufgenommen worden mit thunlichster Berücksichtigung der einschlägigen Arbeiten F. J. Kaufmanns [2]). Der letzte Teil der subalpinen Molasse und die erste Kreidekette wurden direkt nach Kaufmann kopiert, am Brienzergrat hingegen diente wieder die Projektionsebene als Grundlage. Der Querschnitt durch die Faulhorngruppe ist, wie bereits bemerkt, ganz neu und er hat auch trotz der seither erschienenen Publikation von C. Mœsch [3]) nichts an Neuheit

[1]) Lang, Geolog. Skizze der Umgebung von Solothurn.

[2]) F. J. Kaufmann, Gebiete der Kantone Bern, Luzern etc. Beiträge z. geol. Karte der Schweiz. Lief. 11.

F. J. Kaufmann, Emmen- und Schlierengegenden etc. Ebend. Lief. 24. I.

[3]) C. Mœsch, Kalk- und Schiefergebirge zwischen Reuss- und Kienthal. Ebenda Lief. 24. III.

verloren. Für das ganze Aarmassiv konnte das entsprechende Profil von A. Baltzer[1]) direkt eingesetzt werden. Für die Strecke Rhonethal-Langensee, die ganz auf eigenen Aufnahmen beruht, waren ausser der geologischen Karte im Massstabe 1:100000 und den dazu gehörigen Texten von Gerlach[2]) und Rolle[3]) fast keine Vorarbeiten da, und es dient dieses Stück zur Ergänzung der seither erschienenen Profile von C. Schmidt[4]). Der letzte Abschnitt endlich durch das Luganer Eruptivgebiet beruht fast ganz auf den Arbeiten von Taramelli[5]), Harada[6]), Steinmann und Schmidt[7]), weniger auf eigenen Begehungen.

Die Aufnahmen wurden im Sommer und Herbst des Jahres 1893 gemacht und sie konnten bei der für geologische Exkursionen ausserordentlich günstigen regenlosen Witterung zum Abschluss gebracht werden. Die petrographische Untersuchung der Gesteine und die Verarbeitung der Aufnahmen, welche im geologischen Institut der Hochschule Bern vorgenommen wurden, sowie anderweitige Beschäftigung verzögerten die Vollendung der Arbeit bis zum Frühjahr 1895.

Noch einige Worte über die Konstruktion. Das Profil wurde zuerst im Massstab 1:25000 entworfen und dann auf 1:100000 reduziert. Die Skala folgt im allgemeinen derjenigen der neuen geologischen Karte der Schweiz von Heim & Schmidt (1:500000). Es wurde davon abgesehen, die Erdkrümmung zum Ausdruck zu bringen, weil sich bei der Berechnung ergab, dass der entstehende Bogen viel zu flach sei, um wirksam hervorzutreten.

Hervorzuheben ist endlich noch der empirische Standpunkt, von dem aus das Profil gezeichnet wurde. Absichtlich sind die Luftsättel auf das Nötigste beschränkt, und die so beliebten Bögen über die Centralmassive sind, als der theoretischen Spekulation angehörend, ganz weggelassen worden. Das Profil sucht nur das Thatsächliche zu geben und es schliesst sich in dieser Bestrebung mehr an den Rothpletz'schen Querschnitt durch die Ostalpen an als an die Profile von A. Heim und C. Schmidt.

[1]) A. Baltzer. Das mittlere Aarmassiv etc. Ebenda. Lief. 24. IV.

[2]) H. Gerlach. Die Penninischen Alpen. Ebenda. Lief. 27.

[3]) Fr. Rolle. S-W Graubünden und N-O Tessin. Ebenda. Lief. 23.

[4]) C. Schmidt. Geolog. Exkursion durch die Centralalpen. Livret-Guide géol. de la Suisse. Geol. Exkurs. 8.

[5]) T. Taramelli. Il cantone Ticino meridionale etc. Beitr. z. geol. Karte d. Schweiz. Lief. 17.

[6]) T. Harada. Das Luganer Eruptivgebiet. N. Jahrb. f. Mineralogie. B. B. II.

[7]) Schmidt & Steinmann. Geolog. Mitteilungen aus der Umgebung von Lugano.

I. Die Molasse.

Abgesehen von den roten Mergeln der untern Süsswassermolasse (Aquitan), welche am Fusse des Weissensteins bei Farnern einen kleinen Höhenzug bilden,[1]) treffen wir auf der Profillinie die erste anstehende Molasse des schweizerischen Hügellandes am Dittiberg bei Derendingen, wo die weite Schotterebene der Aare sich mit derjenigen der Emme vereinigt. Am Ostfuss des von Erraticum bedeckten Hügels hat die Emme anscheinend horinzontal liegende sandige Mergel und Sandsteine der untern Süsswassermolasse entblösst.

Jenseits der weiten Kiesebene der Emme erhebt sich bei Halten das ungeschichtete Erraticum in 20 m. hohem steilem Absturz gleich einer Terrasse über die Emmenebene, welche durchschnittlich ein Niveau von 450 m. innehält. Das wellige Moränenterrain, dem indessen eigentliche Wallmoränen fehlen, reicht bis Höchstetten. Hier tritt hie und da am Fuss der umliegenden Höhen die Molasse als sog. Knauermolasse hervor. Ihr Fallwinkel ist selten mit Sicherheit zu bestimmen.

Im Westen der Profillinie befindet sich beim Dorfe Niederösch ein grosser Aufschluss; mächtige Sandsteinbänke wechseln mit dünnen Mergellagen, die 4° ESE einfallen. Auch am Grossholz bei Alchenstorf sowie am Ischberg bei Winigen ist da und dort unter der Erratikumdecke die untere Süsswassermolasse aufgeschlossen.

Südlich von Winigen beginnt die Meeresmolasse, der untern Süsswassermolasse regelmässig aufgelagert. Sie ist auf beiden Seiten am Thalausgang des Winigenbaches entblösst und zwar in der Muschelsandsteinfacies mit Petrefakten [1]). Genaue Fallbestimmungen sind bei dem Mangel an Mergeln nicht zu machen, erst auf dem Plateau von Schwanden zeigen sandige Mergellagen ein südöstliches Einfallen von 7—9° und ob der Käserei Hofholz findet sich in ihnen ein Lager mariner Petrefakten (Panopæa) [2]). An der Strassenkreuzung südlich Leumberg tritt bereits Nagelfluh ein, die wir auch am Südfuss des Heiliglandhubels mit Sandstein wechsellagernd wiederfinden. Sie ist dort an der Landstrasse Burgdorf-Affoltern aufgeschlossen und fällt mit 8° gegen SSE. ein. Von hier südwärts nimmt die Nagelfluh immer mehr zu, zugleich legen die Schichten sich immer flacher. Hinter Rinderbach beträgt der Fallwinkel der Nagelfluh mit Sandsteinbänken

[1]) E. Kissling, geolog. Aufnahmen zu Blatt VII und VIII. Manuskript.
[2]) ebenda.

bereits nur mehr 3—4° S, ebenso auf Kiltbühlweid südlich Punkt 823 m. und im Ribiloch. Etwas weiter südlich auf der Höhe von Buchacker und Leimbützen stehen wir, den Helicitenfunden nach zu schliessen,[1]) bereits in der obern Süsswassermolasse. Gegen Sumiswald, im Thal des Lochbächli, liegt die Nagelfluh bereits horinzontal; wir stehen hier in der Mitte der grossen flachen Synklinale der Molasse zwischen Jura und Alpen.

In der Umgebung von Trachselwald, sowie im unteren Teile des Dürrgrabens herrscht stetsfort horinzontale Lagerung, ebenso im Gebiete der beiden Frittenbachgräben und im untern Golgraben bis gegen Trubschachen hin, wo sich die Bänke allmählig gegen S. schwach aufrichten (2—3°). Weiter östlich gegen den Centralstock des Napf hin ist die Neigung der Schichten weit unregelmässiger. Bei der Twärenscheuer im Twärengraben 3 km. NNE. von Trubschachen mass ich 5° NW., Kaufmann[2]) ganz in der Nähe 10°, ebenso viel bei Rehbach im Golgraben; weiter nördlich nehmen die Werte ab und ebenso gegen Osten, wo die Hauptmasse des Napf annähernd horinzontal liegt.

Südlich von Trubschachen findet ganz energische Aufrichtung statt, was sich namentlich schön an den langen Fluhbändern zu beiden Seiten des Ilfisthales erkennen lässt. Zugleich gewinnt die Tektonik einen entschiedenen Einfluss auf die Orographie. Überall, sowohl im Gebiete des Turner- und Schwändelberges, als auch drüben am Rämisgummen und Oberberg begegnen wir schräg gegen S. ansteigenden Terrassen, welche den Schichtflächen entsprechen und das landschaftliche Bild beherrschen. Besonders von einem höher gelegenen Standpunkte aus geben diese wie Schuppen übereinanderliegenden Schichtkomplexe der Gegend ihren besondern Charakter.

Das Profil schneidet zwischen Trubschachen und Marbach die Bergmasse des Rämisgummen und das Thal des Schärligbaches. Gleich zu Anfang finden sich unter der Stärenegg Fallwinkel von 12°. Der Stärenegg gegenüber, auf der andern Thalseite, neigen sich die Fluhbänder von Dürrenbach ebenfalls mit 11° gegen NW. Die Neigung nimmt nun stets zu; im Rütigraben ist sie bereits 20°; an der Ilfsfluh der gegenüberliegenden Thalseite 13° und weiter oben 19°. An den kulminierenden Punkten, dem Rämisgummen und hinüber zum Oberberg, schiessen die Bänke etwas flacher ein, und das Fallen geht

[1]) E. Kissling, geolog. Aufnahmen zu Blatt VII und VIII. Manuskript.
[2]) F. J. Kaufmann, Emmen- und Schlierengegenden, p. 439.

von NW. in ein westliches über [1]). Im untern Gebiet des Kurzenbaches und des Schärligs wird die Nordwestrichtung beibehalten, die Neigung aber grösser. Kaufmann erwähnt von der Bisegg und vom Kurzenbach Fallwinkel von 17° beziehungsweise 25° [2]). Die Terrassen der Meisenegg weisen 27°, bei Hintermeisenbach fallen die Sandsteine 34°.

An der niedern Wasserscheide zwischen Schärlig und Marbach sind die bunten Mergel der roten Molasse am Wege aufgeschlossen. Ihre Neigung beträgt 45° WNW., weiter unten im Thale, am grossen Anriss der Ilfis, im sog. Schächli, 52° NW.

Mit der roten Molasse stehen wir bereits im Gewölbekern der *ersten Antiklinale*, die darauffolgende Mulde fällt zum Teil in den breiten Thalgrund der Ilfis und ist nicht aufgeschlossen; doch soll nach Kaufmann [3]) die Muldenumbiegung in einem kleinen Seitentobel des Steiglenbaches zu beobachten sein. Die zweite südliche Antiklinale ist durch die Steiglen bis auf den aquitanischen Gewölbekern entblösst. Das genaue Profil des Steiglenbaches bis an den Fuss der ersten Kreidekette (Schrattenfluh) gibt Kaufmann [4]). Die kleine Diskordanz zwischen Molasse und Flysch berührt auch Burkhardt. [5])

Das schweizerische Hügelland verdankt der Zusammensetzung aus den ziemlich gleichartigen Gesteinen der Molasse seine landschaftliche Einförmigkeit. Es stellt den Rest eines alten Molasseplateaus dar, das aber durch die in den weichen Tertiärschichten sehr wirksame Erosion in lauter tiefe Furchen zerschnitten ist. Runde Bergrücken von verschiedenster Richtung sind durch tiefe, schluchtartige Thäler getrennt, und nur das merkwürdig gleichmässige Niveau ihrer Kammlinien zeigt uns, dass sie im Zusammenhang eine grosse Hochebene gebildet haben müssen. Die Böschungen sind sehr steil, wenn auch bei dem weichen Gesteinsmaterial nie senkrecht; die Thäler sind daher sehr eng ohne eigentliche Schluchten zu sein; der Emmenthaler bezeichnet sie mit dem charakteristischen Namen Graben (Golgraben, Frittenbachgraben, Dürrgraben etc.). Die Entwässerung des schweizerischen Hügellandes geschieht sonst regelmässig nach Norden. In der Nähe unseres Profiles bringt der aus härterer Nagelfluh bestehende Centralstock des Napf etwelche Modifikationen. Von ihm strahlen die Thäler

[1]) J. Kaufmann, Emmen- und Schlierengegenden, p. 431.
[2]) » ebenda p. 431.
[3]) » ebenda p. 425.
[4]) » ebenda p. 415.
[5]) C. Burkhardt, Kontaktzone von Kreide und Tertiär p. 92.

hängende Schrattenkalkdecke keine Unregelmässigkeiten mehr erkennen.

Die Grabenverwerfungen, welche am Südabhang der Schrattenfluh die Eocänstreifen von Silwängen und Schlund begrenzen, sind von Kaufmann [1]) eingehend geschildert worden, ebenso die Störungslinie, die den Schrattenkalk der Schrattenfluh von der eigentlichen Flyschmulde *Habkern-Sörenberg* abschneidet.

Jenseits der sanftgewellten Höhenzüge des Flyschterrains erheben sich im Süden die steilen, felsigen Abhänge des *Brienzergrates*, nur da und dort eine tiefere Einsattelung und einen Übergang nach dem Brienzersee bietend. Kaufmann gibt mehrere Querprofile durch diese Kette, die durch mehrfachen Wechsel von Schrattenkalk und Neocom auf stark gepresste Mulden und Sättel hinweisen. Gegen Osten keilt sich der Schrattenkalk allmählig aus, und in dem Maasse, wie er verschwindet, nehmen die obersten Lagen der Kreideserie, die *Wangschichten* an Mächtigkeit zu. Da, wo unser Profil den Brienzergrat schneidet, ist das Urgon bereits verschwunden, während die Wangschichten stark entwickelt sind. Unser Profil liegt etwas weiter westlich als dasjenige Kaufmanns über den Kruternpass. Es wurde hier eine eigene Profillinie vorgezogen, weil der südlich vorspringende Quersporn der Rotschalpburg für die Tektonik dieser Kreidekette interessante Aufschlüsse bietet. In Fig. 2 ist das thatsächlich Sichtbare dargestellt.

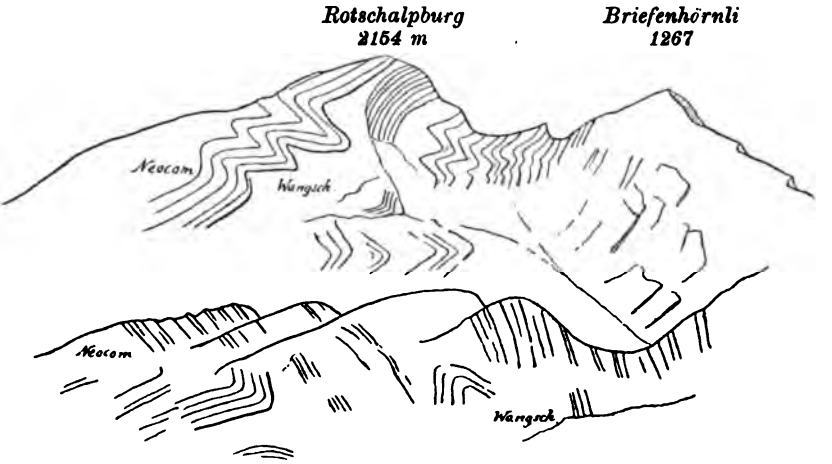


Fig. 2. Faltungen in Neocom und Wangschichten. An der Ostseite der Rotschalpburg.

[1]) Kaufmann, Emmen- und Schlierengegenden, pp. 327 und ff.

Am Briefenhörnli, 2167 m., wo der Querkamm der Rotschalpburg sich abzweigt, sehen wir die hellen Wangkalke mit 67° gegen SE. einfallen, weiter gegen Süden beginnt das Wang sich intensiv zu falten, und das alle Windungen mitmachende Neocom schliesst sich an. Sowohl gegen Ost, wie gegen West, scheint die Faltung an Intensität abzunehmen, während in Wahrheit nur der Mangel an grossen Aufschlüssen kein Gesamtbild entstehen lässt. Der Rücken der Tanngrindelegg zeigt in vielen Bachrunsen die ebenfalls stark gefalteten Kieselkalke des untern Neocom. Weiter unten bei ca. 1800 m. tritt eine bereits von Kaufmann [1]) notierte Berriaszone in annähernd senkrechter Stellung auf. Eine zweite Zone weisser Berriaskalke ist an dem Wege entblösst, der von Planalp (Hausstadt) nach der Rotschalp hinüberführt; die weiss anwitternden Bänke fallen hier ca. 45° NW., doch verwischt eine starke, 15° S. fallende Transversalschieferung die Schichtung fast vollständig, so dass Kaufmann irrtümlich den Fallwinkel der Schieferung als den der Schichtung angibt und letztere gar nicht bemerkt hat.

Das steile Tobel des Dornibaches, welches sich von der Tanngrindelegg zum Brienzersee hinab zieht und gute Aufschlüsse bietet, zeigt uns das mannigfach gewundene untere Neocom zuletzt ca. 80° NW. fallend und von gestauchten Berriasmergeln unterlagert.

Die Lagerungsverhältnisse weiter im Osten am Brienzer Rothhorn und über den Dürrgrind und die Schwanderfluh südlich hinab ins Aarethal sind ähnlicher Art wie die bisher erwähnten. Intensive Faltung im kleinen ist das Charakteristische. «Es finden sich viele Biegungen, Schlingen, Knickungen, oft mit starker Drehung der Streichungslinie, so dass ein Gesamtbild von bestimmtem gewölbeartigem Charakter nicht zu erhalten ist», sagt Kaufmann mit Recht [2]).

Am Rothhorn selbst, sowie an der Kante gegen den Dürrgrind sind mehrere kleinere Biegungen zu beobachten. Das tief eingerissene Tobel des Glyssenbaches zeigt uns den Bau der Schwanderfluh. Neocom und darunter Berrias sind stark gefaltet und gestaucht, zu unterst bei Schwanden tritt der Malm (Tithon nach Mœsch) unter der Kreide hervor und bildet ein prächtiges Gewölbe, dessen Südschenkel unter den enormen Schuttkegel des Schwandenbaches hinabtaucht.

---

[1]) F. J. Kaufmann, Emmen- und Schlierengegenden, p. 19.

[2]) F. J. Kaufmann, Emmen- und Schlierengegenden, pag. 22.

Das Tracé der Rothhornbahn bewegt sich bis ca. 900 m. ü. M. in grauen Berriaskalken und Schiefern, die unten am Trachtbach horizontal liegen, weiter oben stark gefältelt sind. Es folgen die auflagernden schwarzen, weiss anwitternden und regelmässig geschichteten Kieselkalke des Neocom mit 24° SE Fall. Ein grosser Felskopf, durch den ein Tunnel gesprengt werden musste, zeigt deutlich eine Umbiegung, aber die ganze Masse sieht aus, als wäre sie hier an sekundärer Lagerstätte und von der Planalpfluh heruntergerutscht. Bergschutt mit mächtigen Blöcken ist am obern Ausgang des Tunnels angeschnitten und die Wasserstation Geldried steht mitten im Material eines Bergsturzes.

Die weithin sichtbare Planalpfluh, welche die Bahn in einem längern Tunnel durchschneidet, besteht wieder aus den regelmässigen 15—20 cm. dicken Schichten des untern Neocom. Am Osteingang des Tunnels liegen sie horizontal, biegen sich dann auf und gegen N. zurück, bilden also ein gegen Süd überliegendes Gewölbe. Von Station Hausstatt bis Mittelstaffel sind eine Menge kleiner sekundärer Biegungen entweder direkt zu beobachten oder aus dem raschen Wechsel des Fallens zu erschliessen. Bei der Station Oberstaffel zeigen die senkrecht stehenden Neocomkalke starkes horizontales Clivage. Entlang dem Dürrgrind sowie am Abhang des Rothorns sieht man wieder mehrfache Umbiegungen, bis endlich nahe der Endstation das Neocom unter die 50° N. fallenden Wangschichten des Schöngütsch einfällt.

Es ergibt sich aus diesen Einzelheiten ungefähr folgendes: Der Brienzergrat bildet an seinem Anfang bei Interlaken eine einfache, nach N. übergelegte Falte. Diese löst sich gegen Ost allmählig auf und macht, indem zugleich der Schrattenkalk sich auskeilt und das Wang an seine Stelle tritt, einer Menge kleinerer Falten Platz, die nur sekundärer Natur sind und den vorhandenen Faltenwurf im grossen verdecken. Dass solche grössere Faltungen die Unterlage der kleinen lokalen Falten sind, ist aus dem Auftreten der Berrias-linsen zu schliessen. Jedenfalls ist die Intensität der Faltung eine sehr grosse und steht kaum derjenigen in der südlich folgenden Faulhorngruppe nach, in welcher die teilweise veränderte petrographische Beschaffenheit der Gesteine eine andere Varietät des Zusammenschubes oder tektonische Facies herbeigeführt hat.

III. Die Juraketten.

Die Faulhorngruppe.

Südlich vom Brienzersee erhebt sich die orographisch schön abgegrenzte Gebirgsgruppe des Faulhorns, nach Westen und Osten abgeschnitten durch die Thäler von Grindelwald und das Aarethal, im Süden durch den Sattel der grossen Scheidegg verbunden mit dem steil aufstrebenden Wetterhorn, einem Gliede des mächtigen Berneroberländer Hochgebirgswalles. Im Schwarzhorn mit 2930 m. kulminierend, wird diese Gruppe doch besser nach dem weltberühmten Faulhorn benannt. Von SW. nach NO. streichende Faltenzüge von vorzugsweise jurassischem Alter setzen sie zusammen; sie gehört jener Zone der nördlichen Kalkalpen an, die vom Kanton Waadt her über die Diablerets und die Berge des Kienthales herüberstreicht und weiter über Engelberg und den Urirothstock den Vierwaldstättersee erreicht, von wo aus östlich diese Zone durch Mœsch [1]) und Heim [2]) studiert worden ist.

Trotz der centralen Lage mitten im Herz des Berneroberlandes und des grossen Besuches von seiten der Touristen haben sich für die stratigraphisch, wie tektonisch sehr interessanten geologischen Verhältnisse der Faulhorngruppe nur wenige Beobachter gefunden. B. Studer [3]) glaubte nach einigen Petrefaktenfunden am Faulhorn die Gruppe der Kreide zuteilen zu müssen, bis durch die Untersuchungen von C. Mœsch, deren vorläufige Ergebnisse [4]) bei der Aufnahme meines Profils erst vorlagen, das jurassische Alter des Grossteils der Faulhorngruppe mit Gewissheit nachgewiesen wurde. Speciell die Verhältnisse in der Umgebung des Schwarzhorns und des Giessbachs berührt eine Studie von Th. Studer [5]). Ueber die Tektonik der Kalkketten in der Umgebung von Meiringen hat A. Baltzer [6]) neue Aufschlüsse gebracht und die Existenz einer kleinen Doppelfalte festgestellt. Endlich ist in neuester Zeit, als 24. Lieferung III. Teil der Beiträge zur geologischen Karte der Schweiz, der Text zur geologischen Karte von C. Mœsch erschienen unter dem Titel: Geologische Beschreibung der Kalk- und Schiefergebirge zwischen Reuss- und Kien-

[1]) C. Mœsch, Der Jura in den Alpen der Ostschweiz.

[2]) A. Heim, Beiträge zur geolog. Karte der Schweiz, Lief. 25.

[3]) B. Studer, Geologie der Schweiz. II. pag. 168.

[4]) C. Mœsch, Reisebericht über meine diesjährigen geolog Beobachtungen.

[5]) Th. Studer, Geologische Beobachtungen im Gebiete des Schwarzhornmassivs.

[6]) A. Baltzer, Das mittlere Aarmassiv etc., p. 121 und Profile.

thal. Dieser Textband mit seinem schönen Atlas erschien gerade noch vor Abschluss unserer Arbeit. Es erwies sich nicht als überflüssig, eine eigene Aufnahme der Profillinie gemacht zu haben, denn trotz der zahlreichen Profile und Skizzen von Mœsch wäre es nicht möglich gewesen, das für unser Profil Brauchbare daraus zusammenzustellen, abgesehen von unseren in wesentlichen, auf die Tektonik bezüglichen Punkten abweichenden Resultaten.

Unsere Profillinie trifft, vom Brienzergrat herkommend, die Faulhorngruppe an der Mündung des berühmten Giessbaches in den Brienzersee. Sie geht weiter über Axalp und den Tschingel 2245 m, berührt im Schwarzhorn 2930 m den Kulminationspunkt der ganzen Gebirgsgruppe, worauf sie bei der Passhöhe der grossen Scheidegg an die von Baltzer [1]) bearbeitete Profillinie Wetterhorn - Ulrichen anschliesst.

Es ist deshalb nur der mittlere Teil der Faulhorngruppe genauer untersucht worden, und Abschweifungen von der Profillinie wurden nur gemacht, sofern sie zum Verständnis des im Profil Beobachteten beitrugen. Dabei beschränkte sich die Arbeit bloss auf die Tektonik, indem die Stratigraphie und Paläontologie der jurassischen Kalkalpen in C. Mœsch einen berufenen Bearbeiter gefunden haben. Ohne deshalb mit Petrefaktensuchen viel Zeit zu verlieren, verliess ich mich, was die Stratigraphie anlangt, auf die Angaben, welche nach den Aufnahmen von C. Mœsch auf Blatt XIII der geologischen Karte der Schweiz (1 : 100 000) niedergelegt sind, und es gereicht mir zum Vergnügen, die Richtigkeit derselben, soweit ich nach petrographischen Charakteren urteilen konnte, im allgemeinen bestätigen zu können.

Ein Blick auf ebengenanntes Blatt XIII der geologischen Karte zeigt uns, dass die Faulhorngruppe in Bezug auf die Verteilung der Jurastufen in zwei Hälften zerfällt. Die nördliche Hälfte, begrenzt vom Brienzersee, Aarethal und der Linie Meiringen-Oltschialp-Tschingelfeld-Schwabhorn-Lütschenthal, zeigt eine überaus starke Entwicklung des Malm, untergeordnet des Dogger und der untersten Kreide. Im Gegensatz dazu besteht die südliche Hälfte, welche den ganzen Rest der Gruppe umfasst, nur aus Dogger und Oxford, der Malm erscheint erst wieder am Wetterhorn, Kreide findet sich gar nicht mehr.

---

[1]) A. Baltzer, Das mittlere Aarmassiv etc., Taf. 4, Prof. VI.

Die Lagerungs-Verhältnisse auf und in der Nähe der Profillinie sind auf eine grosse Strecke hin vortrefflich aufgeschlossen durch den tiefen Einschnitt des Giessbaches. Gleich unten am See durchschneidet er ein schon von Mœsch [1]) erwähntes Gewölbe im Dogger. Die Falte ist nördlich übergelegt. Der Nordflügel des Malm fällt unten am Seeufer mit 40° gegen SSE ein und gehört nach Mœsch [2]) den Tenuilobatusschichten an. Der aufliegende Dogger biegt beim Hotel gegen Süden und die berühmten Fälle ergiessen sich über den sekundär gewellten Gewölbescheitel. Oben bildet der Südschenkel von Malm in nahezu horizontaler Lagerung ein langes Fluhband. Der Dogger entspricht nach Mœsch [3]) den Humphriesischichten. Die Welle senkt sich gegen Osten allmählig, die beiden Malmflügel vereinigen sich, das Gewölbe verschwindet am Ostende des Brienzersees. Gegen Westen aber lässt es sich weit verfolgen; der Weg von Giessbach nach Iseltwald verläuft bis kurz vor letzterem Orte stets im Dogger des Gewölbekerns.

Östlich des Giessbaches führt ein Weg hinauf nach Axalp. Man übersteigt dabei jene Malmwand, die den Südschenkel des Giessbachgewölbes darstellt. Der Malm hat hier unter beständigem schwachem SEFallen eine Mächtigkeit von ca. 200 m. Oberhalb dieser Stirnkante liegt ein kleines Isoklinalthälchen, welches seine Existenz den Oxfordmergeln verdankt, die hier konkordant über dem Malm liegen und ebenso von solchem überlagert werden. Sie sind aufgeschlossen an einem Pfade, der von den Gütern «Braun [4])» über den Giessbach nach den Hütten der «Schweiben» hinüberführt, und sie fallen mit 25° nach SE ein. Eine Gewölbeumbiegung ist nirgends zu sehen, ebensowenig eine Synklinale im liegenden Malm. Weiter westlich ist vielleicht etwas erhalten, wenigstens berichtet Mœsch [5]) von drei Oxfordfalten, die ob Iseltwald zwischen Malm und Dogger zu Tage treten. Hier im Profil entsprechen die faktischen Verhältnisse einer *Schuppe*.

Der den Oxfordschiefern aufgelagerte Malm fällt noch eine kurze Strecke weit wie die Schiefer 25° SE, dann biegt er sich plötzlich auf und bildet eine scharfe S Falte, welche vom Axalpweg aus sehr schön an den jenseitigen Gehängen des Bowaldes zu übersehen ist und deren

[1]) C. Mœsch, Reisebericht etc., p. 260.

[2]) C. Mœsch, Kalk- und Schiefergebirge zwischen Reuss- und Kienthal, p. 162.

[3]) C. Mœsch, Reisebericht etc., p. 260.

[4]) Lokalnamen sind hier stets den betreffenden Blättern des eidgenössischen topographischen Atlasses (1 : 50 000) entnommen.

[5]) C. Mœsch, Reisebericht, p. 262.

einzelne Teile sich auch am rechten Thalgehänge nachweisen lassen. Die Gewölbeumbiegung, welche z. T. nur als Luftsattel existiert, bildet das Fluhband, das sich von den Giessbachgütern nordöstlich nach Meierhofstatt hinüberzieht.

Der Gewölbeschenkel der S Falte ist schwach nach SE geneigt und stösst nun plötzlich diskordant auf 60° ESE fallende Oxfordschiefer, wobei er stellenweise an diesen aufwärts geschleppt ist. Der Kontakt ist aufgeschlossen an einem Fusssteig, der von «Schwarzenberg» zu den Giessbachgütern hinabführt. Die Oxfordschiefer offenbaren sich orographisch wieder durch eine Depression, die Terrasse Schwarzenberg-Unterstalden, welche infolge des Wasserreichtums der Mergel etwas sumpfig ist.

Wieder liegt Malm im Hangenden des Oxford; er bildet zunächst eine spitze Mulde, in deren Kern auf der Westseite des Giessbaches Berriasschichten eingeklemmt sind, dann kommt das grossartige Malmgewölbe der Axalp, welches man am besten unten in den Giessbachgütern oder gerade gegenüber auf «Schwend» oder «Bottenhals» übersieht. In einem flachen Bogen spannen sich die Malmschichten vom Schwarzenberg bis unter das Tschingelhorn; oben auf dem Scheitel liegt die aussichtsreiche Axalp mit ihrem Kurhaus, gegen den Giessbach zu herrschen senkrechte Abstürze. Staunenerregend ist die Mächtigkeit des Malm, welche, nur das Sichtbare gerechnet, über 400 m. beträgt. Allerdings gehören die obersten Lagen nach Mœsch dem Tithon an. Auf der linken Seite des tiefen Giessbacheinschnittes ist das Gewölbe nicht mehr so einheitlich; es hat sich hier in zwei Aufwölbungen ge-

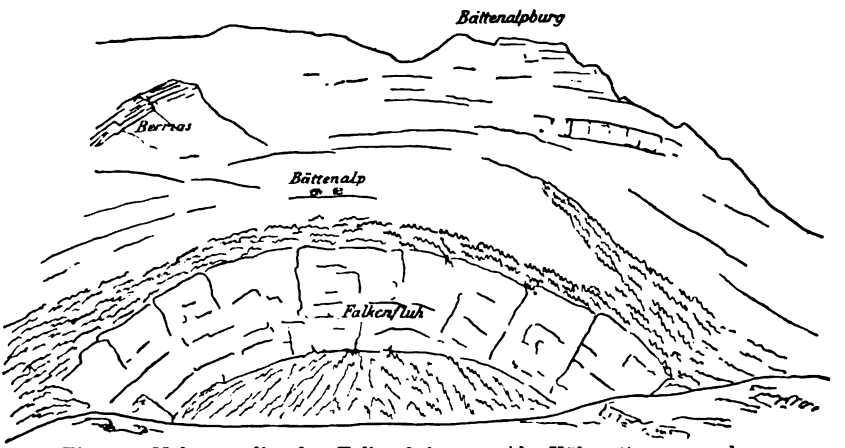


Fig. 3. Malmgewölbe der Falkenfluh, von Alp Kühmatt aus gesehen.

teilt, von denen aber die südliche, die Falkenfluh, ein Gewölbe darstellt, wie wir solche aus den Klusen des Berner Jura nicht schöner kennen. (Fig. 3).

Als Decke des mächtigen Axalpgewölbes treffen wir oberhalb «Ob Stalden» die grauen Mergel der Berriasschichten. Sie bilden zunächst die nördliche spitze Mulde des Profils und durch ein Gewölbe von Malm getrennt, das auf der Axalpseite nur am Gehänge bei Kühmatt nachweisbar ist, eine zweite ebenso spitze Mulde. Das mittlere Malmgewölbe durchschreitet man auf dem Wege von Kühmatt nach Lütschenthal, ohne sich dessen bei der unregelmässigen Klüftung des Malm bewusst zu werden. Erst der Blick von jenseits, von der Fangisalp aus, wo man das ganze rechtsseitige Thalgehänge bis zum Giessbach hinunter übersieht, zeigt uns seinen Bau. Fig. 4.

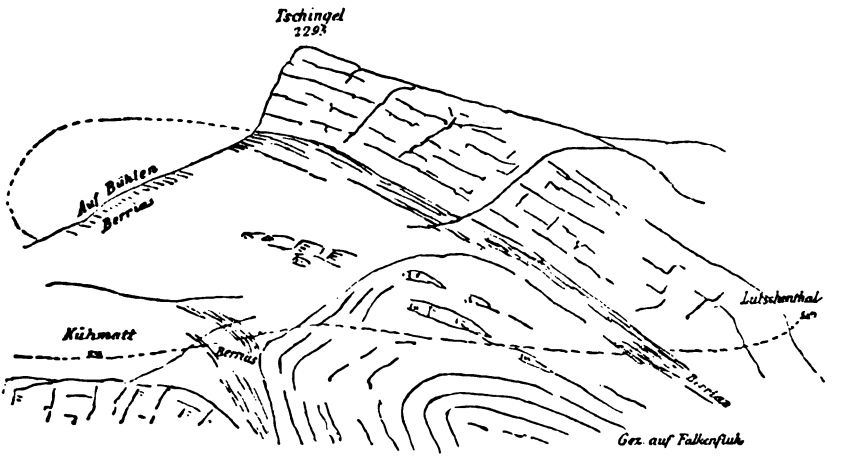


Fig. 4. Die Doppelmulde der Berriasschiefer auf Axalp.

Auf die Kreide folgt der Malm in umgekehrter Lagerung. Vom Schwabhorn herkommend bildet er zunächst das «Schweifisband», begrenzt unten am Giessbach den hübschen ebenen Kessel der Alp Tschingelfeld, dann erhebt er sich schnell im Tschingel und Axalphorn zu bedeutender Höhe (2327 m). Dieser Malm streicht nach N aus, vergebens suchen wir aber seine Fortsetzung; von hier weg südlich bis zum Wetterhorn herrscht nur mehr Dogger.

Hier verlässt das Profil den Giessbacheinschnitt; auf die komplizierten Verhältnisse in dessen obern Teil werden wir noch zurückkommen.

Der Malmzug des Axalphorns wird überlagert von Oxford in Form der Birmensdorferschichten, die stellenweise sehr reich an Cephalo-

poden sind; oft wimmelt das Gestein von Bruchstücken kleiner Ammoniten. Die Oxfordmergel besitzen am «Grätli» eine Mächtigkeit von mehr als 300 m und fallen mit 40° gegen SE. Die dem Malm zunächst liegenden, jüngsten Lagen sind hellgraue, glänzende Mergel und Mergelschiefer. Sie enthalten die zahlreichen von Mœsch [1]) angegebenen Petrefakten. Gegen Süd folgen, die eigentliche Wasserscheide und die Hauptmasse der Ablagerung bildend, dunkelgraue, bröcklige Thonschiefer.

Der Verlauf dieser Oxfordzone im Streichen nach Osten und Westen ergibt sich aus der Karte. Vom Sägisthal bis Meiringen bezeichnet diese Zone die Grenze zwischen dem Malm- und dem Doggergebiete der Faulhorngruppe. Wir wenden uns jetzt letzterem zu.

Der petrographische Charakter des Doggers ist ein derartig ausgeprägter, dass er mit keiner andern Ablagerung verwechselt werden kann. Ruppige Thonkalke und Thonschiefer sind die Hauptgesteinsarten. Um so schwieriger ist die Unterscheidung der einzelnen Doggerstufen, wenn man sich nicht Zeit nehmen kann, nach Petrefakten zu suchen. Petrographisch und paläontologisch gut charakterisiert sind nur die Humphriesischichten. Diese enthalten in Masse die grossen Wedel von Zoophycos scoparius und zeigen ausserdem einen merkwürdig regelmässigen Wechsel von kalkigen und thonigen bezw. schiefrigen Lagen, jede ungefähr 10—30 cm dick, so dass die Kalke von weitem als weiss und schwarz gebändert erscheinen. Ich werde in der Folge die Ablagerungen dieses Horizontes nur «Bandkalke» nennen, und es wird sich erweisen, dass dieselben zur Festlegung der tektonischen Verhältnisse fast überall ausreichen.

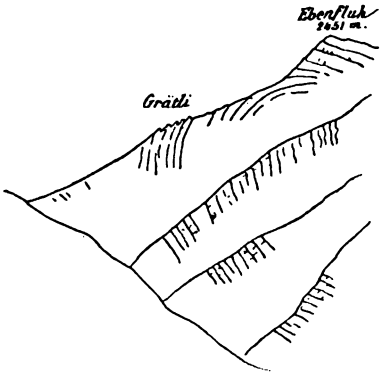


Fig. 5. Gewölbe der Ebenfluh.

Auf unserem Querprofil überlagert der Dogger die Oxfordschiefer des Grätli zunächst ebenfalls mit 40° SE Fall, dann aber richten sich die Schichten immer mehr auf. An den vorspringenden Coulissen der Ebenfluh ragen die harten Bänke senkrecht in die Luft wie die Zähne einer Säge oder eines Kammes. Die Anwohner haben das richtig herausgefunden und bezeichnen den Grat mit dem Namen «Strähl» (Dialektaus-

[1]) Mœsch, Kalk- und Schiefergebirge. Pag. 180, 181.

druck für Kamm). Der ganze Schichtkomplex biegt um gegen Süd (Fig. 5) und im Thälchen «hinterem Horn» stehen wir bereits in einer Synklinale, deren Kern von zoophycosreichen Bandkalken gebildet wird. An den vorspringenden Gräten, welche sich zum Wildgerst hinaufziehen, wiederholt sich derselbe Schichtkomplex in mehreren Windungen, von denen die obersten scharf geknickt sind. Fig. 6.

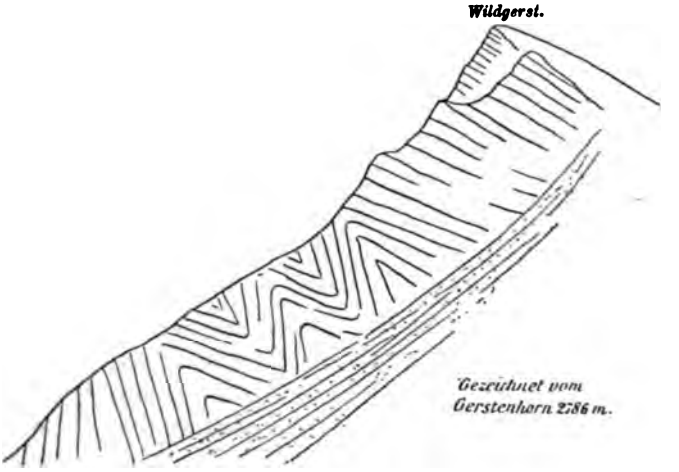


Fig. 6. Faltungen im Dogger am Nordabhang des Wildgerst.

Am Wildgerst fallen die Bandkalke 28° SSE; diese Neigung behalten sie bis hinüber zum Schwarzhorn 2930 m, wo sie sich wieder aufbiegen, so dass das Schwarzhorn aus einer nördlich übergelegten Mulde besteht. Die Umbiegung ist sowohl an den gegen den Blaugletscher abfallenden Wänden des Hornes zu beobachten, als auch weiter westlich bei der «Grossen Krinne.» Schwarzhorn und Wildgerst bestehen aus denselben ruppigen Thonkalken mit Zoophycoswedeln und Belemniten, so dass es mir unverständlich bleibt, wieso auf Blatt XIII der geologischen Karte der Wildgerst als unterer Dogger, das Schwarzhorn aber als oberer Dogger bezeichnet werden konnte.

Aus den obern Teilen der ausgedehnten Grindelalpen ragen eine Reihe schmaler Gräte strebepfeilerartig gegen das Schwarzhorn und das Krinnengrätli herauf, so der Gemsberg, der Schilt, die Schinnenplatten u. a. Diese nach Ost und West fast immer in Flühen abfallenden Kämme enthüllen uns die Struktur der südlich des Schwarzhorns gelegenen Teile der Faulhorngruppe. Es sind die Südgehänge des Schwarzhorns ein Gebiet intensiver Faltung, weit intensiver als wir sie bisher kennen gelernt. Die thonigen Kalke und Mergel des Doggers sind in

scharf geknickte nördlich überliegende Zickzackfalten gelegt. Fig. 7 zeigt dieselben an dem in der Profillinie liegenden Gemsberg, 2713 m.

Fig. 7. Faltungen im Dogger am Gemsberg 2713 m.

Weiter unten scheint die Faltung auf einmal aufzuhören, die Thonkalke fallen 50° SE, gehen allmählig in schwarze Schiefer über, die petrographisch mit den Oxfordschiefern des «Grätli» übereinstimmen. Die Schiefer bilden die breite, schwach gewellte Gratlinie der Wasserscheide zwischen Grindelwald und Meiringen. Der öftere, allerdings unbedeutende Wechsel des Fallwinkels lässt vermuten, dass auch die Schiefer gefaltet sind und parallel gepresst wurden. Umbiegungen sind keine zu beobachten. Für mehrfache Lagerung durch Faltung spricht auch die bedeutende Mächtigkeit dieser Mergel (ca. 1600 m). Bei der Passhöhe der grossen Scheidegg 1961 m fallen die Schiefer 30° SE, weiter südlich gegen das Wetterhorn zu bilden sie nach dem von Baltzer gegebenen Profil[1]) einen kleinen Fächer, an welchen sich am Fuss des Wetterhorns die Eocänzone anschliesst.

Von der grossen Scheidegg über das Wetterhorn und das Unteraargebiet bis ins Oberwallis wurde das entsprechende Profil von Baltzer[2]) aus dem «Aarmassiv» eingesetzt.

Die Lagerungsverhältnisse am Westabhang des Gerstenhorns 2786 m, sowie im obern Teile des Giessbacheinschnittes, welcher sich gegen Süden zu dem grossen Cirkus von Tschingelfeld-Oberberg erweitert, lassen sich am besten von den gegenüberliegenden Höhen der Windegg aus übersehen. Fig. 8 gibt das thatsächlich Sichtbare.

---

[1]) A. Baltzer, Der mechanische Kontakt etc. Atlas Taf. V. Fig. 8.
[2]) A. Baltzer, Das mittlere Aarmassiv etc. Taf. 4. Prof. VI.

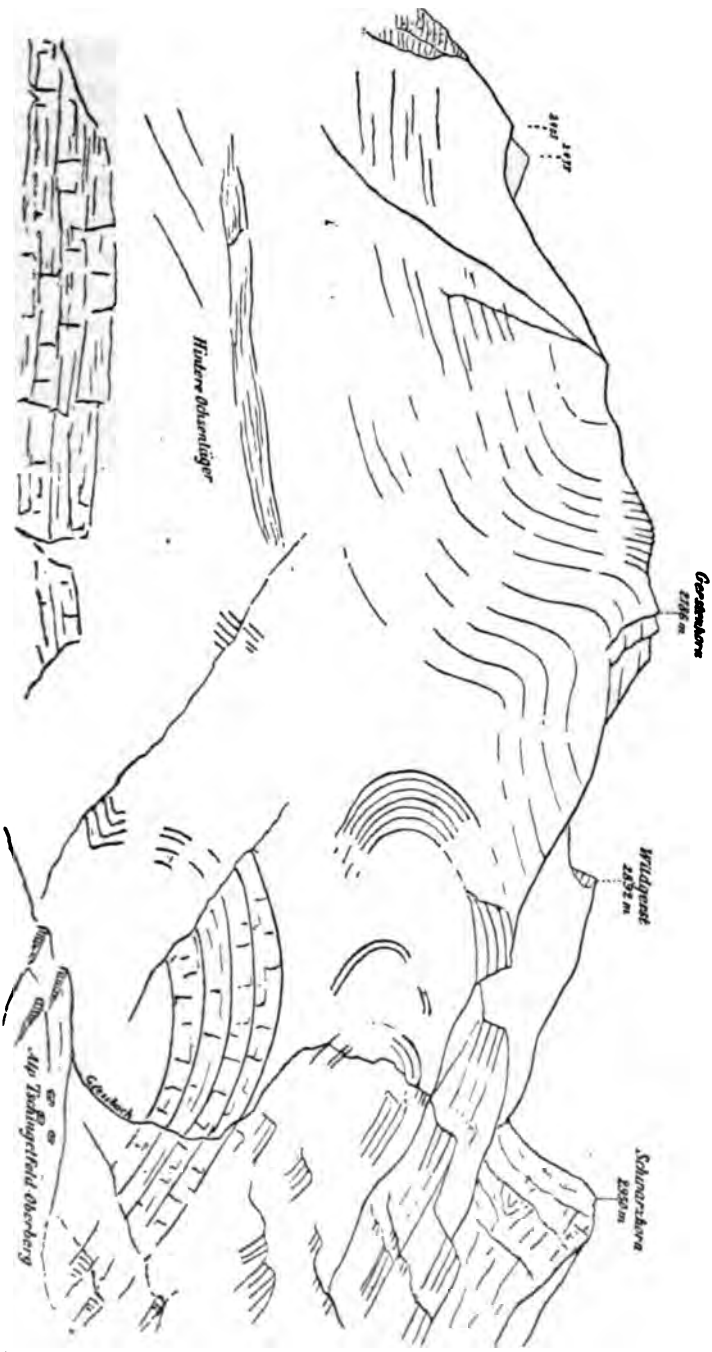


Fig. 8. Diskordanz der Faltung am Westabhang des Gerstenhorns 2786 m. Gez. von Windegg

Links ausserhalb der Zeichnung streicht der Malmzug des Axalphorns ins Giessbachthal hinab und ihm folgend die Oxfordschiefer des »Grätli«, das erste Sichtbare ist das bereits beschriebene Ebenfluhgewölbe und die darauffolgende Mulde. Anstatt der zahlreichen kleinen Biegungen, wie sie weiter östlich am Nordabsturz des Wildgerst vorherrschen, sehen wir hier zwei grössere Aufwölbungen mit zwischenliegender Mulde. Diese Thatsache lässt sich auch vom Wildgerst aus am Ostabhange des Gerstenhorns konstatieren. Insoweit wäre die Sache in Ordnung.

Unten im Thale des Giessbaches treffen wir einen Komplex dunkler Thonkalke und Schiefer, die landschaftlich stark hervortreten, weil sie dicke Bänke bilden. Diese Kalke stellen, um wieder im Norden anzufangen, den Kern des Ebenfluhgewölbes dar. Die an der Ebenfluh prachtvoll geschwungene Biegung ist hier eine Knickung, welche merkwürdigerweise die obgenannten Kalkbänke gar nicht mitzumachen scheinen, sondern einfach abbrechen, wie es Fig. 9 für die rechte und Fig. 10 für die linke Giessbachseite zeigt. Der Standpunkt ist für beide Zeichnungen der gleiche am Alpweg nach Tschingelfeld-Oberberg.

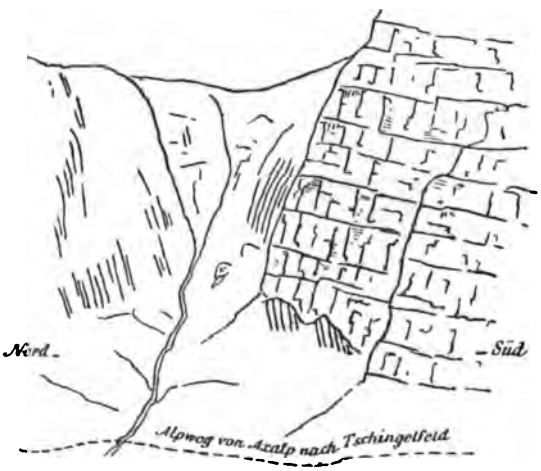


Fig. 9. Flexur im Dogger zwischen Axalp und Tschingelfeld. Rechte Thalseite.

Diese Bankkalke ziehen sich nun auf beiden Thalseiten unter schwachen wellenförmigen Aufwölbungen und Mulden hinein gegen den Kessel von Oberberg, biegen sich hier plötzlich auf und bilden ein flaches Gewölbe, über das der von Schwarzhorn und Wildgerst herabkommende Giessbach in zahlreichen Fällen hinunterstürzt. Südlich schiessen die Bänke unter die Zoophycoskalke der Hundsfluh ein. Man wäre nun geneigt, diese Aufwölbung mit derjenigen in Verbindung zu bringen, welche 700 m. höher am Gipfel des Gerstenhorns zu beobachten ist. Es tritt aber zwischen diesen obern und jenen untersten Schichten eine Komplikation ein, indem der untere Teil der Bandkalke nicht analog dem obern nach

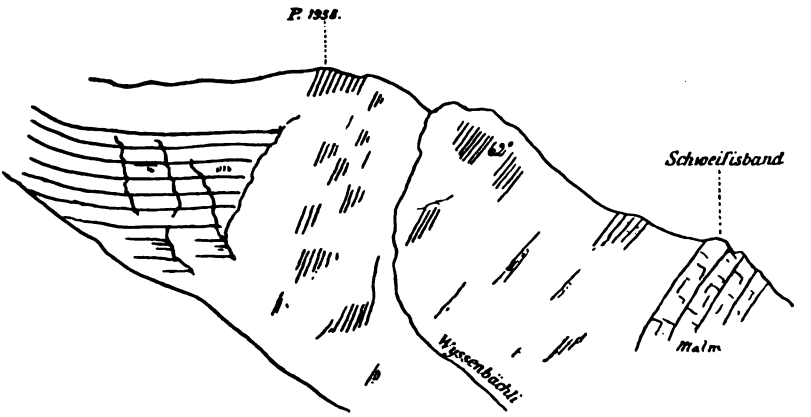


Fig. 10. Flexur im Dogger zwischen Tschingelfeld und Fangisalp. (Linke Thalseite.)

Nord hingeht, um die S-Falte mitzumachen, sondern sich gegen Süd zurückbiegt. Diese Umbiegung ist schön aufgeschlossen und Schritt für Schritt zu verfolgen in der Nähe der hintern Ochsenläger. Bemerkenswert ist eine sehr intensive Transversalschieferung von ca. 45° Südfall, die sich noch weit ins Gerstenhorn verfolgen lässt. Gerade die Stelle, wo die obere Hälfte der Bandkalke gegen Nord abbiegt und die untere nach Süd hin zurückkehrt, ist leider nicht entblösst. Ich glaubte zuerst, diese Unregelmässigkeit durch eine Aufbiegung im Streichen erklären zu können, aber eine nochmalige Untersuchung des Gerstenhorns und seiner Abhänge gegen Alp Oberberg, führte zur Überzeugung, dass die oberen Schichten den untern in ihrer Lagerung nicht entsprechen, sondern über diese hinweg für sich gestaut worden sind. (Fig. 8.)

Es bleibt uns noch übrig, die vereinzelten Beobachtungen zu notieren, welche das Gebiet östlich der Profillinie in der Umgebung des Axalphorns und weiter am Abhang der Faulhorngruppe gegen das Aarethal betreffen.

Die Berriaszone der obern Axalp teilt sich gegen Osten in zwei Züge, indem das Gewölbe, welches in unserem Profil die beiden Berriasmulden scheidet, wieder hervortritt und ob Alp Krautmättli ein scharfes Knie bildet. Man ersieht diese Verhältnisse aus Fig. 11 Gegen Alp Urserli keilt sich auch der obere Berriaszug aus und nur der untere streicht von Krautmättli zum Hinterburgsee, dessen Unterlage er bildet. Jenseits des Sees ist die Fortsetzung der Berriasschiefer mangels an Aufschlüssen nicht weiter zu verfolgen.

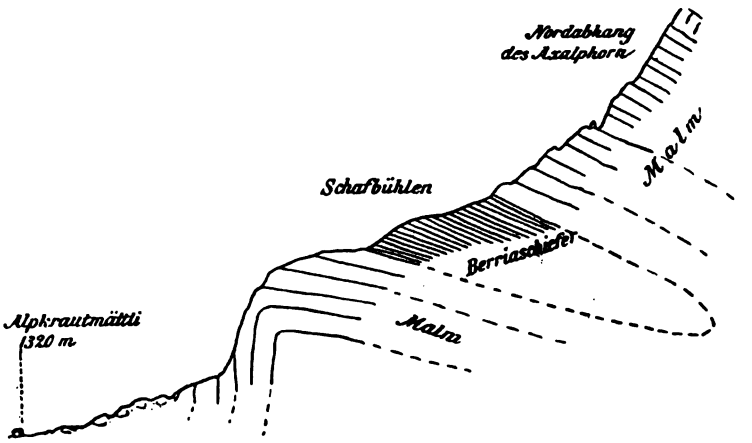


Fig. 11. Querprofil vom Axalphorn nach Alp Krautmättli.

Auch das grosse Malmgewölbe der Axalp findet sich hier wieder, und der Hinterburgsee selbst wird durch diese Welle resp. den Südschenkel des Gewölbes gestaut. In der Fluh zwischen «Dozwegegg» und «Gauwald» zeigt sich die Gewölbebiegung Fig. 12.

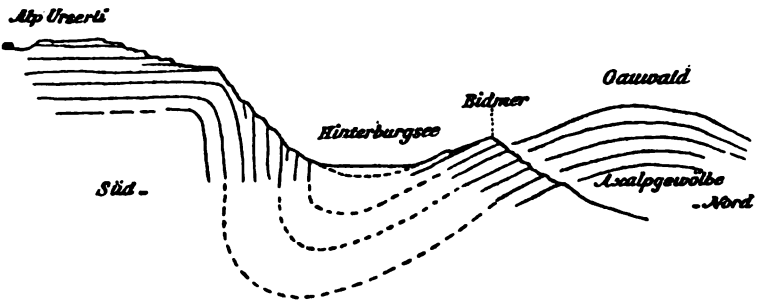


Fig. 12. Querprofil von Alp Urserli zum Hinterburgsee.

Nach Mœsch wäre das Gewölbe an der Riesetenfluh wieder zu sehen; für mich langte die Zeit nicht zu Begehungen im Gebiet des Brienzerberges und Birchthalwaldes, wodurch auch das weitere Verhalten der Oxfordüberschiebungen hätte verfolgt werden können.

Im Oltschikopf 2238 m. stossen das die Berriaszone teilende Gewölbe und der Malmzug des Axalphorns zusammen. Th. Studer hat bereits ein schematisiertes Profil dieses Berges gegeben. [1]) Fig. 13 gibt eine Ansicht des thatsächlich zu Beobachtenden.

[1]) Th. Studer, Geologische Beobachtungen im Gebiete des Schwarzhornmassivs.

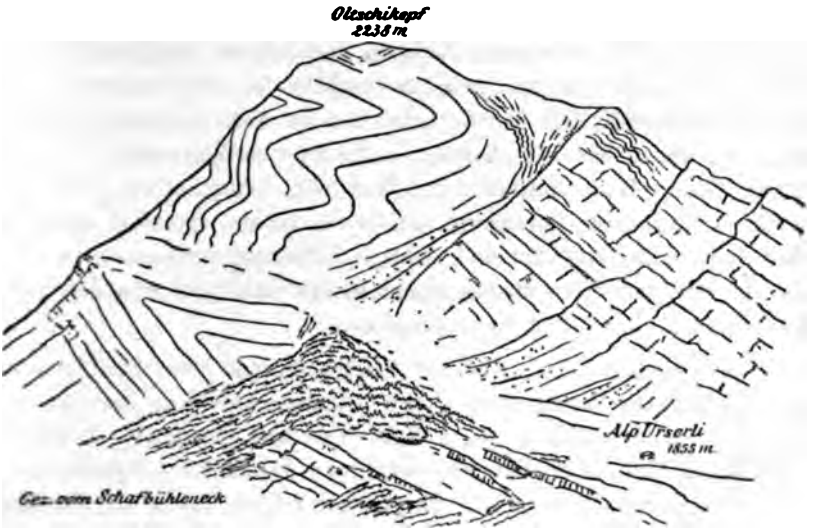


Fig. 13. Die Faltungen am Westabsturz des Oltschikopfes 2238 m.

Die Falten des Oltschikopfes fallen auch dem Laien sofort auf, und bei guter Abendbeleuchtung ist das Bild der an der Westwand entblössten übereinandergestauten Windungen wirklich grossartig. Auf dem schon mehrfach erwähnten kleinen Malmgewölbe Kühmatt-Krautmättli, welches hier als scharfes gegen Nord gerichtetes Knie stark hervortritt, erhebt sich der eigentliche Oltschikopf als ein System mannigfach gewundener, an- und übereinanderliegender Malmfalten, die hie und da Berriasmergel eingeklemmt haben. Aus letztern besteht auch der Gipfel. Es entspricht also dieser Faltenkomplex der letzten südlichen Berriasmulde und dem umgekehrten Malm des Axalphorns. Nur ist die Berriasmulde nicht mehr einfach. Allerdings keilt sich gegen Ost die südliche Berriasmulde aus, oder vielmehr ihre Fortsetzung in den Oltschikopf ist durch die Erosion des tiefen Kessels der Urserlialp verschwunden, so dass wir nur die untere Berriaszone durch den Hinterburgsee bis in den Oltschikopf verfolgen können. Jedenfalls hat sich vom Giessbach her die südliche Berriasmulde bedeutend gehoben, sodass im Kessel der Urserlialp bereits Malm den Muldenkern bildet und die Berriasmergel erst hoch oben am Oltschikopf sich eingeklemmt finden.

Auch von Osten, vom Aarethal herkommend, erweist sich der Oltschikopf sozusagen als ein Knotenpunkt. Um das zu verstehen, müssen wir die Lagerungsverhältnisse am Nord-Ost-Abhang der Faul-

horngruppe ins Auge fassen. Von einem günstigen Standpunkt, wie etwa von der Burgfluh beim Dörfchen Hochfluh auf dem Hasliberg bei Meiringen, lässt sich der gesamte Ostabfall der Faulhorngruppe sehr schön übersehen. Eine Schwierigkeit bei der Abstraktion der Tektonik liegt nur darin, dass das Aarethal nicht quer zum Streichen, sondern schief dazu eingeschnitten ist. Was wir sehen, sind weder die Schichtköpfe, noch ein Querprofil, sondern ein schiefer Anschnitt. Gerade deshalb ist es für eine richtige Erfassung durchaus notwendig, die an Ort und Stelle beobachteten Details mit dem aus der Ferne gewonnenen Gesamtbild zu kombinieren.

Das landschaftliche Bild der Faulhorngruppe vom Hasliberg aus wird beherrscht durch eine Anzahl langsam aus dem Aarethal aufsteigender und allmählig gegen Nord-West sich erhebender Terrassen, auf welchen erst die eigentlichen Gipfel, wie Wandelhorn, Tschingelhorn und Garzen, Gerstenhorn und Burghörner (Oltschikopf) sich erheben. Wir erkennen sogar ganz deutlich das mehrfach erwähnte Doggergewölbe der Ebenfluh, welches die Oltscherenalp bis auf den Staffel «Bühlen» hinunter in zwei parallele Terrassen scheidet Bei «Bühlen» ist die Umbiegung weg erodiert, sie findet sich aber wieder auf «Unter Wandelalp» und ist hier in den Felsbändern des Unter-Fluhwaldes schräg angeschnitten. Am Wege vom Mittelstaffel der Wandelalp zum Unterstaffel zeigt sich folgendes Profil (Fig. 14).

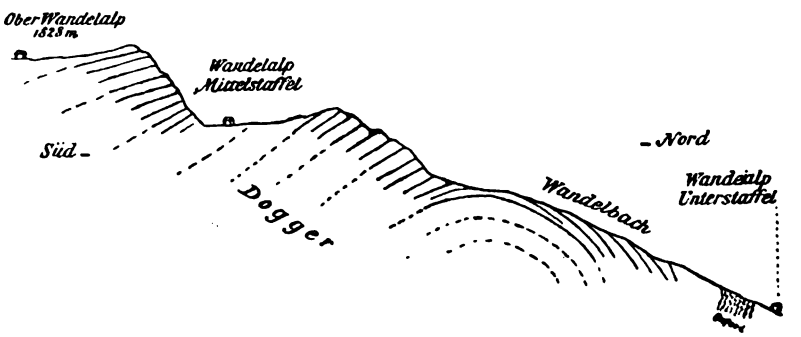


Fig. 14. Profil entlang dem Wandelbach von Wandelalp Oberstaffel bis Unterstaffel.

Dementsprechend lässt sich auch die Oxfordschieferzone des Grätli weiter nach Osten verfolgen. Zuerst in saigerer Stellung den eigentlichen Thalboden der Oltscherenalp bildend, schwenkt sie bei «Bühlen» ebenfalls nach Osten um und ist im Bachbett zwischen Wandelalp-Unterstaffel und der Terrasse von Isetwald aufgeschlossen (vergl. Fig. 14).

Die Schiefer fallen hier 45° SSE und sind sekundär gefaltet. Sie ziehen sich unter dem Dogger des Unterfluhwaldes gegen die Reichenbachfälle. Die Terrasse Iseltwald-Falcheren wird gebildet von Schichtflächen des Malm. In steilen Wänden stürzt derselbe ab gegen die Terrasse Schüttelboden-Prasti, die ebenfalls aus Malm besteht, wie zu einem grossen Teil noch die Terrasse Zaun-Hinterburg. Den untern Teil des letztern Fluhbandes bilden die durch Baltzer und Mœsch beschriebenen Oxfordschiefer von Unterheid. Wir haben also vom Wandelhorn bis hinunter ins Aarethal folgende Schichtserie:

Dogger,
Oxford,
Malm,
Oxford.

Die Verhältnisse bei Meiringen und ihre Deutung durch Baltzer[1]) zeigen uns, wie diese Aufeinanderfolge zu verstehen ist. Wir haben hier nichts anderes vor uns, als die nördliche Mulde der von Baltzer entdeckten Reichenbachdoppelfalte, nur ist das Eocän hier bereits nicht mehr vorhanden, sondern der Muldenkern besteht aus Malm. Ferner richtet sich diese Mulde derart auf, dass sie fast zum Gewölbe wird, ein Beispiel, dessen Analogon Heim[2]) an der Axenstrasse gefunden hat. Der ganze doppelt gelagerte Malmzug, der volle drei Terrassen und ihre Abstürze umfasst, streicht nun, begleitet von den zwei Oxfordzonen, in die Burghörner und den Oltschikopf, wo er die bereits beschriebenen Windungen bildet.

Wenn wir durch die Verhältnisse bei Meiringen gezwungen sind, den östlichen Teil der Faulhorngruppe als eine grosse liegende Mulde aufzufassen, so stimmt diese Auffassung nicht mehr vom Oltschikopf gegen Westen. Unser Profil lässt eine solche Deutung nicht zu. Eine Thatsache gilt für beide Gebiete, die umgekehrte Lagerung von Dogger, Oxford und Malm auf der Linie Sägisthal-Axalphorn-Oltscheren-Meiringen. Der Malm des Fluhbandes Falchern-Iseltwald entspricht in seiner tektonischen Stellung genau dem Malm Axalphorn-Schwabhorn, aber im Osten ist dieser Malmzug der obere Schenkel einer nach Nord gerichteten liegenden Eocänmulde, wobei er also gegen Nord von ältern Gebirgsgliedern umhüllt würde; am Axalphorn und weiter westlich aber erscheint er uns als oberer Schenkel einer südlich unter

[1]) A. Baltzer, Aarmassiv. Tafel III, Profil 1.

[2]) A. Heim, Geologie der Hochalpen zwischen Reuss und Rhein, pag. 61 ff.

den Dogger hinabtauchenden Kreidemulde, hat also seine Rolle gerade vertauscht. Dies bleibt uns vorläufig unverständlich, und es lässt sich deshalb über die Auffassung der Faulhorngruppe als Ganzes auch auf unserer Profillinie noch nichts sagen. Vielleicht liegt der Schlüssel dazu in den Verhältnissen der tiefeingeschnittenen Thäler von Grindelwald und Lauterbrunnen.

Fassen wir die Ergebnisse unserer Untersuchungen kurz zusammen, so finden wir, dass die gesammelten Thatsachen zu einer tektonischen Erklärung der ganzen Gruppe und zum Anschluss an die folgende Zone des Aarmassivs nicht reichen. Dennoch lassen sich eine Reihe allgemeiner, tektonischer Züge aus unserem Querschnitt herleiten.

Viel deutlicher als im Brienzergrat tritt uns hier überall die Nordrichtung des Seitenschubes entgegen. Die Falten sind, mit wenigen Ausnahmen, gegen Nord übergelegt und das stärkste Produkt des horizontal wirkenden Seitenschubes sind die Schuppen am Giessbach. Trotz dieser gemeinschaftlichen Nordrichtung der Falten sind die beiden Gebiete, das nördliche Malm-Kreide- und das südliche Doggergebiet in ihrem Faltenwurf sehr verschieden. Der Unterschied rührt aber nur her von der verhältnismässigen Steifheit des Malms, der stets grosse Wellen bildet und sich nicht gern im kleinen fältelt. Umgekehrt nähern sich die kleinern Falten des Doggergebietes mehr dem im Brienzergrat beobachteten Typus der Faltung entsprechend der grösseren petrographischen Verwandtschaft der gefalteten Gesteine. Immerhin bewirkt auch hier die grössere Intensität der Faltung gegenüber dem Brienzergrat eine stärkere Knickung der Falten und namentlich eine seltene Regelmässigkeit der Richtung. Der Schub war offenbar in der Faulhorngruppe stärker als im Brienzergrat. Dies ist zum Teil eine Nachwirkung des Aarmassivs, welche sich auch in der allgemeinen Abnahme der Faltungsintensität von Süden nach Norden wiederspiegelt.

Auch der vom Brienzergrat vielfach abweichende orographische Charakter hat zum Teil in der Petrographie, zum Teil in der Tektonik seine Begründung. Wir haben bereits die Neigung des Malms zu Fluhwänden und Terrassen erwähnt; wir haben gesehen, wie die weichen Oxfordschiefer zu isoklinalen Depressionen Veranlassung geben und wie im Gebiete des Doggers, trotz intensiver Faltung, eine gewisse Einförmigkeit in den Vordergrund tritt.

Der Einfluss der Tektonik markiert sich im allgemeinen in dem steilen Absturz der Faulhorngruppe gegen den Brienzersee und den flachern Gehängen der südlichen Abdachung, wo die Neigung fast mit der Schub-

richtung zusammenfällt. Allerdings spielt hier auch wieder der petrographische Charakter mit, denn ein so ausgedehnter Kessel, wie der von Grindelwald, konnte nur in weichem Dogger und Oxford erodiert werden.

IV. Das Gotthardmassiv.

Das Profil schneidet die westliche Fortsetzung des Gotthardmassives auf der Südseite des Gomserthales in einer Breite von 5 Km. Die mesozoische Urserenmulde, welche bei Ulrichen auf dem rechten Ufer der Rhone noch aufgeschlossen ist, ist bei Münster, wo unser Profil durchgeht, nicht sichtbar. Sericitschiefer und Gneisse bilden die Abhänge von Münster.

Am südlichen Gehänge des Oberwallis lassen uns eine Reihe tief eingeschnittener Querthäler den Bau und die Zusammensetzung des Gebirges erkennen. In der Nähe unserer Profillinie wurde das Blindenthal zur Untersuchung gewählt, weil es gangbar und tief eingeschnitten ist und sehr weit ins Gebirge hineinreicht. Als Profilkamm diente der fast mit der Projektionsebene zusammenfallende Bergrücken, welcher sich von Münster über Reiftalp, Stockhorn und Sädelhorn zum Merzenbachschien hinaufzieht. Die Beobachtungen auf diesem Kamm wurden sowohl in Bezug auf die Lagerung, als auf die Gesteinsarten mit denjenigen der rechten Seite des Blindenthals kombiniert, sofern sich nicht auf der nur kurzen Strecke in der Streichrichtung gewichtige Veränderungen ergaben.

Auf Blatt XVIII der geologischen Karte der Schweiz ist der ganze breite Streifen des westlich auskeilenden Gotthardmassives mit GnS bezeichnet. Leider gibt Gerlach im Text zu Blatt XVIII[1]) keine nähern Angaben über diesen Gneis supérieur, er beschreibt nur die ebenfalls mit GnS bezeichneten Gneissmassen von Lebendun, Ofenhorn-Monte-Leone und Monte Rosa. Aber näher als der Vergleich mit diesen liegt uns derjenige mit den Beobachtungen von Stapf.[2]) Fritsch[3]) und Baltzer[4]) im mittleren, von Heim und Schmidt im östlichen Gotthardmassiv.

[1]) H. Gerlach, Die Penninischen Alpen.

[2]) Stapf, Geolog. Profil durch den St. Gotthard etc.

[3]) v. Fritsch, Das Gotthardgebiet.

[4]) A. Baltzer, Das mittlere Aarmassiv samt einem Teil des Gotthardmassivs etc.

Die Kammlinie Münster-Sädelhorn bietet im allgemeinen günstige Aufschlüsse. Am dürftigsten sind sie am nördlichen Abfall gegen das Rhonethal. Die schwer zugänglichen Wände am Ausgang des Merzenbachtobels zeigen steil S E fallende Glimmerschiefer. Dann ist erst wieder beim Signal 2282 m. Anstehendes zu finden. Es sind 45°S 25°E einfallende sericitische und stark verwitterte Augengneisse zum Verwechseln ähnlich den Sericitaugengneissen des Trütztithales nördlich von Münster (Aarmassiv). Die Augengneisse halten an bis zu einem Punkte (ca. 2400 m.), von welchem man plötzlich das Stockhorn, den ganzen Grat bis zum Sädelhorn und den Nordabhang der Blindenhorngruppe übersieht. Es folgen nun Zweiglimmergneisse mit zahlreichen, oft bis 1 dm. dicken Quarzlagen; das Einfallen wechselt von 26 — 50°. Gegen den Gipfel des Stockhorns zu stellen sich wieder Augengneisse ein und am Stockhorn selbst 2635 m. fallen die Straten 37° gegen S S E.

Im Absteigen zu den Hochbachseen wird das Einfallen immer steiler; 75° S S E fallende granatführende Glimmerschiefer bilden den Riegel, welcher die Seen von dem Kessel der Hochbachalp trennt.

Von den Hochbachseen bis hinauf zum Sädelhorn herrscht ein gleichmässiges Einfallen von 70° S, 25° E. Das Gestein ist meist ein prachtvoller Augengneiss mit hühnereigrossen Feldspatkrystallen, die auf verwitterten Schichtflächen als Knoten hervorragen. Es lässt sich nun Schritt für Schritt verfolgen, wie diese Augen ausgezogen, resp. breitgedrückt werden, auf dem Querbruch linsenförmig langgestreckt erscheinen, auf der Schichtfläche hingegen grosse weisse Flatschen bilden. Ein weiteres Stadium ist die Ausquetschung zu eigentlichen parallelen Lagen, und das Extrem ist ein ganz dünnschiefriger Schlieren- oder Lagengneiss, den man kaum mit den normalen Augengneissen in Zusammenhang bringen würde, wenn sich nicht an Ort und Stelle der allmählige Übergang so schön beobachten liesse. Die ganze Schichtserie war wohl ursprünglich ein homogener, porphyrisch struierter Granit, der nun infolge der wechselnden Intensität des Druckes bald zu einem normalen Augengneiss, bald zu einem Lagengneiss geworden ist. Merkwürdig ist der Umstand, dass oft unveränderte Augengneisse direkt an dünnschiefrige Lagengneisse grenzen und alle Übergänge fehlen. Ob hier wirklich die Intensität des Druckes so wechselnd war, oder ob bereits die primären Gesteine strukturelle Verschiedenheiten besassen, ist heute schwer zu unterscheiden. Die Darstellung dieser Augengneisszone gibt Fig. 15.

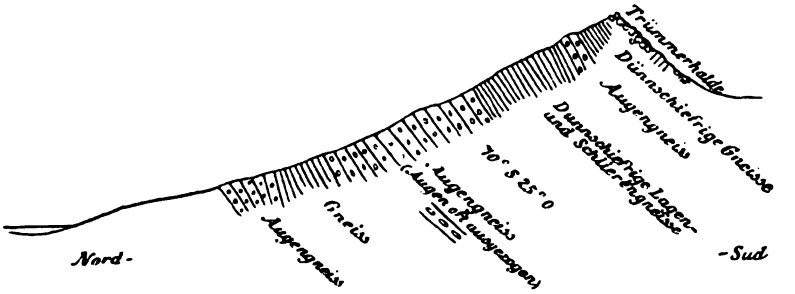


Fig. 15. Profil vom Hochbachsee zum Sädelhorn.

Der Gipfel und Grat des Sädelhorns 2813 m. bestehen aus einem Gewirr von Trümmern und Blöcken von Lagengneiss. Desgleichen der Abhang gegen den Hohlauibach. Allerdings glaubt man da und dort NW-Fallen zu beobachten, doch ist dies erst weiter unten im Tobel des Hohlauibaches sicher nachzuweisen.

Im Blindenthal lässt sich folgendes beobachten. Unter der Moräne, welche am Thalausgang zunächst das Anstehende verdeckt, finden wir 74° thaleinwärts fallende Glimmerschiefer, nach kurzer Unterbrechung ebenso mit 66° SSE-Fall. Es folgt ein biotitreicher Gneiss; der Hügel mit der Kapelle Staldenbühl besteht aber schon wieder aus 45° einfallendem Glimmerschiefer. In einem tief eingerissenen Seitentobel, ca. 250 m. oberhalb der Kapelle, stehen fast saigere Sericitschiefer mit weissen, seidenglänzenden Schichtflächen.

Vegetation und Schutt verdecken nun eine Strecke weit das Anstehende, bis an den Thalgehängen Fluhwände hervortreten, die gleich von Anfang an aus Augengneiss bestehen. Derselbe ist offenbar die Fortsetzung des oben bei Punkt 2232 m. beobachteten. Im weitern herrscht ein beständiger Wechsel von Gneiss und Augengneiss bis an die Grenze der Glanzschiefer hinten im Hohlauibach. Die Hauptvarietät des Gneisses ist ein zweiglimmeriger, feinkörniger, stark gestreckter Gneiss, welcher der Gneisszone oben am Nordabhang des Stockhorns und an diesem selbst entspricht. Von Einlagerungen ist eine dünne Zone von Amphibolit zu erwähnen.

Die Lagerung ist durchweg senkrecht. Unter den Wänden der rechten Thalseite, sowie namentlich auf dem Grat von Oberhohbach ist sehr schön zu beobachten, wie an der linken Thalseite die im Thale senkrecht stehenden Straten sich oben gegen N umlegen und jene Stellung annehmen, die wir an unserem Profilgrat beobachtet haben.

Der Kontakt des Gotthardmassives gegen die südlich folgende Glanzschieferzone bedarf noch der Erläuterung.

Die südliche Grenze des Gneisses wird von der Einsattelung zwischen Sädelhorn und Merzenbachschien weg bezeichnet durch das Tobel des Hohlauibaches. Die Kontaktverhältnisse werden durch Fig. 16 und 17 veranschaulicht. In letzterer Figur folgen sich die Profile von Ost nach West in der Richtung des Hohlauibaches. Das NW fallende Grenzgestein des Gotthardmassives ist ein hellgrauer,

Fig. 16. Kontakt von Glanzschieferzone und Gotthardmassiv zwischen Sädelhorn und Merzenbachschien.

schuppiger Sericitschiefer mit vielem, eigentümlich stäbchenförmigem Biotit. Das Gestein ist meist stark verwittert. Da das Tobel ein starkes Gefäll besitzt, so liegt natürlich jedes der folgenden Profile entsprechend tiefer als das vorhergehende, wie es die Zeichnung auch zur Darstellung bringt. Fig. 17.

Zwischen dem normalfallenden Gneiss des Gotthardmassives und dem Gros der Glanzschiefer findet sich also eine Zone ganz widersinnig einfallender Gneisse und Glanzschiefer, welch letztere lokal von normal liegenden Glanzschiefern überschoben sind. Diese Zone ist nur schmal und gut zu übersehen unten im Blindenthal gegenüber dem Ausgang des Hohlauibachtobels, etwa oberhalb der Hütten «beim Keller». Man beobachtet hier, dass nur eine ganz schmale südliche Randpartie der Gotthardgneisse gegen NNW einfällt, denn nur wenige Meter nördlich des Tobelausganges stehen die Gneissbänke normal senkrecht wie durch das ganze Blindenthal. Die gegenüberliegenden Glanzschiefer hingegen fallen 45° gegen SSE und stellen sich erst weiter südlich saiger, konkordant den Gneissen. Der Zusammenhang der im Tobel anstehenden NW fallenden Gneisse mit den senkrecht stehenden ist am Tobelausgang leider durch Vegetation verdeckt.

Die Verhältnisse zusammenfassend, haben wir also, vom Rhonethal ausgehend, zunächst eine Zone von Glimmerschiefer und Gneiss,

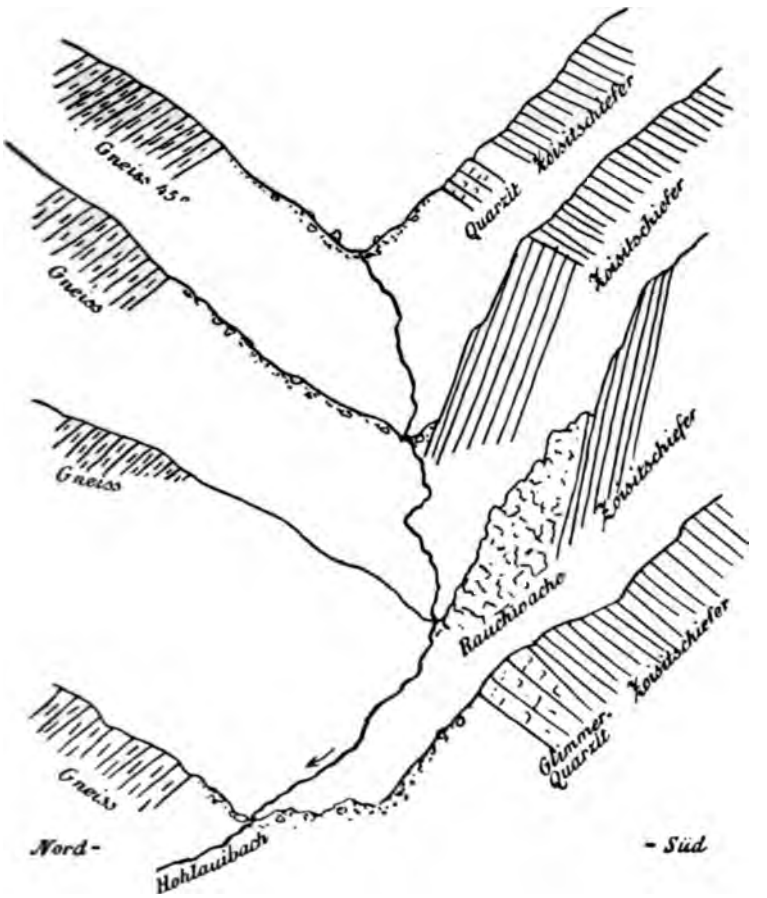


Fig. 17. Kontaktverhältnisse zwischen Gotthardmassiv und Glanzschieferzone im Tobel des Hohlauibaches.

die steil nach SSE einfallen. Auf dieselbe folgen, das ganze übrige Schichtsystem umfassend, ausgezeichnete Augengneisse mit Gneisslagen, welche zu einem grossen Teil, so namentlich in der südlichen Hälfte, augenscheinlich durch grösseren Druck aus den Augengneissen entstanden sind. Die Lagerung ist einfach, senkrecht im Thalgrunde und oben gegen N umbiegend. Ob die nördliche Glimmerschiefer- und Glimmergneisszone derjenigen des Gotthard entspricht (Gotthardgneiss B von Baltzer), ist unentschieden. Sie müsste im Streichen verfolgt werden. Jedenfalls ist aber unser Augengneiss nichts anderes als der Gotthardgneiss A von Baltzer (Sellagneiss von Stapf, Gamsbodengneiss von Fritsch).

Nur ist im Profil Hospenthal-Hospiz und mehr noch westlich am Gotthard die porphyrische Ausbildung die Ausnahme,[1]) *während sie hier die Regel ist. Unsere Augengneisse entsprechen vielleicht denjenigen, welche C. Schmidt aus der Gruppe des Piz Medel und Piz Vial im Ostflügel des Gotthardmassives beschreibt.*[2])

Endlich muss noch hervorgehoben werden, dass der Kontakt zwischen Gotthardmassiv und Glanzschieferzone Unregelmässigkeiten zeigt, die uns denselben als eine Bruchlinie auffassen lassen. Eine schmale Zone oder die ganze Glanzschieferzone ist eingesunken und hat dabei die angrenzenden Gotthardgneisse mitgerissen, so dass diese am Kontakt widersinnig einfallen.

V. Die Glanzschieferzone.

Das obere Rhonethal herauf zieht ein gewaltiger Komplex mehr oder weniger krystallinischer Schiefer von sehr verschiedenartigem Habitus, die nach einer weitverbreiteten Abart den Namen Glanzschiefer oder Schistes lustrés erhalten haben. Bei Grengiols teilt sich der Zug, indem von Osten her das Gotthardmassiv sich dazwischen schiebt. Die nördliche Zone verfolgt weiter das Rhonethal und findet ihre Fortsetzung in dem Muldenzuge Urseren-Tavetsch. Die Hauptmasse hingegen bildet südlich des Gotthardmassives eine breite Zone, welche durch das Binnenthal und das Blindenhorn hinüberstreicht zum Nufenenpass und über Val Bedretto, Val Canaria und Val Piora das Gebiet der Bündnerschiefer erreicht.

Lory, Bertrand und Gerlach halten die Glanzschiefer für triadisch, die italienischen Geologen erblicken darin Carbon, Heim und C. Schmidt halten nach ihren neuern Untersuchungen sich für berechtigt, die Hauptmasse der Glanzschiefer dem Lias zuzuzählen.

In unserem Querschnitt ist die Glanzschieferzone etwas über 5 Kilometer breit und umfasst die kulminierenden Punkte der Blindenhorngruppe im Merzenbachschien 3224 m., Blindenhorn 3384 m. und Hohsandhorn 3197 m.

Die Gesteine der Glanzschieferzone sind äusserst verschiedenartig. Wir vermögen in unserer Profillinie drei Abteilungen petrographisch und stratigraphisch auseinander zu halten. Eine erste, nörd-

[1]) A. Baltzer, Aarmassiv etc. p. 83.

[2]) Heim und Schmidt, Hochalpen zwischen Reuss und Rhein, Anhang pag. 26.

liche Gesteinsgruppe besteht aus schwarzen Glanzschiefern, Strahlsteinquarzit und hellen Kalkphylliten, Thonglimmerschiefern und Zoisitphylliten. Eine zweite Gruppe, die Mittelzone bildend, hat einen einförmigeren Charakter, es sind mehr oder weniger krystalline, hellgraue und glänzende Kalkglimmerschiefer. Ihre rote Verwitterungskruste gibt der Umgebung des Blindenhorns ein eigenes Gepräge und hat zu Namen wie Siedelrothorn und anderen Veranlassung gegeben. Die dritte, südliche Zone endlich ist charakterisiert durch das Vorkommen des bekannten zuckerkörnigen Binnenthaler Dolomites. In Form grosser Linsen ist er eingelagert in höchst heterogene, von Schritt zu Schritt wechselnde Gesteine, die zwischen Kalkphylliten, Glimmerschiefern und Gneissen schwanken und öfters durch Reichtum an Granat sich auszeichnen.

Die Glanzschieferzone bildet in unserem Profil einen Fächer. Südliches Einfallen von ca. 45° herrscht im Norden, senkrechte Stellung in der Mitte und nördliches Einfallen von ca. 65° im Süden. Damit steht allerdings der Muldenbau der Zone keineswegs fest, denn die symmetrische Anordnung der einzelnen Glieder fehlt; die Zone ist vielmehr ganz unsymmetrisch gebaut und beiderseits von Bruchlinien begrenzt.

Die eine dieser Bruchlinien, nämlich der Kontakt zwischen Gotthardmassiv und Glanzschieferzone, ist bereits berührt worden, und es bleibt noch übrig, die auf die Glanzschiefer bezüglichen Einzelheiten nachzutragen, wobei auf Fig. 16 und auf die Querprofile durch den Hohlauibach (Fig. 17) verwiesen wird.

Die Überschiebung der steilstehenden Zoisitphyllite durch ca. 45° S fallende Gesteine derselben Art (Fig. 17, III) lässt sich auch vom jenseitigen Gehänge des Blindenthals gut übersehen, da namentlich die gelben Quarzitbänke deutlich hervortreten und den Verlauf der Schichten von ferne erkennen lassen.

Von der Lücke zwischen Sädelhorn und Merzenbachschien haben wir ein fast ununterbrochenes Profil bis zu dem 3224 m. hohen Gipfel des letzteren. Die Verhältnisse der untern Hälfte stellt Fig. 16 dar; da wo das Einfallen plötzlich von NW nach S übergeht, liegt vielleicht auch eine Überschiebung vor wie im Hohlauibachtobel.

Die Zoisitphyllite sind ruppige, schwarze Schiefer, welche auf den Schichtflächen die bekannten Linsen und Stengel des gleichfalls schwarzen Zoisits enthalten.

Sie halten an bis auf den Grat des Merzenbachschien, sind aber unter der letzten grossen Felswand unterbrochen von einer zweiten Quarzitzone, die weiter westlich als von weitem sichtbare gelbe Wand den Grat selbst bildet. Der Merzenbachschien, 3224 m., besteht aus Zoisitphylliten, untermischt mit Kalkphylliten, welche ihrem Habitus nach den Übergang bilden zu den helleren Kalkphylliten des Blindenhorns. Quarzeinlagerungen sind häufig. Die Schichten des Grates sind stark gestaut und gefältelt.

Das Gemeinsame dieser ganzen nördlichen Zone besteht demnach in ihrer vorzugsweisen schwarzen Farbe, welche der Landschaft einen eigenartig düstern Charakter verleiht, zumal in dieser Höhe das Grün der Weiden fehlt. In dieser Zone wurden auch weiter östlich am Nufenen und am Scopi die Belemniten gefunden, aus denen man auf ein liasisches Alter dieser Ablagerungen geschlossen hat. Es ist mir trotz aller Mühe nicht gelungen, in den mächtigen Schutthalden am Merzenbachschien Fossilien aufzufinden.

Die ganze Mittelzone vom Sattel nördlich Punkt 3226 m. über das Blindenhorn bis hinunter ins Hohsandhorn besteht aus den ruppigen, stark glänzenden Kalkglimmerschiefern, wie sie typisch am Gipfel des Blindenhorns 3384 m. 62° N einfallen. In dem erwähnten Sattel stehen sie saiger. Südlich des Blindenhorns ist das Einfallen regelmässig ca. 65° N. Von Einlagerungen ist zu erwähnen ein Streifen dunkelgrüner Chloritschiefer am linken Ufer des Hohsandgletschers, südwestlich des Siedelrothorns.

Die südliche Zone der Glanzschiefer, die Gneiss-Dolomitzone, kommt aus dem Binnenthal über das Hohsandhorn in die südwestlichen Hänge des Siedelrothorns und nach Alp Bettelmatten. Ihre südliche Grenze, also die Grenze der Glanzschiefer überhaupt, liegt im Sattel südlich des Hohsandhorns, geht von da quer über den Hohsandgletscher nach Punkt 2931 m. Beim Neufelgiupass stossen die Glanzschiefer mit den Deveroschiefern zusammen, und beide erreichen gemeinsam das obere Val Formazza. Die Dolomitlager des Binnenthals bis zum Hohsandhorn, sowie östlich bei Bettelmatten und Morast hat Gerlach beschrieben. Es erübrigt uns der Nachweis der Verbindungsstücke. Die Dolomitlager bilden in meinem Untersuchungsgebiete stets langgestreckte Linsen, die konkordant, gewöhnlich saiger oder steil einfallend den Glanzschiefern eingelagert sind. Die grösste dieser Linsen bildet den Buckel «zum Stock, 2351 m.» auf Hohsand, zieht unter dem Siedelrothorn durch und verschwindet unter dem Firn. Das nächste Lager

treffen wir am Südabhang des Hohsandhorns, und endlich mögen noch zwei saigerstehende Lager an den Südwestgräten des Banhorns erwähnt werden. Die Lager fallen wegen der intensiv weissen Farbe des Gesteines inmitten der roten Glanzschieferlandschaft sehr in die Augen.

Die ausserordentlich mannigfaltigen Gesteine, welche die Dolomite begleiten, sind am schönsten aufgeschlossen an dem gut gangbaren Abhange vom Gipfel des Hohsandhorns hinunter nach der Lücke südöstlich desselben. Fig. 18 gibt das Profil.

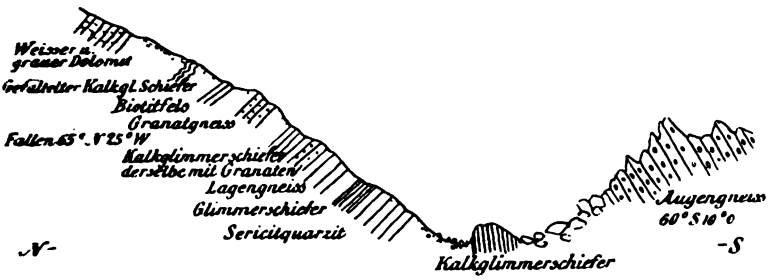


Fig. 18. Die Glanzschiefer am Südabhang des Hohsandhorns und der Kontakt gegen die Ofenhorngneissmasse.

Damit ist aber die Mannigfaltigkeit der Gesteine der Glanzschieferzone bei weitem noch nicht erschöpft. Die Moräne des Hohsandgletschers einerseits, wie auf der Nordseite diejenige des Blindengletschers, bieten noch eine grosse Anzahl der verschiedensten Typen, deren Beschreibung hier zu weit führen würde.

Was die Tektonik der Glanzschieferzone anbetrifft, so ist bemerkenswert, dass sich unser Durchschnitt nicht wohl den weiter westlich und östlich geltenden Anschauungen anschmiegt. Gerlach fasst in einem Profil, das er 12 Km. weiter westlich durchgelegt hat[1]), die Glanzschieferzone als Mulde auf. Die beiderseitige Einfassung der Glanzschiefer durch Dolomit scheint ihn dazu bewogen zu haben. Ob auch Konkordanz gegen das angrenzende Gotthardmassiv und die Ofenhorngneissmasse besteht, ist aus seinem Profil nicht zu ersehen.

Ebenso wird weiter östlich die Glanzschieferzone im Val Bedretto ebenfalls als Mulde betrachtet.[2]) Und nun unser Querschnitt. Die Scheidung der Gesteine in drei Zonen und deren einseitige Lagerung lässt von vornherein eine Mulde als unwahrscheinlich erscheinen. Zwar haben wir auch die Rauchwacke an der Nordgrenze (Fig. 17. III.

[1]) H. Gerlach, Penninische Alpen. Taf. I. Prof. I.

[2]) Fritsch, Stapf, Grubenmann etc. etc.

aber sie fehlt am Südrand; dafür sind die Dolomite da. Die Zoisitphyllitzone wiederholt sich nicht, und es ist mehr als fraglich, ob die Gesteine am Südabhang des Hohsandhorns nur die stärker metamorphisierten Äquivalente der liasischen Zoitphyllite und schwarzen Schiefer seien. Ein anderer Grund, der gegen den Muldenbau spricht, liegt in den Kontaktverhältnissen am Nord- und Südrand. Der Nordrand ist auf und in der Nähe der Profillinie eine deutliche Bruchlinie, was aus den Detaildarstellungen ohne weiteres hervorgeht, ebenso erweist sich der Südrand gegen die Ofenhorngneissmasse als eine solche (Fig. 18), die bereits von B. Studer,[1]) Lory und Diener[2]) so gedeutet wurde. Unser Profil würde also mehr der von Lory und Bonney[3]) vertretenen Anschauung, einer zwischen Brüchen eingeklemmten Grabenversenkung entsprechen.

Ein Ueberblick des Querschnittes der Glanzschieferzone auf unserem Profil zeigt also zunächst die Aufeinanderfolge von drei petrographisch verschiedenen Zonen. Es sind, im N angefangen, schwarze Schiefer und Zoisitphyllite, deren jurassisches Alter am Nufenenpass nachgewiesen wurde. Es folgt eine mächtige Mittelzone rot anwitternder Kalkglimmerschiefer, die gegen S allmählig übergehen in die dritte Zone der Gneisse und Glimmerschiefer mit Einlagerungen von Binnenthaler Dolomit am Südabhang des Hohsandhorns. Zur Altersbestimmung der Gesteine vermag unser Querschnitt nichts beizutragen, indem sogar die nördliche Zone hier anscheinend petrefaktenleer ist. Tektonisch stellt die Glanzschieferzone sich dar als ein entlang Verwerfungen eingebrochener Streifen jüngerer Gesteine, wie es Lory und Bonney annehmen. Der für die Verhältnisse weiter westlich und östlich angenommenen Auffassung als Mulde widerspricht die Anordnung der drei Zonen, sowie die Begrenzung durch unzweifelhafte Bruchlinien am Nord- und Südrand.

VI. Die Binnenthal- und Monte-Leonegneissmasse.

Mit diesem Namen belegte Gerlach[4]) eine Gneissmasse, die östlich am Ofenhorn beginnend, über Albrunhorn, Helsenhorn und das Binnenthal südwestlich zum Monte Leone hin verläuft. Ihre

[1]) Studer, Geologie der Schweiz, I. pag. 223.

[2]) Diener, Westalpen, pag. 103.

[3]) Bonney. On the crystalline schists and their relation to mesozoic rocks in the Lepontine Alps.

[4]) Gerlach, Penninische Alpen, pag. 113 u. ff.

Lagerung im Binnenthal ist nach demselben Forscher derart, dass an ihrer Nordgrenze die Gneisse steil südlich, weiterhin dann flach und an ihrem Südrande flach nördlich einfallen. Unser Profil, welches diese Gneissmasse nahe ihrem östlichen Ende durchschneidet, spiegelt die von Gerlach angegebenen Verhältnisse wieder. Über die Einzelheiten in der Lagerungsweise und der petrographischen Ausbildung auf unserer Profillinie ist folgendes zu sagen.

Der Ofenhorngneiss, wie wir der Kürze halber diesen Gneiss benennen wollen, fällt schon orographisch sehr in die Augen. Durch das Herumwandern in der Glanzschieferzone daran gewöhnt, immer nur rote und schwarze Felsen zu sehen, ist man plötzlich erstaunt, wenn man schon von weitem ein helles, weisses Gestein an die rostbraunen Kalkglimmerschiefer grenzen sieht. Oben im Firnfeld des Hohsandgletschers stehend, sehen wir rechts und links der Firnmulde den Kontakt der weissen Gneisse mit den roten Glanzschiefern des Hohsandhorns und Banhorns. Von demselben Standpunkte aus glaubt man auch vollkommene Konkordanz der beiden Bildungen zu beobachten, indem an dem zerhackten Grat, welcher vom Hohsandhorn zum Ofenhorn hinüberführt, steiles Nordfallen zu herrschen scheint, wenigstens richten all die zahllosen Spitzen des Grates sich gegen S in die Luft. Um so mehr ist man erstaunt, bei der Untersuchung an Ort und Stelle zu sehen, dass die Schieferung beinahe senkrecht auf dieser N fallenden Absonderung steht, dass also der Gneiss am Kontakt mit 60° nach S 10° E einfällt (Fig. 18). Das Gestein ist ein prachtvoller zweiglimmeriger Augengneiss, der, nach der weissen Farbe der Felsen zu schliessen, den ganzen Grat bis zum Hohsandhorn bildet und erst jenseits von den dunklen Glimmerschiefern des Ofenhorns überlagert wird. Das Ofenhorn, 2342 m., konnte leider infolge ungünstiger Schneeverhältnisse nicht erstiegen werden.

Die Felsen bei Punkt 2781 m.[1]) bestehen aus einem dunkeln Glimmerschiefer, der mit 40° nach S 25° E einfällt. Der Färbung nach zu schliessen, scheint das ganze Ofenhorn aus demselben zu bestehen, ausgenommen der Ostgrat, wo sich wieder weisse Augengneisse einschieben. Die untern Partien aber, sowie der Westgrat, der das Becken des kleinen Fornogletschers vom Hohsandgletscher trennt, bestehen ganz aus dem weissen Augengneiss. Er findet sich auch jenseits der Gletscherzunge, die vom Hohsandfirn gegen den Lago Sruer hinabreicht, an dem westlichen Ausläufer des Banhorns. Die Felsen bei Punkt

[1]) Die Angaben beziehen sich auf Blatt 494. (Binnenthal) des S. A.

2710 m. bieten ein schönes Profil der mannigfaltigsten Gesteinsarten an der Grenze zwischen Glanzschiefer und Augengneiss. Der ganze Komplex fällt mit 25° gegen SW. Erwähnenswert ist hier die völlige Konkordanz der Augengneisse und Glanzschiefer.

Vom Ofenhorn zieht sich gegen S und SE ein Grat, der die Lebendunalpen von dem Kessel der Fornoalp scheidet. In Verbindung stehen diese beiden ausgedehnten Alpweidengebiete durch die Einsattelung des Scatta Minojo, 2597 m. Der Grat ist ausserordentlich zerhackt, eine Menge weisser Zacken und Spitzen ragen ruinenhaft in die Luft. Öfters unterbrechen Einsattelungen, wovon die Scatta Minojo die tiefgehendste ist, den scharfen Kamm. Die zackigen, ruinenhaften Verwitterungsformen sind aber streng an das weisse Gestein gebunden, in dem wir unsern Augengneiss wieder erkennen. Gleichsam als eine gewaltige Mauer erheben sich diese spärlichen Überreste einer früheren Gneissdecke auf den fast horizontal liegenden Deveroschiefern, welche im Gebiete der Forno-, Lebendun- und Businalpen auf weite Strecken entblösst sind und sich durch gute Weidegründe und eine Unmasse kleinerer und grösserer Seen auszeichnen. Der Aufstieg zur Passhöhe der Scatta Minojo und noch weiter auf einen der nächsten Felszacken gibt uns ein vollständiges Profil der untern Hälfte der Ofenhorngneissmasse. Fig. 19.

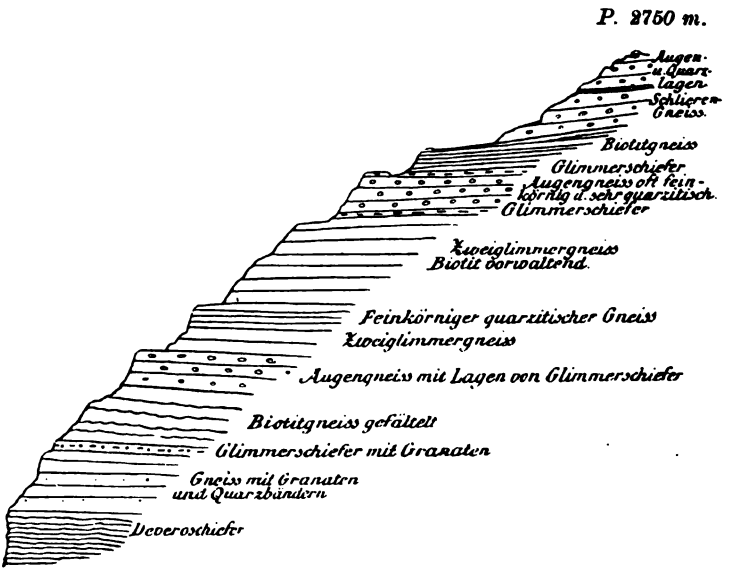


Fig. 19. Profil durch den obern Gneiss (Binnenthal-Monte-Leone-Gneissmasse) am Passe Scatta Minojo.

Die Hauptmasse der ganzen Schichtserie bildet im Liegenden ein typischer, stark linear gestreckter Zweiglimmergneiss, in höherem Niveau der bereits vom Hohsandhorn bekannte Augengneiss.

Die Ofenhorn- oder Monte-Leone-Binnenthalgneissmasse stellt sich nach den vorliegenden Untersuchungen dar als eine ziemlich flache Mulde, die im Norden mit einer Bruchlinie an die Glanzschieferzone anstösst, am Ostende derselben konkordant liegt und im Süden die Dereroschiefer normal überlagert. Das Gestein ist in der untern Hälfte vorwiegend ein Augengneiss, oben treten am Ofenhorn dunkle Glimmerschiefer auf.

An der untern Grenze, gegen die Dereroschiefer, weicht die Einförmigkeit der Augengneisse einem bemerkenswerten Wechsel mehr regelmässig feinkörniger Gneisse, die stellenweise Granat enthalten. Ob und wie die Ofenhorngneissmasse sich in die Tiefe fortsetzt, oder ob unter ihr durch die Dereroschiefer mit den Glanzschiefern zu verbinden seien, liess sich auf unserer Profillinie nicht weiter untersuchen.

VII. Das Antigoriogewölbe.

Es ist zwar gewagt, nach den neuesten Untersuchungen von H. Schardt[1]) noch von einem Antigorio- oder Simplongewölbe zu reden, aber es ist schwer für die bisher damit bezeichnete Gegend einen zusammenfassenden Ausdruck zu finden. So behalten wir den alten Namen bei, ohne damit die Gewölbenatur des Antigoriogneisses und ihre Konsequenzen präjudizieren zu wollen.

Für die Entscheidung der Frage, ob der Antigoriogneiss ein Glied eines regelmässigen Gewölbes oder aber eine überschobene Masse sei, vermag unser Profil leider nichts beizutragen, indem der tiefste Aufschluss (bei Foppiano im Val Antigorio) nicht bis auf das Liegende des Antigoriogneisses hinabreicht.

Insofern wäre auf unserem Querschnitt die Gewölbestruktur vollkommen, und eine Schwierigkeit nur am Kontakt gegen die Glanzschiefer. Das in unserem Durchschnitt normal aufrechte Gewölbe wird gegen NW zu einem nördlich überliegenden.

Das Formazzathal oder obere Val Antigorio ist in unserem Durchschnitt fast genau auf dem Gewölbescheitel eingeschnitten, so dass

[1]) H. Schardt. Gneiss d'Antigorio. Archiv des scienc. phys. et nat. Décembre 1893.

im allgemeinen das Einfallen auf der rechten Thalseite ein nordwestliches ist.

Es zeigt der Nordwestflügel von oben nach unten folgende Schichtfolge:

Oberer Gneiss (Ofenhorngneiss),
Deveroschiefer,
Lebendungneiss,
Deveroschiefer,
Antigoriogneiss.

Der südöstliche Flügel zeigt dieselbe Zusammensetzung, nur mit dem Unterschied, dass infolge Fehlens der Lebendungneissmasse die Deveroschieferzone einheitlich ist.

Das oberste Glied der Schichtserie des nordwestlichen oder kurzweg Westflügels, nämlich der obere (Ofenhorn-)Gneiss, ist bereits Gegenstand der Betrachtung gewesen. Wir kommen nun an die Deveroschiefer. Eine Darstellung der geographischen Verbreitung und petrographischen Ausbildung dieser Gesteinszone gab bereits Gerlach,[1]) so dass wir uns auf die Verhältnisse auf und neben der Profillinie beschränken können.

Die Deveroschiefer unterlagern direkt den Augengneiss der Monte-Leone-Binnenthalgneissmasse. Die Auflagerungsfläche ist eine schwache (ca. 10°) NW fallende Ebene. Der grösste Teil der ausgedehnten Lebendun- und Businalpen liegt in den Deveroschiefern; überall treten die fast horizontalen Schichtbänder hervor.

An dem Passe Scatta Minojo, dessen Profil wir z. Teil schon kennen, beginnen die Deveroschiefer unter der Gneissdecke als rostbraun verwitternde, ruppige Kalkglimmerschiefer. Diesen einförmigen Habitus beibehaltend, ziehen sie sich über Passo Busin, 2495 m., hinüber nach Businalp. Hier ist nicht weit oberhalb des Sees ein ca. 3 m. mächtiges Lager von weissem, grobkörnig-krystallinischem Kalk. Sein Liegendes sind dunkle, zwei Glimmer führende Glimmerschiefer, die bald wieder in die ruppigen Kalkglimmerschiefer übergehen. Das Einfallen ist 10° nach NW.

Den schönsten Durchschnitt der ganzen Schichtserie von den Deveroschiefern der Businalp bis tief in den Antigoriogneiss gibt das Thal des Rio Vova, des Ausflusses des Lago Busin. Das Thal ist ein grossartiger Circus, der sich hoch über der Thalsohle des Val Antigorio erst öffnet, wie das in dieser Gegend und im Tessin die Regel ist.

[1]) H. Gerlach, Penninische Alpen, pag. 95 u. ff.

Nicht weit vom Südende des Lago Busin, 2371 m., beginnt der Absturz, über den ein schmaler Pfad nach Alpe Giove hinabführt. Zunächst ist man noch in den Deveroschiefern, bald aber betritt man einen weissen Gneiss, der als schmales Band von der Punta di Tanzonia herkommt und dabei an Mächtigkeit allmählig zunimmt. In unserem Profil mag sie ungefähr 250 m. betragen. Wegen seiner charakteristischen Entwickelung in der Lebendunschlucht wurde dieses Gestein von Gerlach Lebendungneiss genannt.[1]) Die Terrasse der Alp Giove gehört noch diesen Gneissen an. Er liegt horizontal oder fällt schwach nördlich.

Der zweite Absturz, unterhalb Giove, wird nun wieder durch Deveroschiefer gebildet, die in ihrem ruppigen Habitus mit den Kalkglimmerschiefern der obern Zone übereinstimmen. Sehr verbreitet ist hier ein äusserst zähes, schlackig aussehendes Gestein, das im Dünnschliff neben Muscovit eine schwarze Grundmasse zeigt, welche aus Feldspat, Calcit, Muscovit und Biotit sich zusammensetzt, Quarz fehlt. Die schwarze Farbe rührt von zahlreichem, fein verteiltem Eisenerz her. Diese Schiefer sind auch wieder ca. 250 m. mächtig, und halten an bis auf ca. 1850 m. An ihrer untern Grenze sind die bereits von Gerlach auf der Karte angegebenen Marmorlager infolge ihrer weissen Farbe von weitem sichtbar. Gleich darunter tritt der Antigoriogneiss mit bauchig-gerundeten Oberflächenformen aus dem nun flacher werdenden Gehänge hervor.

Diese eigentümliche Oberflächengestaltung charakterisiert den Antigoriogneiss und beherrscht das landschaftliche Bild. Es hat diese Gneissmasse, trotz ausgezeichneter Schieferung, orographisch exquisit massigen Habitus. Die Parallelstruktur des Gesteins scheint keinen Einfluss auf die Verwitterungsformen auszuüben, wie wir es sonst bei krystallinen Schiefern zu sehen gewohnt sind. Es mögen die bauchigen Formen zum Teil auf Gletscherwirkung zurückzuführen sein.

Die Seitengehänge, sowie die Thalsohle des Circus des Rio Vova sind unterhalb der beschriebenen Abstürze überall mit Schutt bedeckt; den anstehenden Antigoriogneiss findet man erst wieder unterhalb des Dörfchens San Antonio. Er fällt hier schwach nördlich.

Bevor wir den Ostflügel des Antigoriogewölbes betrachten, müssen wir noch auf den Gebirgsstock der Cima Rossa einen Blick werfen. Die Cima Rossa sollte zuerst in das Profil mit einbezogen werden, die nachstehenden Erörterungen werden ergeben, warum davon Umgang

[1]) H. Gerlach, Penninische Alpen, pag. 113.

genommen worden ist. Begrenzt vom Formazzathal, den Lebendun- und Businalpen und dem Thal des Rio Vova erhebt sich dieser mächtige Stock bis zur Höhe von 3010 m. Zwei Spitzen entstreben dem gewaltigen Unterbau, der nördliche Clog Stafel 2965 m. und der Monte Giove 3010 m., auf welch letzteren sich wohl auch der ältere Name Cima Rossa bezieht (Dufourblatt XVIII). Die geologischen Verhältnisse dieses Berges erscheinen auf den ersten Blick abnorm. Die senkrechten Abstürze gegen die Lebendunschlucht und das Formazzathal zeigen von unten bis oben eine weisse Gneissmasse. Nur zu oberst liegt eine Decke von roten Deveroschiefern, daher der Name Cima Rossa. Im Ferneren sehen wir vom Gipfel des Clog Stafel die roten Schiefer schräg gegen die Lebendunalpen hinabsteigen und sich dort mit der Deveroschiefermasse der Lebendunalpen vereinigen. Die Scharte zwischen Clog Stafel und Monte Giove ist bis in den liegenden Gneiss eingeschnitten. Der Monte Giove trägt eine ganz isolierte Kappe von Deveroschiefern. Von Businalp gegen den Monte Giove ansteigend, ist man in Deveroschiefern. Diese halten an, beginnen aber immer steiler gegen SW einzufallen, sie biegen sich also in der Streichrichtung der ganzen Zone gegen NO auf. Sie bilden noch eine Strecke weit den Grat, der sich von der oben erwähnten Scharte zum Hauptgipfel hinauf zieht, dann erscheint ganz konkordant der Gneiss. Dieser Gneiss ist die Fortsetzung des Lebendungneissstreifens, den wir im Profil des Rio Vova angetroffen haben. Die Kontaktlinie ist vielfach gefältelt. Fig. 20.

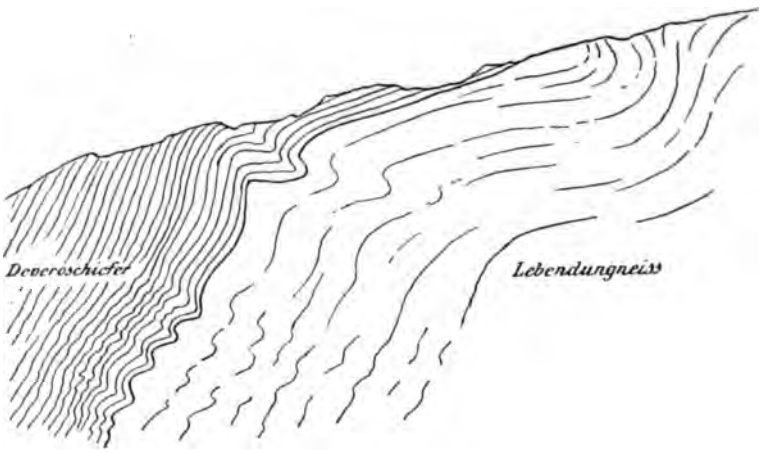


Fig. 20. Kontakt von Deveroschiefer und Lebendungneiss am Westgrat des Monte Giove 3010 m.

Das Massiv des Monte Giove ist also nichts anderes als eine ungeheure Anschwellung jener Gneisszone, die im Profil des Rio Vova ca. 250 m. Mächtigkeit besitzt.

Am Gipfel des Monte Giove zeigt der Gneiss flaches Südfallen, auf dem gegenüberliegenden Nackberg, bei ca. 2400 m. Höhe, flaches NW-Fallen. Das benachbarte Fregeilihorn, 2723 m., trägt, wie der Monte Giove, eine Kappe von Deveroschiefern.

Der petrographische Charakter des Lebendungneisses ist zweierlei Art; er ist entweder ein typischer Zweiglimmergneiss, der im Handstück von gewissen Antigoriogneissen nicht zu unterscheiden ist, oder aber er ist mehr granitisch mit sehr wenig dunklem Glimmer, an Aplite erinnernd. Die aplitische Facies wie der echte Gneiss kommen nebeneinander vor in der Nackberg - Fregeilihorngruppe sowohl, wie am Westabhang des Monte Giove. An letzterem Ort enthält er schwarze Einschlüsse eines ruppig-schlackigen Gesteins, das aus Biotit, Quarz und Calcit besteht und deutlich parallel struiert ist. Man kann sich fragen, ob es nicht Einschlüsse von Deveroschiefern seien, die beim Heraufquellen dieser grossen lagerartigen Masse mitgeschleppt wurden.

Bevor wir zum Ostflügel unseres Gewölbes übergehen, müssen wir noch mit einigen Worten der jüngst erschienenen geologischen Monographie des Val Ossola von Stefano Traverso [1]) gedenken, welche dieses Gebiet auch behandelt. Traverso gibt eine geologische Karte des Ossola, die bis zur Schweizergrenze reicht. Seine Schichtserie ist von Antigoriogneiss aufwärts gehend folgende:

Gneiss granitoide
Calcescisto gneissico
Gneiss scistoso
Gneiss biotitico ferruginoso.

Sein Gneiss granitoide entspricht unserem Antigoriogneiss, und da dieser sehr scharf abgegrenzt ist, so stimmt das Verbreitungsgebiet desselben mit der Gerlach'chen Karte (Dufour XVIII) überein. Der Calcescisto gneissico entspricht den Deveroschiefern und er ist im Westen im Gebiet der Alpen di Veglia und Devero richtig eingetragen; auch der Deveroschieferzug am Südfuss des Monte Giove und im Formazza stimmt mit den Gerlach'schen Aufnahmen und meinen Beobachtungen. Das ganze Obergestell des Monte Giove aber und das ausgedehnte Ge-

[1]) Stefano Traverso. Geologia dell'Ossola. Con 11 tavole e una carta geologica. Genova 1895.

biet der Lebendun- und Businalpen sehen wir nur mit einer einzigen Farbe des Gneiss scistoso bezeichnet. Nach dem Profil von Traverso Tafel VIII, Fig. 2 und dem darauf bezogenen Text pag. 211 ist als Gneiss scistoso zunächst die Lebendungneisszone gemeint, welche den Tosafall bildet und im Thal des Toce bei Riale von der obern Hälfte der Deveroschiefer überlagert wird. Dass aber eben diese obern Deveroschiefer, welche Traverso oberhalb Riale als Gneiss biotitico ferruginoso angibt, eben im Gebiet jener oben erwähnten Alpen ebenso verbreitet sind wie drüben bei Devero und sich schon landschaftlich von den weissen Gneissmassen des liegenden Lebendungneisses und des hangenden Binnenthal-Monte-Leonegneisses unterscheiden, scheint Traverso entgangen zu sein. Er wirft hier Lebendungneiss, Deveroschiefer und oberen Gneiss zusammen. Die Darstellung der Verbreitung dieser verschiedenen Horizonte auf der geologischen Karte der Schweiz Blatt XVIII entspricht weit besser den thatsächlichen Verhältnissen. Die Hauptmasse der Deveroschiefer ist übrigens ein echter Kalkglimmerschiefer, der allerdings da und dort etwas Feldspat enthält, aber doch nicht als Gneiss bezeichnet werden sollte, nicht als Gneiss biotitico ferruginoso und noch weniger als Gneiss scistoso, welcher Ausdruck für den Lebendungneiss und auch für diesen nur teilweise passt, da derselbe bekanntlich [1]) in der Lebendunschlucht ganz granitisch entwickelt ist.

Der Ostflügel unseres Gewölbes auf der linken Seite des Val Formazza oder Antigorio verrät durch kein Anzeichen eine östliche Fortsetzung der Lebendungneissmasse; wir haben einfach den Antigoriogneiss als Gewölbekern und die Deveroschieferdecke. Das Formazzathal oder Val Antigorio, wie es von hier weg heisst, ist in der Profillinie etwas westlich des Gewölbescheitels eingeschnitten. Die Gneissstraten fallen bei Punt Geschen auf der linken Thalseite noch 18° NW und erst weiter oben legen sie sich horizontal. In der Gipfelregion des Sonnenhorns ist das Einfallen durchschnittlich 20° SE.

Von Foppiano (Unterwald) im Val Antigorio verfolgt die Profillinie den Grat, der sich in SE-Richtung zur Gipfelgruppe der Corona di Groppo und des Sonnenhorns hinauf zieht. Entlang dem Einschnitte des Rio di Cramek und über die Alp gleichen Namens ist dem sehr zerklüfteten Grate unschwer beizukommen. Zugleich bietet das Bachbett des Rio di Cramek mannigfache Aufschlüsse im Antigoriogneiss

[1]) H. Gerlach, Penninische Alpen pag. 113.

der stets als typischer Zweiglimmergneiss in glimmerarmen und daran reichen Lagen abwechselt. Bei dem Staffel la Sah ist er als Augengneiss entwickelt. Das Einfallen wechselt fast jeden Augenblick, es schwankt zwischen 10° bis 25° E 20° S.

Fig. 21. Profil der Deveroschiefer am Sonnenhorn.

Der Antigoriogneiss reicht, zuletzt als Schlieren und Augengneiss entwickelt, bis ungefähr 2550 m., dann beginnt die Deveroschieferdecke zunächst in Form von Glimmergneissen und Kalkglimmerschiefern.

Bei Punkt 2630 m., dem nordwestlichen Eckpfeiler der ganzen Gipfelgruppe, steht wiederum ein stark linear gestreckter Zweiglimmergneiss an, der 20° NE fällt. Die Deveroschiefer sind hier im Ostflügel mit einer staunenswerten Mannigfaltigkeit und verhältnismässig krystalliner entwickelt als ihre westlichen Äquivalente. Da der ganze Schichtkomplex mit ca. 20° nach SE einfällt, so kommen wir von Punkt 2630 m. dem Grate folgend geologisch in immer höhere Schichten (Fig. 21).

Der zweiglimmerige Streifengneiss, welcher die Hauptmasse des Sonnenhorns 2788 m. (Grenzgipfel) darstellt, streicht nun einen Grat bildend gegen SE ins Val di Campo hinunter, mannigfach untermischt mit Gesteinen von mehr glimmerschieferartigem Habitus.

Auf der rechten Thalseite des Val di Campo erscheint die Zone wieder, und man würde wohl an den rechtsseitigen Thalgehängen des grossen Kessels der Alp Cravairola die Fortsetzung der mannigfaltigen Glieder der Deveroschiefer auffinden, wie wir sie oben in der Gipfelgruppe der Corona di Groppo angetroffen haben.

Die Zusammenfassung der Detailbeobachtungen auf unserem Querschnitt durch das obere Val Antigorio zeigt zunächst in evidenter Weise die Uebereinstimmung der Lagerungsverhältnisse mit dem weiter südwestlich am Simplon und im untern Val Antigorio längst bekannten Gewölbebau der Antigoriogneissmasse, der in letzter Zeit wieder angezweifelt und nach der alten Gerlach'schen Auffassung als nach N überschobene Zunge betrachtet wird. Wir sehen, dass unser Querschnitt zu wenig tief reicht, um in dieser Streitfrage neue Aufschlüsse zu geben. Es umfasst das hier Sichtbare nur die obere Hälfte der bekannten vollständigen Schichtserie, und diese stellt sich im Querschnitt als ein regelmässig flaches Gewölbe dar. Dementsprechend finden wir auf beiden Seiten des Val Antigorio auf dem Gneiss die Deveroschieferdecke in Form von Kalkphylliten, Gneissen, Granatglimmerschiefern mit vereinzelten Einlagerungen von körnigem Kalk. Im Westflügel des Gewölbes tritt eine Komplikation ein, indem sich in die Deveroschiefer die Lebendungneissmasse einschiebt, welche infolge ihrer Härte und ihrer stellenweise ungeheuren Mächtigkeit sich im Vergleich zu den Deveroschiefern im Gebirgsstock der Cima Rossa und im Felsriegel des Tosafalles orographisch sehr bemerkbar macht.

VIII. Das Tessinermassiv.

Das grosse Gneissgebiet, welches sich von der östlichen Umrandung des Val Antigorio bis zum Val Centovalli erstreckt, lässt sich ganz gut unter diesem, bereits von Rolle [1]) gebrauchten Ausdruck zusammenfassen. Auf unserer Profillinie erreicht das Massiv eine Breite von ca. 20 km. Sowohl nach der Lagerung als nach dem Habitus der Gesteine können wir es in zwei Zonen scheiden, in eine nördliche, ausgezeichnet durch flach südfallende äusserst gleichförmige Gneisse und eine südliche mit steilerer Schieferung und ausserordentlicher Verschiedenheit der Gesteine, mit Einlagerungen von Amphiboliten und Glimmerschiefern. Die flache Lagerung des nördlichen Teils geht allmählig in die steilere der Südhälfte über.

Der nördliche Teil, die Zone des flachliegenden Gneisses (Rolle), bietet ein ganz besonderes orographisches Bild. Das Südfallen bewegt sich ungefähr zwischen 20 ° und 30 °; die Schieferung des Gesteines ist ausgezeichnet; wir erhalten so gegen N gerichtete Abstürze, wäh-

[1]) Fr. Rolle. Das südwestliche Graubündten und nordöstliche Tessin. Beiträge zur geologischen Karte der Schweiz. Lief. 23.

rend die nach S liegenden Gehänge in ihrem Böschungswinkel sich dem Einfallen des Gesteins anschmiegen. Namentlich in den obern Partien, wo die Vegetation nur mehr spärlich ist und ungeheure Schutthalden die scharfen Gräte umsäumen, ist das landschaftliche Bild ganz von diesen gegen N gerichteten Spitzen beherrscht, während gegen S blanke Schichtflächen, wie sie schöner in den Kalkalpen nicht gefunden werden, die Gehänge bilden. Die abgelegenen, höchst selten von Touristen betretenen Gegenden[1]) des hintern Val di Campo, sowie der Hintergrund der beiden Onsernonethäler fallen in diese Zone.

Der Grat, welcher zugleich die italienisch-schweizerische Grenze bildend vom Sonnenhorn südöstlich hinabzieht ins Val di Campo, zeigt uns nicht die obersten Lagen der Deveroschiefer, sondern wir finden dieselben als muscovitreiche Gneisse und Gesteine vom Typus des Sonnenhorns an einer zweiten Rippe, die von der Cima die Quadrella 2670 m. hinunter geht gegen Cimalmotto und von der ersten durch ein Isoklinalthal getrennt ist. In unserer Profillinie liegen diese Schichten gerade im Thalgrund des Val di Campo, wo sie durch die Anschwemmungen der Rovana unsern Blicken entzogen sind.

Der sogenannte obere Gneiss beginnt in der Umgebung unserer Profillinie mit einer Amphibolitzone. Es sind dunkelgrüne bis schwarze Hornblendeschiefer mit Einlagerungen von Talk und Strahlstein. An einigen Stellen wird ein Lavezstein gebrochen, der das Material zu den Öfen im Dorfe Cimalmotto geliefert hat. Die Lokalitäten konnte ich leider nicht genau ausfindig machen. Daneben sind körnige, schwere Amphibolite von mehr massigem Habitus nicht selten, namentlich in dem grossen Bergsturzgebiet oberhalb Cimalmotto und Campo, wo die thalwärts fallenden Amphibolite die Rutschfläche für einen gewaltigen Bergsturz abgegeben haben.[2])

Wir finden diese Amphibolitzone auf der Profillinie an dem rechten Thalgehänge des Val di Campo wohl gegen 400 m. mächtig. Aus dem Thalgrunde mit 25° SE Fall aufsteigend zieht sie sich gegen SW an der südlichen Umrandung der Alpe di Cravairola allmählig in die Höhe und hängt wahrscheinlich mit den Amphiboliten zusammen, welche Gerlach auf Blatt XVIII Dufour beim Passo della Scatta (Passo della Fria der italienischen Generalstabskarte 1:50000) angegeben hat. Fast genau auf der Profillinie ist die Amphibolitzone und die Basis des

[1]) R. Zeller. Geologische Streifzüge in den Lepontischen und Tessiner Alpen. Jahrbuch des schweiz. Alpenklub. Bd. 29. (1893).

[2]) Die Wildbachverbauung in der Schweiz. II. Heft. p. 3 u. ff.

obern Gneisses aufgeschlossen in einem Tobel, das in steilen Abstürzen von der Cima Tremellina gegen Val di Campo hinabgeht. Leider ist es zum grössten Teil ungangbar, doch lässt sich beobachten, dass die Hornblendeschiefer mehrfach mit Glimmerschiefern und Granatglimmerschiefern abwechseln. Auf die Amphibolite folgt ein glimmerarmer, feinkörniger Gneiss, bald glimmerreichere Varietäten, auch ein stark gestreckter Biotitgneiss. Die obern Gehänge gegen Cima Tremellina sind ungangbar; der einförmig weissen Färbung nach zu schliessen ist alles höhere Gneiss. Das Einfallen der ganzen Schichtserie schwankt um 25 ° SE.

Von der Cima Tremellina 2365 m. folgt die Profillinie dem hier sehr scharf ausgeprägten schweizerisch-italienischen Grenzkamm bis zur Cima di Pian del Bozzo 2193 m. oberhalb Comologno im Val Onsernone. Die Fortsetzung des am Nordabhang der Cima Tremellina gewonnenen Profils muss in dem gegenüber Cimalmotto ausmündenden Seitenthal der Alp Sfille (Svila der Dufourkarte) zu finden sein. Bei den Hütten dieser Alp trifft man denn auch bei ca. 700 m. denselben gestreckten Biotitgneiss, dessen Trümmer wir in Menge in dem erwähnten Tobel am Nordabhang der Cima Tremellina beobachtet haben. Gleichfalls streichen, da und dort aus der Vegetation hervorragend, einige 38° SE fallende Bänke eines dunklen Glimmerschiefers von deveroschieferartigem Habitus. Dann folgt an den Abhängen des Pizzo di Porcarrecio und über diesen hinaus ein feinkörniger äusserst gleichmässiger Biotitgneiss.

Vom Passo del Lago Gelato 2401 m. gegen Süden ist der Grenzkamm, wenigstens auf der Schweizerseite, aber stellenweise auch auf der italienischen, die reine Mauer, überall ca. 150 m. hohe, senkrecht abstürzende Felswände, welche, weil sie in der Profillinie und der Fallrichtung verlaufen, das Einschiessen der Straten gegen S gut beobachten lassen. Die höchste Erhebung des Kammes ist der Monte Madone 2551 m. (Pizzo di Madaro auf Dufour XVIII). Das Gipfelgestein ist ein 34 ° SE fallender apatitführender Zweiglimmergneiss. Weiter gegen S wird die Lagerung etwas flacher (bis 24 °). Das Gestein ist immer derselbe feinkörnige Biotitgneiss mit zweiglimmerigen Einlagerungen wie am Monte Madone. Im Thalgrunde des Val Onsernone bei Bagni di Craveggia beträgt der Fallwinkel mit grosser Konstanz 16 °.

Die Gebirgskette, welche Val Onsernone von Val Centovalli und Vigezzo scheidet und welche in der Nähe der Grenze im Pizzo di Ruscada mit 2007 m. kulminiert, bietet wesentlich andere Verhältnisse

und sticht namentlich in der Mannigfaltigkeit der Gesteinstypen von der petrographischen Einförmigkeit des bisher betrachteten Gebietes ab. Ferner existieren hier auch etwelche Vorarbeiten. Rolle gibt ein Profil von Bagni di Craveggia über den Passo del Sassone nach Stadt Craveggia [1]). Man ersieht daraus die Zunahme der Neigung des Gneisses oberhalb Bagni di Craveggia, dann kommt eine doppelte Zone von Hornblendeschiefern, die Rolle zu einer Mulde verbindet. Der Muldenkern besteht aus Glimmerschiefer.

Ebenfalls von den Bagni di Craveggia ausgehend durchkreuzte ich die Kette mehr in SE-Richtung der Profillinie entlang und konnte auch hier die Richtigkeit des Rolle'schen Profils konstatieren und zugleich einige Detailbeobachtungen beibringen.

An einem Wege, der von den Bagni di Craveggia über Alpe Isornia und die Bochetta di San Antonio hinüber führt nach Stadt Craveggia, lassen sich die geologischen Verhältnisse des Nordabhanges der Kette gut studieren. Das Gestein bleibt zunächst im Anstieg nach Alpe Isornia derselbe feinkörnige Biotitgneiss, welcher jenseits im Norden die Hauptmasse des obern Gneisses darstellte. Gleich oberhalb der Bagni fällt der Gneiss bereits mit 17° nach SE, bald haben wir Fallwinkel von 21°, wenig weiter 24°. Da wo der Weg gerade unter Alpe Isornia das Bett eines kleinen Seitenbaches durchquert, treffen wir die ersten Einlagerungen in den 26° fallenden Gneissen in Form glimmerarmer weisser Partien, darauf herrscht wieder bis über Alpe Isornia hinaus der feinkörnige Onsernonegneiss. Oberhalb letztgenannter Alp bietet nun das Bachbett auf längere Strecke ein gut entblösstes Profil, das fast bis zum Thalabschluss reicht, wo es durch Gehängeschutt bedeckt wird. Es ist ein bunter Wechsel von Onsernonegneiss, glimmerarmen Muscovitgneiss, Zweiglimmergneiss. Genau die gleiche Mannigfaltigkeit zeigt die Fortsetzung dieses Profiles auf der rechten Thalseite an dem Rücken, der über Alpe Lanca zu Punkt 1909 m. hinaufreicht. Das Einfallen hat unterdessen auch zugenommen und beträgt bei Punkt 1909 m. bereits 55° S 10° E.

Das Profil des Grates, welcher von Punkt 1909 m. SSW hinüber zieht zu dem 1950 m. hohen Monte Zicher, gibt Fig. 22.

Hier haben wir den ersten Amphibolitzug, welchen weiter westlich Rolle am Passo del Sassone beobachtet hat. Der mittlere Felszahn wird fast ganz aus äusserst massigen, hell- und dunkelgrünen

[1]) Fr. Rolle, Nordöstl. Tessin. Beiträge 23. Taf. II, Fig. 6. Text. pag 45 ff.

Fig. 22. Die Amphibolitzone zwischen Val Onsernone und V. Vigezzo.

Hornblendegesteinen gebildet. Im Dünnschliff erweist sich das hellgrüne Mineral als Olivin, man hat es also mit Amphibol-Pikriten (Peridotiten) zu thun. An der Südseite lagern sich mit 77° S 20° E Fall dunkelgrüne, feldspathaltige Hornblendeschiefer an. Das südlichste Glied bildet ein zweiglimmeriger Augengneiss. Das Profil wurde hier nicht weiter verfolgt, indem der östlich gegenüberliegende Parallelkamm der Cavallina, weil der Profillinie näher, für die weitere Untersuchung vorgezogen wurde.

In der Streichrichtung gegen Osten verschwindet der Amphibolitzug zunächst unter den Schutthalden und Weiden der Alp Orti, jenseits aber findet sich die Fortsetzung in dem Sattel bei Alp Robina; hier sind durch ein Seitentobel der Ribalasca die grünen Hornblendeschiefer entblösst, sonst sind die Aufschlüsse im Profil Fig. 22 besser. Von der eben erwähnten Einsattelung erhebt sich der südostwärts verlaufende Grat wieder zur bewaldeten Cavallina. Auf 55° S fallende Glimmerschliefer folgt jener Augengneiss des Monte Zicher in Saigerstellung. Am Südabhange der Cavallina bis oberhalb Olgia fehlen Aufschlüsse. Eine Excursion von Olgia über die Alpen Caviano und China an die östlichen Abhänge der Cavallina gegen das Ribalascatobel bot das Fehlende. Hier ist die südliche Amphibolitzone in einem Bachbett schön aufgeschlossen. An Mächtigkeit der nördlichen weit nachstehend finden sich dioritähnliche Gesteine und Hornblendeschiefer in fast senkrechter Stellung. Gegen N, also den Muldenkern, folgen stark gefältelte sericitische Zweiglimmergneisse, sowie Gneisse eines Typus, den wir bei Olgia treffen werden.

Das Liegende der Amphibolite sind Glimmerschiefer und glimmerreiche Gneisse mit pegmatitartigen Einlagerungen. Zunächst den Amphiboliten, wie diese 76° SE fallend, richten sie sich allmählig auf, stehen bei Alpe China saiger und neigen sich gegen Alpe

Caviano zu wieder südwärts über. Von Alpe China bis Alpe Caviano ob Olgia herrschen Zweiglimmergneisse und Glimmerschiefer mit untergeordneten Einlagerungen von Hornblendeschiefern und weissen Bändern von Feldspat. Es ist nach dem Dünnschliff Orthoklas (seltener Plagioklas), Quarz, sowie etwas Sericit auf Spalten. Der Gneiss ist stellenweise sehr gut geschiefert und wird zu praktischen Zwecken in dünnen Platten gebrochen. Die untern Hänge des Val Centovalli oder Val Vigezzo, wie die italienische Fortsetzung des tessinischen Centovalli heisst, bestehen aus einer besondern Gneissvarietät *(Olgiatypus)*. Es ist ein prachtvoller Biotitgneiss, bestehend aus glasigem Quarz, weissem Feldspat und grossen schwarzen Flatschen feiner Biotitblättchen. Das Gefüge ist etwas flaserig, der Habitus an gewisse Antigoriogneisse erinnernd, der Muscovit ist aber nur accessorisch. Dieser Gneiss ist schön aufgeschlossen in den zahlreichen Seitenbächen, die von Norden her der Melezza zuströmen, namentlich auch beim Grenzbach Ribalasca, wo man, um die Grenze zu überschreiten, tief in das Tobel hinabsteigen muss. Die wilde Schlucht der Ribalasca würde überhaupt bis zu ihrem Ursprung an den Wänden des Pizzo di Ruscada die schönsten Aufschlüsse bieten, doch scheint sie ungangbar. Gegen Westen wurde der Olgiagneiss beobachtet bis gegen Rè, er findet sich anstehend ca. 70° S fallend in den Bachschluchten, welche die Dörfer Olgia, Dissimo und Folsogno von einander trennen, sowie lose und in zahlreichen Blöcken, die sich namentlich gegenüber dem anstehenden Gestein durch ihre Frische auszeichnen und ein prachtvolles Material für Bauzwecke darstellen.

Der Südabhang des Val Vigezzo besteht zunächst aus sanft ansteigendem Gelände, dessen Wiesen und Wälder freundlich hinüber leuchten in die Dörfer des Nordabhanges; plötzlich aber erheben sich weiter oben schwärzliche steile Felswände, es sind die massigen und sterilen Gesteine der folgenden Zone, während die untern sanften Gehänge dem Gneiss angehören. Diese Gneisse sind trefflich aufgeschlossen im Westen unseres Profiles an der grossen Strasse, welche von St. Maria Maggiore in Val Vigezzo durch Val Cannobina nach Cannobio am Lago Maggiore führt. Von Malesco ausgehend steigt man mit prächtigem Blick auf die häuserbesäten Nordhänge des Val Vigezzo durch Matten und Wald allmählig empor. Bald tritt da und dort ein stark gestreckter glimmerreicher Biotitgneiss hervor. Da, wo gegen Süden die Strasse in ein Thälchen einbiegt, wird das Profil

vollständiger und wir treffen von jenem Biotitgneiss ausgehend bis zum Piano del Sale folgendes:

1. Dunkelgraue Glimmerschiefer,
2. Chloritschiefer 81 ° NW fallend, die Strasse überschreitet den Bach; dann folgt
3. Feinkörniger, schiefriger Zweiglimmergneiss,
4. Welligschiefriger Sericitschiefer mit Einsprenglingen, ein gepresster Quarzporphyr (Microgranit), saiger stehend
5. Graugrüner, sehr feinkörniger Glimmerschiefer,
6. Derselbe Porphyr wie Nr. 4,
7. Hornblendeschiefer (Hornblende stark gebleicht).

Hier erleidet das Profil eine Unterbrechung durch die sumpfige Ebene Piano di Sale, jenseits stehen bereits die Amphibolite der nächsten Zone an.

Wie weit östlich sich die eben beschriebene Zone verfolgen lässt, ist unbestimmt; in der Profillinie und zwar im Bette des Rio dei confini ist von dieser Mannigfaltigkeit wenig mehr zu merken. Der unmittelbare Kontakt ist auch hier nicht aufgeschlossen, man ersieht nur, dass bei ca. 900 m. im Bachbett 52 ° N 20 ° W fallende Sericitschiefer mit Einlagerungen von Chloritschiefern anstehen. Diese Sericitschiefer herrschen bis fast hinunter zur Melezza, wo Zweiglimmergneisse sie vom jenseits anstehenden Olgiagneiss trennen. Auf der Profillinie ist also die Auflagerung der Glimmerschiefer auf die folgende Zone sehr deutlich, während im Profile der Heerstrasse die saigere Stellung vorherrscht.

Leiten wir kurz aus den beobachteten Thatsachen die allgemeinen Züge ab, so bietet uns das Tessinermassiv scheinbar einfache Verhältnisse dar, wie sie das Profil wiedergibt: Konkordante Auflagerung des Gneisses auf die Deveroschiefer mit Einschaltung einer Amphibolitzone; Flaches Einfallen (25 °) im Gebiet der beiden Onsernonethäler; allmählige Aufrichtung zwischen Onsernone und Centovalli mit einem Muldenzug von Amphiboliten, und endlich südlich Anlehnung an den Amphibolitzug von Ivrea. Wechselnder ist die Petrographie des Tessinermassives, obschon auch in der nördlichen Hälfte durch das fast ausschliessliche Auftreten des feinkörnigen Onsernonegneisses eine gewisse Einförmigkeit herrscht, die, verbunden mit der einfachen Lagerung, diesem Gneissgebiet einen charakteristischen, landschaftlichen Habitus verleiht. In der Südhälfte zwischen Val Onsernone und Centovalli (Vigezzo) ist der Wechsel der Gesteine sehr rasch und mannigfaltig,

im Olgiagneiss lernen wir eine für die Thäler Centovalli und Vigezzo charakteristische Abänderung von Biotitgneiss kennen. Eine südliche Grenzzone zeigt wieder eine ausserordentliche Mannigfaltigkeit der krystallinen Schiefer, unter welchen auch gepresste Porphyre auftreten.

IX. Der Amphibolitzug von Ivrea.

Mit diesem Namen bezeichnet Diener [1]) eine Zone von Hornblendegesteinen verschiedenster Art, welche sich von Ivrea her durch die Thäler Adorno, Rio grande, Mastallone und Antigorio zum Lago maggiore hinzieht. Östlich von Locarno bis zum Profil der Gotthardbahn ist ihre Begrenzung noch nicht genau untersucht. Bei Bellinzona war sie schon B. Studer [2]) bekannt.

Der eigentümliche landschaftliche Charakter ist bereits von Gerlach [3]) in vorzüglicher Weise hervorgehoben worden; das schlackenartige Aussehen der massigen Amphibolite und Diorite sticht sehr ab von den durch die Schieferung beherrschten Oberflächenformen der begleitenden Gneissmassen.

Das Querprofil schneidet diesen Amphibolitzug im Gebiete der Val Cannobina; die Gebirgsgruppe des trotzigen Monte Limidario oder Ghiridone, 2189 m., bietet vereint mit dem tiefen Einschnitt des Torrente Cannobino interessante Aufschlüsse. Am bequemsten lässt sich ein Profil begehen auf der grossen Militärstrasse Santa Maria Maggiore-Cannobio, welche das Val Cannobina durchzieht, und längs welcher wir bereits die nördlich anliegenden Gneisse untersucht haben. Verfolgen wir jenes Profil weiter, so treffen wir nach der Unterbrechung der Schichtreihe durch den Piano di Sale auf grüne weissgesprenkelte Feldspatamphibolite, die im Handstück massig, am Anstehenden dennoch eine allerdings sehr undeutliche Parallelstruktur erkennen lassen, die senkrecht verläuft.

Unter dem Mikroskop erweisen sich diese Amphibolite als stark zersetzt, gleichsam serpentinisiert. Traverso [4]) gibt ein Profil der Felsen beim Piano di Sale; nach ihm wechseln Amphibolite mit Serpentin und Peridotiten. Das Gestein wechselt jeden Augenblick, aussen trägt alles die gleiche schwarze Verwitterungsrinde.

[1]) C. Diener, Gebirgsbau der Westalpen, p. 135.
[2]) B. Studer, Geologie der Schweiz, I. p. 302.
[3]) H. Gerlach, Penninische Alpen, p. 130.
[4]) Traverso, Geologia dell'Ossola, Tafel VI, Fig. 6.

Solche Amphibolite herrschen bis zum Dorfe Finero, das wohl von der schwarzen Felslandschaft, in der es liegt, seinen Namen erhalten haben mag. Unterhalb des Dorfes glaubt man an der Strasse ein Einfallen von 53° NW zu beobachten, doch ist der Aufschluss so gering, dass man nicht weiss, ob man es mit Anstehendem zu thun hat. Das Gestein ist hier grau, dicht, sehr schwer und zähe, mit grossen Biotitlamellen. Es ist, wie das Mikroskop lehrt, ein Hypersthenfels. Bei der Einmündung des Rio Creves in das Thalwasser stehen wiederum massige dichte Amphibolite an, deren Hornblende einen eigenen, noch näher zu untersuchenden Typus darstellt. Sie enthalten stellenweise sehr granatreiche Lagen. Der Monte Castello besteht ebenfalls aus Schritt für Schritt wechselnden, dichten, massigen Amphiboliten und mehr schiefrigen Feldspatamphiboliten, die manchmal fast in Syenit übergehen. Ein Spezialprofil der Amphibol- und Pyroxengesteine von Finero bis Orasso gibt Traverso.[1]) Das Einfallen ist steil NW. Südwestlich von Cursolo beginnt wieder der Gneiss, der Kontakt mit den Amphiboliten ist nicht aufgeschlossen, die Schieferung fällt 87° NW. Thalabwärts herrschen nur noch Gneisse und Glimmerschiefer, mit Ausnahme einer kleinen Einlagerung von Hornblendeschiefern unterhalb Spoccia.[2]) Im Profil der Landstrasse hat also die Amphibolitzone nur eine Breite von 2,5 km.

Ähnlich liegen die Verhältnisse weiter östlich. In einem Querprofil von Orasso (Val Cannobina) nach Dissimo (Val Vigezzo) finden wir bis weit oberhalb Orasso unfrische Zweiglimmergneisse. Ziemlich genau im Streichen der Amphibolitgrenze am Monte Castello treffen wir in der Höhe von ca. 1200 m. auf die Amphibolite. Zunächst sind Hornblendeschiefer eingelagert in Glimmergneisse mit 25° NW Fall. Das Einfallen wird rasch steiler und erreicht 60°. Eine ca. 1 m. mächtige Quarzbank zieht sich als gelbes Band am Abhang hinauf, dann folgt ein beständiger Wechsel von Amphiboliten und Zweiglimmergneiss, der da und dort vollsteckt von schlecht erhaltenen Granaten. Die Amphibolite entsprechen genau den Feldspatamphiboliten von Finero. Oft sind Gneiss und Amphibolit schlierenförmig in einander verknetet (Fig. 23). Die Neigung steigt auf 76°, es folgt der Kontakt gegen den eigentlichen Amphibolitzug. Der Gneiss ist hier in einer

[1]) Traverso, Geologia dell'Ossola, Tafel VIII, Fig. 4.

[2]) Eine andere Amphibolitlinse bei der Brücke von Falmenta notiert Traverso, Geolog. dell'Ossola, Karte.

4—6 m. mächtigen Zone ganz verwittert, darin stecken noch ganz frische Stücke. Nun kommen ebenfalls NW einfallend die Feldspatamphibolite, welche allmählig durch Zunahme an Feldspat in sehr gleichmässig körnige Diorite übergehen, die aber immer noch eine allerdings nur am Anstehenden hervortretende Parallelstruktur zeigen.

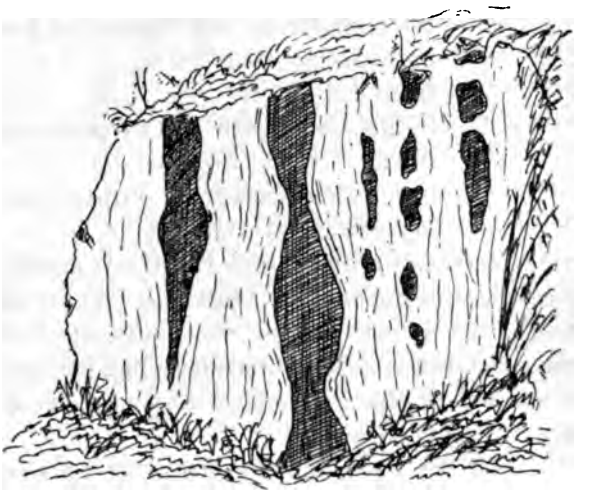


Fig. 23. Schlierenförmige Durchdringung von Gneiss (hell) und Amphibolit (dunkel) am Contakt ob Orasso.

Bis hinauf zur Alpe Torrigia herrscht nur dieser Diorit, dort aber wird er plötzlich unterbrochen durch eine ca. 200 m. breite Zone dunkler, dichter Pyroxengesteine, vom Typus derjenigen am Monte Castello im Cannobinaprofil. Sie bilden eine steil NW fallende Lagermasse. Gegen Osten keilen sie sich bald aus in den Dioriten der Roccie del Gridone, zu denen sich auch der oben beschriebene Dioritzug gesellt. Gegen Westen aber steigen sie zum Gipfel des Monte Torrigia, dessen Südabhang aus Diorit, Gipfel und Nordseite aus eben diesen Pyroxengesteinen besteht. Der Dioritzug der Roccie del Gridone erstreckt sich nicht mehr weit gegen Westen, sondern er keilt sich seinerseits auch aus, so dass nun die dichten Pyroxengesteine zusammenstossen mit einem zweiten Zug ähnlicher Gesteine, welche östlich von der Testa di Misello herüberstreichend die Diorite der Roccie del Gridone überlagern. Wir werden diese Amphibol-Pyroxengesteine bei Besprechung der Testa di Misello noch näher kennen lernen. Wie weit diese Amphibolite am Gehänge gegen Val Vigezzo hinabreichen, wurde auf dieser Linie nicht beobachtet, doch dürfte die Grenze gegen die Gneisse nach den weiter westlich und östlich beobachteten Verhältnissen bei ca. 900 m. liegen. Wir haben also, um kurz zu resümieren, in einem Querschnitt Orasso-Dissimo folgende Serie:

Gneiss des Val Cannobina
Wechsellagerung von Gneiss und Amphiboliten
Feldspatamphibolit
Diorit
Dichte Amphibolite und Pyroxengesteine
Diorit
Dichte Amphibolite und Pyroxengesteine
Gneiss des Val Vigezzo.

Merkwürdig in diesem Profil ist einmal die innige Wechsellagerung von Gneiss und Amphibolit und zweitens die zonare Zweiteilung des Amphibolitzuges selbst in Diorite-Feldspatamphibolite einerseits und dichte, massige Amphibol- und Pyroxengesteine andererseits, sowie endlich das gegenseitige Auskeilen der Zonen in einander in der Streichrichtung.

Auf der Karte von Traverso sind die Gesteine des Amphibolitzuges getrennt in Pyroxen-Amphibolgesteine (Diorit, Gabbro, Amphibolit) einerseits und Peridotite und Serpentine andererseits. Diese Zweiteilung entspricht mehr dem petrographischen als dem geologischen Verband. In ihrem zonenförmigen Auftreten, und damit im landschaftlichen Habitus, sind vielmehr die Diorite für sich allein, und die Feldspatamphibolite, Pyroxengesteine, Peridotite und Serpentine bilden eine zweite Gruppe. Wir haben es vorgezogen, diese aus dem geologischen Verband sich ergebende Einteilung beizubehalten, zumal auch die Peridotite und Serpentine an den Nordgehängen des Monte Gridone gegen Val Vigezzo lange nicht so ausschliesslich vorherrschen, wie die Karte von Traverso vermuten lässt. Die als massige Amphibolite bezeichneten Gesteine der Testa di Misello z. B. sind keineswegs Peridotite, sondern genau die gleichen Amphibol- und Pyroxengesteine wie sie bei Finero auftreten.

Dieselben Verhältnisse, zum Teil aber noch grossartiger, bietet der in unser Querprofil aufgenommene Kamm, welcher, der Landesgrenze folgend, von der Melezza zur Testa di Misello aufsteigt und über die Roccie del Gridone zum Kulminationspunkt der ganzen Gebirgsgruppe, dem Monte Limidario oder Ghiridone 2189 m. hinüberläuft und endlich über Monte Fajeron 1720 m. und Monte Giove 1296 m. steil gegen den Langensee abfällt.

Der unmittelbare Kontakt der Amphibolite und Sericitschiefer am Nordabhang der Testa di Misello ist nicht entblösst, er muss ungefähr bei 1000 m. liegen. Die ersten Glieder des Amphibolit-

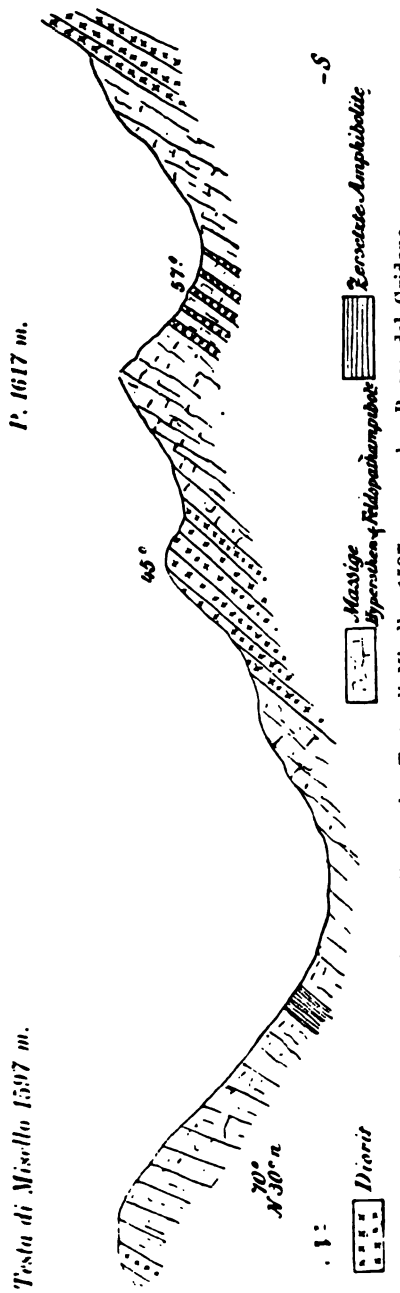


Fig. 24. Querprofil von der Testa di Misello, 1597 m., zu den Rocce del Gridone.

zuges sind grosse, steil N fallende Platten eines schwarzen, dichten, nicht sehr harten Gesteins, das nach mikroskopischer Untersuchung ein veränderter Amphibolit sein dürfte. Wald und Gestrüpp verdecken das Anstehende bis in die Nähe des runden Felskopfes Testa di Misello 1597 m. Von hier weg ist das Profil wieder vollständiger (Fig. 24).

Die massigen Amphibolite erhalten durch die Verwitterung eine intensiv gelbrote Rinde, wodurch sie auch landschaftlich sich stark von den mehr grauen Dioritlagen abheben. Auch hier haben wir endlich wieder veränderte Amphibolite in Form dichter dunkler, oft von grünen Bändern durchzogener Gesteine, deren mikroskopische feinfaserige Struktur an Asbest ähnliche Mineralien erinnert.

Die gewaltige Felsmauer der Roccie del Gridone besteht aus normalem Diorit, der untergeordnet Lagen von Hornblendeschiefern enthält, welche 72° N 30° W fallen. So wenigstens an Punkt 2154 m., der trotz seines furchtbaren Aussehens leicht zu ersteigen ist. Von der Bocchetta del Fornale bis zum Monte Ghiridone wechseln nun Diorit und Amphibolitschiefer beständig. Bei Punkt 2126 m. enthält der Diorit in grossen Massen krystallinisch ausgeschiedene Hornblende, es ist oft ein eigentlicher Amphibolpegmatit; in den Hornblendeschiefern sind Epidotbänder häufig,

welche der Schichtung parallel laufen. Am Monte Ghiridone oder Limidario 2189 m. hat die Amphibolitzone eigentlich ihre südliche Grenze erreicht, denn von da an treten die Hornblendegesteine nur mehr in Wechsellagerung mit krystallinen Schiefern auf. Der Gipfel des Ghiridone besteht aus einem graurötlichen Biotitgneiss, der mit 80° gegen N einfällt. Die Amphibolitzone im engern Sinne erreicht also in unserem Profil eine Breite von 3,5 km. Die Wechsellagerung erstreckt sich noch 2,5 km. weiter nach Süden, so dass der gesamte Amphibolitzug quer zum Streichen 6 km. misst.

Zwischen den höchsten Gipfel des Ghiridone 2189 m. und derjenigen Spitze, welche das grosse steinerne Signal trägt, tritt wieder Diorit auf, und die Signalspitze selbst besteht aus einem äusserst glimmerreichen Gneiss, bei dem Glimmer einerseits, Quarz und Feldspat andererseits abwechselnd dunkle und weisse Lagen bilden. Gegen Süden erscheint bald an Stelle dieses Glimmergneisses eine mehr feinkörnige, homogene Varietät. Ein Bild von der intensiven Wechsellagerung der Amphibolite mit den Gneissen am Grat vom Monte Limidario zum Monte Fajeron gibt Fig. 25, da dieselbe auf dem grossen Profil des kleinen Massstabes nicht genau wiedergegeben werden konnte. Zu bemerken ist, dass die Diorite, sowie die mit ihnen vergesellschafteten eigentümlichen Granite ganz massig sind und keine Parallelstruktur zeigen.

Das Einfallen ist bei Punkt 1917 m. 74° N 10° W, weiter unten gegen die Einsattelung 1632 m. nur 60°. Die Erhebung 1702 m. bildet das südlichste Glied der Amphibolitzone und zeigt folgendes Profil (Fig. 26).

Der Monte Fajeron besteht bereits aus dem 80° S einfallenden feinkörnigen Gneiss, welchen wir bereits kennen, und gehört der nächst zu betrachtenden Zone an.

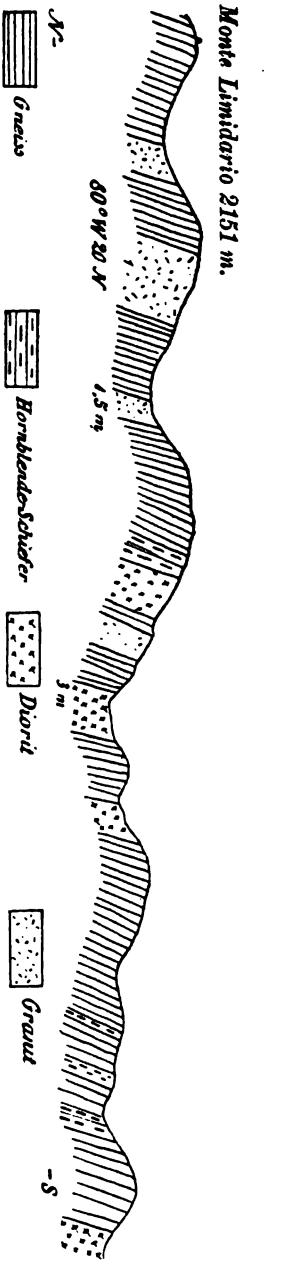


Fig. 25. Profil des Südgrates des Monte Limidario (Ghiridone) 2151 m.

Wie tief diese Wechsellagerung sich erstreckt, ist leider mangelnder Aufschlüsse wegen nicht anzugeben. An den Gräten ist die Schichtfolge prächtig entblösst, weiter unten sind die Gehänge mit Vegetation und Schutt überdeckt, und wo man Anstehendes trifft, so ist es Gneiss. Die tiefen Einschnitte, wie die Schlucht des Riale di Cavaglio, welche gewiss sehr grosse und entscheidende Aufschlüsse geben würden, sind leider ungangbar. An der Kunststrasse der Val Cannobina, wo das Anstehende fast überall zu Tage tritt, lässt sich ebenfalls nichts derartiges beobachten, und die kleinen Hornblendeschieferzonen gerade unterhalb Spoccia, sowie bei der Brücke von Falmenta (Traverso) können kaum mit jenen am Limidariograte in Verbindung gebracht werden

In Bezug auf die Lagerungsweise des ganzen Amphibolitzuges, sowie die darauf beruhende tektonische Auffassung sind die bisherigen Ansichten sehr geteilt. Gerlach [1]) behauptet, er werde beidseitig von Gneissen überlagert, sei also eine Antiklinale, Taramelli [2]) hat entlang der Südgrenze ein Einschiessen der Gneisse unter die Amphibolite beobachtet. Für das Gebiet des Val Cannobina lässt sich beides nachweisen, aber die Fallwinkel sind

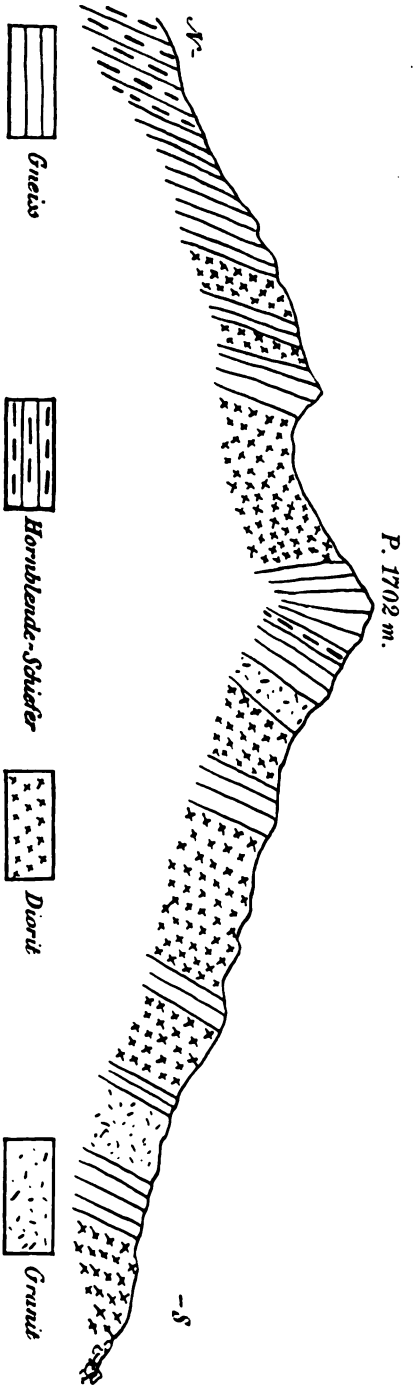


Fig. 26. Querprofil durch Punkt 1702 m. bei Monte Pajeron.

[1]) Gerlach, Penninische Alpen, pag. 135.

[2]) Taramelli, Note geol. sul bacino idrografico del fiume Ticino, pag. 263.

immer so nahe der Senkrechten, dass man kaum von Unter- oder Überlagerung sprechen darf. Endlich wäre noch die Auffassung von Diener [1]) zu citieren, der den Amphibolitzug als einen längs Verwerfungen zur Tiefe gesunkenen Graben erklärt.

Versuchen wir aus der Fülle der Thatsachen ein Gesamtbild zu erhalten, so ergibt sich ungefähr folgendes: Auf unserem Querschnitt stellt sich der Amphibolitzug von Ivrea dar als eine Zone steilgestellter Hornblende-, Pyroxen- und Olivingesteine von teils schiefriger, teils massiger Ausbildung. Erstere betrifft Hornblendeschiefer und in gewissem Grade auch Diorite, letztere massige Feldspatamphibolite, Hypersthenfelse, Peridotite und Serpentine, die zwischen den ersterwähnten steilstehende Lagermassen bilden. Ueberhaupt sind die Diorite von den massigen Amphiboliten ziemlich scharf getrennt, und die beiden Komplexe bilden eigene Zonen, die sich gegenseitig in einander auskeilen. Während endlich der Amphibolitzug gegen die nördlichen Tessinergneisse konkordant aber scharf abgegrenzt ist, so verwischt sich seine Südgrenze infolge einer intensiven Wechsellagerung mit krystallinen Schiefern (Gneissen) der Stronagneissmasse. Die Verteilung der Amphibolgesteine in Zonen, sowie die Wechsellagerung mit krystallinen Schiefern am Südrande lassen vermuten, dass der Amphibolitzug weder ein einfaches Gewölbe (Gerlach), noch ein Graben (Diener) sei, sondern dass er gewissermassen am ehesten eine Art Centralmassiv darstelle, dessen Material aber aus Hornblendegesteinen bestände. Die Zonen und ihre linsenförmige Anordnung erinnern sehr an die entsprechenden Lagerungsverhältnisse im Aarmassiv, und die Durchschwärmung der südlich angrenzenden Gneisse mit massigem Diorit und Granit fände sein Analogon in ähnlichen Erscheinungen am Südrand des Montblancmassives. Vorläufig ist man noch auf Hypothesen angewiesen, und es muss weitern Untersuchungen vorbehalten bleiben, eine befriedigende Lösung zu bringen.

X. Das Seegebirge.

Vom Sesiathale her wird der Amphibolitzug von Ivrea auf seiner Südseite zunächst von einer Gneisszone begleitet, welche, meist aus Sericitgneissen bestehend und oft mit Glimmerschiefern wechsellagernd, von Gerlach [2]) nach ihrem typischen Auftreten in Val Strona Strona-

[1]) Diener, Westalpen, pag. 134 und ff.

[2]) Gerlach, Penninische Alpen, pag. 120 und 101.

gneisse genannt worden sind. An diese Gneisszone schliessen sich südlich Glimmerschiefer an, deren Hauptentwicklung in die Umgebung des Ortasee's fällt und welche westlich des Lago maggiore durch die bekannten Granitstöcke von Baveno von den Stronagneissen getrennt sind, weiter östlich aber denselben einfach auflagern. In unserem Profil erscheinen die beiden Gesteinszonen so eng mit einander verschmolzen und auch tektonisch so übereinstimmend, dass man sie gut zusammen behandeln kann, wie sie denn auch bereits von Studer unter dem Namen Seegebirge zu einer tektonischen Einheit zusammengefasst worden sind.

Wie beim Amphibolitzug erhalten wir auch für diese Zone ein ziemlich vollständiges Profil an der Kunststrasse, die stets dem tiefen Cañon des Torrente Cannobino folgend, die landschaftlich hervorragende Valle Cannobina durchzieht. Von Finero herkommend treffen wir, wie bereits bemerkt, jenseits des Monte Castello bald einen dunklen Sericitgneiss. Soweit die Aufschlüsse zeigen, reicht derselbe mit 87° NW Fall bis unterhalb der Einmündung des Rio di Orasso. Es folgt die mehrfach erwähnte Einlagerung von Hornblendeschiefern und darauf Zweiglimmergneisse, die sich ausgezeichnet spalten und bei Punte di Spoccia in zolldicken Platten gebrochen werden. Diese Platten fallen 80° SE. Man hätte also hier eine Antiklinale, wenn man überhaupt so geringen Schwankungen um die Senkrechte so weitgehende tektonische Bedeutung beimessen darf. Unterhalb Lunecco ist die Hauptgesteinsart ein ziemlich massiger Biotitgneiss mit vielen Lagergängen von Pegmatit und Eurit. Oberhalb der Brücke zwischen Lunecco und Socragio ist aber das Gestein schon wieder ein sehr feiner saigerstehender Glimmerschiefer. Bald tritt wieder SE-Fallen ein. Bis hinab nach Traffiume herrschen Glimmerschiefer in verschiedenen Varietäten. Das Einfallen geht bis auf 58° SE (gegenüber Cavaglio), bei der grossen Strassenkehre, oberhalb Traffiume geht es nach NW über 73°. Zwischen Traffiume und Cannobio aber fallen die wellig gefälteten Glimmerschiefer bereits wieder 78° nach SE. Berücksichtigen wir nur die Schichtstellung, so hätten wir drei Antiklinalen abwechselnd mit zwei Synklinalen.

Etwas anders sind die Verhältnisse am Profilgrat. Die feinkörnigen Zweiglimmergneisse des Monte Fajeron haben wir bereits erwähnt. Die Schichtstellung wechselt gegen Süd, das SE Fallen (80°) geht in N Fallen über (80° bei Alpe Sercio). Zugleich wechsellagert der Zweiglimmergneiss mit Glimmerschiefer. Die runde Kuppe des Monte

Giove ob Cannobio 1296 m. besteht bereits aus derselben Art von Glimmerschiefer, die wir unten im Thal bei den grossen Strassenkehren oberhalb Traffiume antreffen. Den Wechsel im Schichtfall vom Monte Giove bis hinunter ins Thal zeigt das Profil; zu erwähnen sind nur am Nordabhang des Berges die im Glimmerschiefer auftretenden hornblendeführenden Pegmatitgänge.

Dem Monte Giove gegenüber auf der rechten Seite des Val Cannobina erhebt sich als der andere Eckpfeiler des Thaleingangs der Monte Carza bis auf 1117 m. Seine Abhänge sind zwar meist bewaldet, und nur da und dort tritt das Gestein hervor; aber auch hier hat die Kunststrasse, welche dem See entlang von Cannobio nach Cannero führt, einen stellenweise ununterbrochenen Aufschluss geschaffen. Kaum hat man Cannobio verlassen, so ist die Strasse in Felsen eingeschnitten, und zwar zunächst in 80° NW fallende dunkle Glimmerschiefer, welche zu Bauzwecken gebrochen werden. Jenseits des Vorsprunges Punta d'amore gegen Punta Creda hin herrscht feinkörniger rötlicher Biotitgneiss, der bald in ähnlich aussehenden Glimmerschiefer übergeht (76° SE). Auch hier entfernen sich die Einfallswinkel nie weit von der Vertikalen. Hinter Villa Badia kommt wieder der ersterwähnte Biotitgneiss 83° NW fallend. Es folgen nun mehr dunkelgrüne, feinkörnige, sericitische Glimmerschiefer, dann solche, die durch den Muscovit ein hellglänzendes Aussehen erhalten; endlich treten da, wo das Gebirge am weitesten in den See hinaus ragt, Biotitgneisse von grobkörniger flasriger Struktur auf, die entweder sehr viel oder nur mässig schwarzen Glimmer enthalten und sehr an die schönen Biotitgneisse des Val Vigezzo (Olgiatypus) erinnern. In der Nähe der Villa Mantegazza stehen sie saiger, und weiter gegen Cannero hin schiessen sie mit 70° gegen NW ein.

Wir treffen also südlich des Amphibolitzuges von Irrea auf einen letzten breiten Zug krystalliner Gesteine, den wir nach dem Vorgange Studers das Seegebirge nennen. Verschiedenartige Gneisse und Glimmerschiefer in steiler Massivstellung setzen es zusammen. Der stete Wechsel im Schichtfall lässt darauf schliessen, dass wir es hier mit einem System eng aneinander gepresster Falten zu thun haben. Immerhin zeigt sich eine gewisse Verteilung der Gesteine, indem zunächst des Amphibolitzuges Zweiglimmergneisse vorherrschen (Stronagneissmasse), während im untern Teil des Val Cannobina vorzugsweise Glimmerschiefer von verschiedenem Typus sich finden (Glimmerschiefer von Orta). Doch ist der Uebergang ein so allmähliger, und finden sich

Glimmerschiefer in der Gneisszone und umgekehrt, dass eine getrennte Behandlung, in unserem Profil wenigstens, nicht geboten erschien. Den südlichen Teil des Seegebirges endlich werden wir am linken Ufer des Lago maggiore im sog. Luganer Eruptivgebiet antreffen.

XI. Das Luganer Eruptivgebiet und die südliche Randzone.

Aus diesem Gebiete sind nur Einzelheiten nachzutragen, indem sowohl die stratigraphischen, wie die tektonischen Verhältnisse durch die Aufnahmen von Taramelli[1]) und die neuern Arbeiten von Harada,[2]) Steinmann und Schmidt[3]) klargelegt worden sind. Das Profil stützt sich denn auch auf die von diesen Forschern gegebenen Querschnitte, und es musste die Gegend nur begangen werden, um die Verhältnisse in der Nähe der Projektionsebene festzulegen.

Die Verwerfung von Voldomino ist prachtvoll aufgeschlossen im Thälchen eines kleinen Baches, der beim Kirchhof von Voldomino und der Häusergruppe Baggiolina[4]) in das Thal der Margorabbia hinaustritt. Es ist wahrscheinlich die bereits von Taramelli[5]) erwähnte Lokalität. Vom Eingang des Thälchens bis weit hinein sind da und dort unter der Vegetation die steil südfallenden Glimmerschiefer entblösst. Da, wo der Bach sich gegen Süden wendet und eine kleine Matte eine Art Thalboden bildet, kommen, schön aufgeschlossen, stark verwitterte rote und grüne Tuffe, daran anschliessend, wenige Meter mächtig, Porphyr und Verrucano. Der darauffolgende Muschelkalk schliesst das Thälchen ab, nur der Bach hat sich eine tiefe Rinne hineingefressen, die durch ihre hohen Wasserfälle zwar äusserst malerisch aber ungangbar ist. Es lässt sich jedoch diese ebenfalls steilgestellte Muschelkalkscholle rechts auf Fusspfaden umgehen, und man kommt auf diese Weise am Südrand der Scholle an die Verwerfung, die auf der linken Bachseite undeutlich aufgeschlossen ist. Die Glimmerschiefer fallen 70° SW, an der Verwerfung sind sie ganz zerdrückt und zu Grus zerrieben. Fig. 27 gibt ein schematisches Profil.

---

[1]) T. Taramelli. Il cantone Ticino meridionale etc., Beiträge zur geolog. Karte der Schweiz, Lief. 17.

[2]) Toyokitsi Harada: Das Luganer Eruptivgebiet.

[3]) Schmidt und Steinmann, Geologische Mitteilungen aus der Umgebung von Lugano.

[4]) Blatt Gavirate der italien. Generalstabskarte. 1 : 25,000.

[5]) T. Taramelli, Ticino meridionale, pag. 122 u. ff.

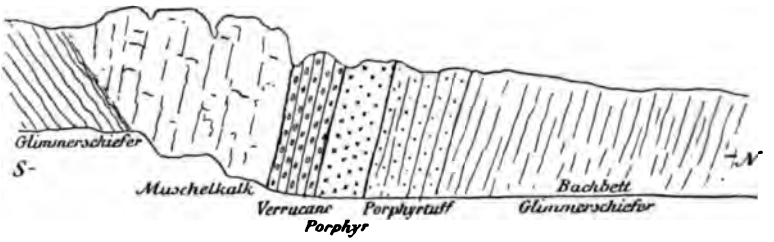


Fig. 27. Schematisches Querprofil der Verwerfung von Voldomino.

Von hier weg südlich über Montegrino bis Castendallo und Grantola herrschen die Glimmerschiefer mit konstantem, sehr steilem SE-Fall. Der Übergang in das NW-Fallen an der Verwerfung von Voldomino wurde nicht direkt beobachtet.

Sehr typisch und der Erwähnung wert ist die Rundhöckerlandschaft an den nördlichen und nordwestlichen Abhängen des Monte Sette Termini. Die äusserst spärliche Vegetation und das kleine Knieholz lassen diese Abhänge ganz steil erscheinen, im Gegensatz zu dem fruchtbaren Gelände im Bereich der umliegenden Dörfer.

Die grosse Verwerfung Bedero-Brusinpiano ist wegen der Bedeckung mit Erraticum an den Gehängen des Monte Marzio in der Nähe der Profillinie nicht zu beobachten. Sie wurde nach Massgabe der Verhältnisse am benachbarten Monte di Sera, sowie der Profile von Taramelli in unsern Querschnitt eingetragen.

Eine Erörterung verlangen noch die krystallinen Schiefer von Boarezzo und ihre Umgebung. C. Schmidt lässt sie in seinem Profil[1]) von Porphyrit umschlossen sein, auf welchen erst beiderseits der Quarzporphyr folgt. Ersterer ist aber nicht zu beobachten, im Gegenteil befindet sich nördlich ganz in der Nähe des 55° SE fallenden Glimmerschiefers ein grosser Steinbruch in typischem, rotem, drusigem Valganagranit. Und auch südlich scheint das stark zersetzte Nebengestein des Glimmerschiefers eher ein roter Granit als der braune Porphyr zu sein, welcher weiter südlich des Dorfes die Thalgehänge bildet. Es wurde deshalb an dieser Stelle die den faktischen Verhältnissen besser entsprechende Darstellung Harada's[2]) dem Profil zu Grunde gelegt.

Noch einige Worte über das südliche Alpenvorland, soweit es durch unser Profil berührt wird. Bei Arcisate beugen die meso-

[1]) C. Schmidt, loc. cit. Prof. II.

[2]) Harada, loc. cit. Taf. II.

zoischen Sedimente zur Tiefe; das oberste Sichtbare ist obere Trias, die Jura- und Kreidebildungen, welche wenige Kilometer weiter westlich bei Induno aufgeschlossen sind, liegen hier bereits unter der diluvialen Decke. Erst weiter östlich treten sie wieder hervor. Tiefere Thaleinschnitte gibt es auf unserer Profillinie erst weiter im Süden. Das Thal der Lanza, welches bei Cazzone ca. 50 m. tief eingeschnitten ist, zeigt folgendes Profil. (Fig. 28).

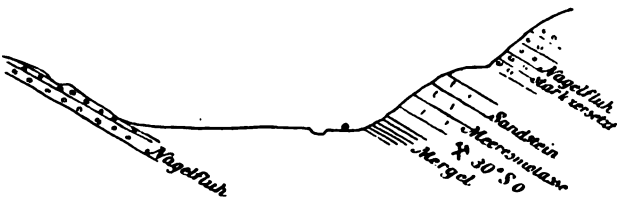


Fig. 28. Profil der Molasse im Lanzathal bei Molino del Trotto.

Dies sind die einzigen in der Profillinie zu Tage tretenden ältern Sedimente, südlich des Lanzathals gegen Binago liegt Erraticum, und ebenso nördlich gegen Arcisate. Doch unterblieb eine nähere Verfolgung der Moränenwälle, welche zu viel Zeit beansprucht hätte.

Unter dem Luganer Eruptivgebiet verstehen wir also diejenigen Gegenden zwischen Luganer- und Langensee, welche durch das Auftreten altvulkanischer Gesteine charakterisiert sind; Gegenden, die sonst teils dem Seegebirge, teils der südlichen Randzone zuzuzählen wären. Wir erkennen auf dem Profil die Decken der verschiedenalterigen und verschiedenartigen Eruptivgesteine, die nachträglich entstandenen Verwerfungsspalten, sowie das Untertauchen der südlichen Randzone unter die lombardische Tiefebene als die tektonischen Aeusserungen des Absinkens der norditalienischen Tiefebene.

XII. Schlusswort.

Indem wir auf die Einzeldarstellung der verschiedenen Zonen verweisen, erübrigt uns noch, das Verhältnis derselben untereinander zu erörtern und einige Bemerkungen allgemeiner Natur anzuschliessen.

Sehr deutlich springt der Kettengebirgscharakter der Alpen in die Augen, ebenso die Dreiteilung in eine nördliche Randzone, eine krystallinische Mittelzone und eine südliche Randzone. Wir erkennen die rudimentäre Ausbildung der südlichen Randzone im Vergleich zur nördlichen, was seinen Grund zum Teil darin hat, dass die über der Trias liegenden Sedimente erodiert und jetzt unter den Alluvionen der

lombardischen Tiefebene versteckt sind. Das Absinken zu der letzteren erfolgt teils durch Abbeugen der Sedimentdecke zur Tiefe, teils entlang Verwerfungsspalten wie am Monte Marzio. Überhaupt sehen wir die Gebirgsbildung am Südrand der Alpen mehr durch Verwerfungen, am Nordrand mehr durch Falten sich auslösen.

Noch unvollständig sind unsere Kenntnisse bezüglich der südlichen Hälfte der krystallinen Mittelzone vom Langensee bis ins Rhonethal. Die Natur der Gesteine und ihre Lagerung sind bekannt, aber über das Alter grosser Schichtkomplexe und ihre normale Stellung im Schichtverband sind wir noch im Unklaren, und die Versuche, in diesen Gegenden den Faltenwurf klarzulegen, entbehren noch vollständig jener Sicherheit, mit welcher auf der Nordseite der Alpen der Aufbau und die tektonische Bedeutung einzelner Gebirgsglieder festgestellt worden ist. Wir erkennen im Seegebirge eine alte Centralmasse, aber beim Amphibolitzug von Ivrea suchen wir vergebens nach einer befriedigenden Erklärung, und das Tessinermassiv bietet noch manch ungelöstes Rätsel. Im Gebiete des Val Antigorio ist man neuerdings zu den alten Ansichten Gerlachs zurückgekehrt und hat versucht, der Theorie der Überschiebung des Antigoriogneisses eine feste Grundlage zu geben, aber hier bereitet der Anschluss nach Süd wie nach Nord, auf unserer Profillinie wenigstens, Schwierigkeiten. Die einander gegenüberstehenden Ansichten über die geologische Struktur der Glanzschieferzone rufen nach weiteren Untersuchungen, unser Profil schliesst sich sehr bestimmt der Auffassung als Grabenversenkung an. Die westliche Fortsetzung des Gotthardmassives weicht in der Profillinie sehr von den Verhältnissen des Mittelstückes ab, indem nur die eine Hälfte des Fächers entwickelt oder der Fächer ganz einseitig geworden ist.

Erst im Aarmassiv gelangen wir zu einem Gebirgsgliede, dessen Erklärung in den Hauptzügen auf etwas festerer Grundlage beruht und das sich uns darstellt als ein durch Seitendruck aus Süden entstandenes System nördlich übergelegter Massen. Dasselbe Ergebnis liefert das Studium der nördlichen Kalkalpen. Sie spiegeln sehr schön in der Abnahme der Faltung vom Aarmassiv durch die Jura- und Kreideketten in die Molasse die Abnahme der Intensität des Druckes von Süd nach Nord wieder, bis endlich die alpine Bewegung in den schwachen Wellen der Molasse ganz ausklingt.

Perm

Verrucano

Zwischenbildungen (Verrucano bis Dogger)
Am Nordrand des Aarmassivs

Jüngere metamorphe krystallin. Schiefer

mesozoisch bis cambrisch

Marmor

Zoisitphyllite

Kalkglimmerschiefer

Granatglimmerschiefer

Zweiglimmergneisse & Glimmerschiefer

Sericitgneisse & Schiefer

Hornblendeschiefer

Aeltere krystallin. Schiefer

Gneiss & Glimmerschiefer

Augengneiss (zweiglimmerig)

Antigoriogneiss

Tiefengesteine

Centrale Granitgneisszone (Prologin etc.)

Dichte, massige Amphibolite Pyroxengesteine
Peridotite & Serpentine.

Diorit

Gang- & Ergussgesteine

Porphyrtuff

Quarzporphyr

Porphyrit

Autog. d[illegible]anne.

Literatur.

1851. **B. Studer**, Geologie der Schweiz.

1863. **F. Lang**, Geologische Skizze der Umgebung von Solothurn.

1872. **F. J. Kaufmann**, Gebiete der Kantone Bern, Luzern, Schwyz und Zug, enthalten auf Blatt VIII, Lieferung XI, der Beiträge zur geologischen Karte der Schweiz.

F. Giordano, Esame geologico della catena alpina del San Gottardo. Mem. d. R. Comit. geol. II. Firenze.

C. Mœsch, Der Jura in den Alpen der Ostschweiz.

B. Studer, Index der Petrographie und Stratigraphie der Schweiz und ihrer Umgebungen.

1873. **K. v. Fritsch**, Das Gotthardgebirge, mit 1 geologischen Karte und 4 Tafeln. Beiträge zur geologischen Karte der Schweiz. Lief. XV.

1876. **C. Mœsch**, Reisebericht über meine diesjährigen geologischen Beobachtungen. Verhandlungen der schweizerischen naturforschenden Gesellschaft in Basel.

1878. **A. Heim**. Untersuchungen über den Mechanismus der Gebirgsbildung im Anschluss an die geologische Monographie der Tödi-Windgällengruppe.

1880. **A. Baltzer**, Der mechanische Kontakt von Gneiss und Kalk im Berner Oberlande. Beiträge zur geologischen Karte der Schweiz. Lieferung XX.

F. M. Stapf, Geologisches Profil des St. Gotthard in der Axe des grossen Tunnels, während des Baues (1873—1880) aufgenommen.

T. Taramelli, Il cantone Ticino meridionale ed i paesi finitimi. Beiträge zur geologischen Karte der Schweiz. Lieferung XVII.

1881. **Fr. Rolle**, Das südwestliche Graubünden und das nordöstliche Tessin, enthalten auf Blatt XIX. Beiträge zur geologischen Karte der Schweiz. Lieferung XXIII.

1882. **Th. Studer**, Geologische Beobachtungen im Gebiete des Schwarzhornmassivs. Mitteilungen der naturforschenden Gesellschaft in Bern.

1883. **H. Gerlach**, Die Penninischen Alpen. Beiträge zur geologischen Karte der Schweiz. Lieferung XXVII.

T. Harada, Das Luganer Eruptivgebiet. Neues Jahrbuch für Mineralogie etc. Beilageband II.

1885. **T. Taramelli**, Note geologiche sul bacino idrografico del Fiume Ticino. Boll. d. soc. geol. ital. Vol. IV.

1886. **F. J. Kaufmann**, Die Emmen- und Schlierengegenden nebst Umgebungen bis zur Brünigstrasse und der Linie Lungern-Grafenort. Beiträge zur geologischen Karte der Schweiz. Lieferung XXIV. 1.

1888. **A. Baltzer**, Das Aarmassiv (mittlerer Teil) nebst einem Abschnitt des Gotthardmassives, enthalten auf Blatt XIII. Beiträge zur geologischen Karte der Schweiz. Lieferung XXIV. 4.

U. Grubenmann, Über die Gesteine der sedimentären Mulde von Airolo. Mitteilungen der thurgauischen naturforschenden Gesellschaft. Heft VIII.

Marguerie und **Heim,** Die Dislokationen der Erdrinde.

1889. **C. Schmidt,** Zur Geologie der Schweizer Alpen.

1890. **T. G. Bonney.** On the crystalline schists and their relation to the mesozoic rocks in the Lepontine Alps. Quart. Journ. of geol. soc. p. 187—236. (1890).

U. Grubenmann, Zur Kenntnis der Gotthardgranite. Verhandlungen der thurgauischen naturforschenden Gesellschaft. Heft IX.

Schmidt und **Steinmann,** Geologische Mitteilungen aus der Umgebung von Lugano. Eclog. geol. helvet. Vol II. Nr. 1.

1891. **A. Heim,** Geologie der Hochalpen zwischen Reuss und Rhein. Beiträge zur geologischen Karte der Schweiz. Lieferung XXV.

C. Schmidt, Beiträge zur Kenntnis der im Gebiete von Blatt XIV auftretenden Gesteine. Anhang zu vorigem.

1892. **Die Wildbachverbauung der Schweiz.** Herausgegeben im Auftrag des eidgenössischen Departements des Innern vom Oberbauinspektorat. Heft II.

1893. **C. Burkhardt,** die Kontaktzone von Kreide und Tertiär am Nordrande der Schweizeralpen vom Bodensee bis zum Thunersee. Beiträge zur geologischen Karte der Schweiz. Lieferung XXXII.

E. v. Fellenberg und **C. Mœsch,** Geologische Beschreibung desjenigen Teiles von Blatt XVIII, welcher zwischen dessen Nordrand und der Rhone liegt. Beiträge zur geologischen Karte der Schweiz. Lieferung XXI.

H. Schardt. Gneiss d'Antigorio. Arch. d. scienc. phys. et nat. Tom. XXX.

1894. **Livret-guide géologique suisse.**

C. Mœsch, Die Kalk- und Schiefergebirge zwischen Reuss- und Kienthal. Beiträge zur geologischen Karte der Schweiz. Lieferung XXIV. 3.

A. Rothpletz, Ein geologischer Querschnitt durch die Ostalpen.

1895. **Traverso Stefano,** Geologia dell' Ossola. Genova. 1895.

Karten.

Geologische Karte der Schweiz. 1:100000. Blätter 7, 8, 13, 18, 19, 23, 24.

Studer und **Escher.** Geologische Karte der Schweiz. II. Auflage.

1873. **K. v. Fritsch,** Geognost. Karte des St. Gotthard. 1:50,000.

1883. **T. Harada.** Karte des Luganer Eruptivgebietes. N. J. f. M. B. B. II.

1885. **F. M. Stapf,** Geologische Übersichtskarte der Gotthardbahnstrecke. 1:20,000

1891. **E. Kissling,** Karte der inneren Moränen des diluvialen Rhonegletschers. Manuskript.

1894. **A. Heim** und **C. Schmidt,** Geologische Karte der Schweiz. 1:500,000.

C. Wagner.

Eingereicht den 12. Juni 1895.

Über die Darstellung einiger bestimmten Integrale durch Bessel'sche Funktionen.

Bei meinen Untersuchungen über die Bessel'schen Funktionen I. Art mit vielfachem Argumente — es handelt sich darum, die Funktionen mit vielfachem Argumente durch ebensolche Funktionen mit einfachem Argumente möglichst elegant darzustellen — stiess ich auf verschiedene bestimmte Integrale von der Form

$$\int_0^{\pi} \cos^2(x \sin\varphi)\, d\varphi, \quad \int_0^{\pi} \cos^3(x \sin\varphi)\, d\varphi, \quad \ldots \quad \int_0^{\pi} \cos^n(x \sin\varphi)\, d\varphi,$$

welche sich leicht durch Bessel'sche Funktionen erster Art mit gleichem Index, in unserem Falle Null, und vielfachem Grundargumente, in unserem Falle x, ausdrücken lassen. Ich glaube, dass diese Entwicklungen einigen Wert besitzen, zumal ich in der diesbezüglichen Litteratur — soweit sie mir zugänglich war — keine derartigen ähnlichen Beziehungen zu finden vermochte. Andererseits zeigt aber diese Darstellung eine ganz eigentümliche Ähnlichkeit mit Entwicklungen der gewöhnlichen Cosinus-Funktion, so dass auch hieraus, wie ich glaube, gefolgert werden darf, dass die Bessel'schen Funktionen in der höheren Analysis eine weit wichtigere Rolle zu spielen berufen sind, als es im ersten Augenblicke den Anschein hat. Sie vertreten in gewissem Sinne die Cosinus-Funktion in der höheren Analysis. Ich werde am Schlusse vorliegender Arbeit hierauf zurückkommen.

Die Bessel'sche Funktion erster Art für den Index Null und das Argument x sei gegeben in der einfachen Form

$$\overset{0}{J}(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \cos(x \sin\varphi)\, d\varphi.$$

Für das Argument $x + y$ wird:

$$\overset{0}{J}(x+y) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \cos([x+y]\sin\varphi)\, d\varphi$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \Big\{\cos(x\sin\varphi)\cos(y\sin\varphi) - \sin(x\sin\varphi)\sin(y\sin\varphi)\Big\}\, d\varphi$$

oder für $x = y$

$$\overset{0}{J}(2x) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \Big\{\cos^2(x\sin\varphi) - \sin^2(x\sin\varphi)\Big\}\, d\varphi.$$

Ersetzt man hierin die Sinusfunktion in bekannter Weise durch die Cosinusfunktion, so entsteht

$$\overset{0}{J}(2x) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \cos^2(x\sin\varphi)\, d\varphi - 1$$

oder

1) $$\int_0^{\pi} \cos^2(x\sin\varphi)\, d\varphi = \frac{\pi}{2}\Big\{\overset{0}{J}(2x) + \overset{0}{J}(0)\Big\}$$

weil ist:

$$\overset{0}{J}(0) = 1.$$

In ganz ähnlicher Weise kann man $\overset{0}{J}(3x)$ berechnen, wobei das Integral

$$\int_0^{\pi} \cos^3(x\sin\varphi)\, d\varphi$$

auftritt, welches in folgender Form durch Bessel'sche Funktionen ausgedrückt ist:

2) $$\int_0^{\pi} \cos^3(x\sin\varphi)\, d\varphi = \frac{\pi}{4}\Big\{\overset{0}{J}(3x) + 3\,\overset{0}{J}(x)\Big\}.$$

In gleicher Weise fortfahrend erhält man

$$3)\qquad \int_0^{\pi} \cos^4(x\sin\varphi)\,d\varphi = \frac{\pi}{8}\left\{\overset{0}{J}(4x) + 4\overset{0}{J}(2x) + 3\overset{0}{J}(0)\right\}$$

u. s. f.

Für die allgemeine Formel hat man zwei Fälle zu unterscheiden:

I) $n =$ einer ungeraden Zahl, 1, 3, 5 ... $2m+1$.

$$A:\quad \int_0^{\pi} \cos^n(x\sin\varphi)\,d\varphi = \frac{\pi}{2^{n-1}}\left\{\overset{0}{J}(nx) + \binom{n}{1}\overset{0}{J}((n-2)x) + \binom{n}{2}\overset{0}{J}((n-4)x) + \cdots\right\},$$

welche Reihe so weit fortzusetzen ist, bis das Argument x auftritt, z. B.:

$$\int_0^{\pi} \cos^9(x\sin\varphi)\,d\varphi = \frac{\pi}{256}\left\{\overset{0}{J}(9x) + 9\overset{0}{J}(7x) + 36\overset{0}{J}(5x) + 84\overset{0}{J}(3x) + 126\overset{0}{J}(x)\right\}.$$

II) $n =$ einer geraden Zahl, 0, 2, 4 ... $2m$.

$$B:\quad \int_0^{\pi} \cos^n(x\sin\varphi)\,d\varphi = \frac{\pi}{2^{n-1}}\left\{\frac{1}{2}\binom{n}{\frac{n}{2}}\overset{0}{J}(0) + \binom{n}{\frac{n}{2}-1}\overset{0}{J}(2x) + \binom{n}{\frac{n}{2}-2}\overset{0}{J}(4x) + \cdots\right\},$$

welche Reihe so weit fortzusetzen ist, bis das Argument nx auftritt, z. B.

$$\int_0^{\pi} \cos^6(x\sin\varphi)\,d\varphi = \frac{\pi}{32}\left\{10\overset{0}{J}(0) + 15\overset{0}{J}(2x) + 6\overset{0}{J}(4x) + \overset{0}{J}(6x)\right\},$$

wobei zu bemerken ist, dass man hat

$$\binom{n}{0} = \binom{n}{n}$$

nach der bekannten Formel:

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}.$$

Beide Formeln A und B lassen sich unter gewissen Voraussetzungen in eine einzige zusammenfassen, worüber ich in einer besonderen Arbeit mitteilen werde.

Diese Formeln erscheinen mir deshalb bemerkenswert, weil man mit ihrer Hülfe, wenn man die Funktionen mit mehrfachem Argumente durch solche mit einfachem Argumente ausdrückt, zu einer verhältnismässig einfachen Darstellung fraglicher Integrale gelangen kann. Mit den diesbezüglichen Untersuchungen bin ich gegenwärtig beschäftigt. Es handelt sich hierbei hauptsächlich darum, zu untersuchen, ob das Integral

$$\int_0^{\pi} \cos^2 (x \sin \varphi)\, d\varphi$$

nicht vielleicht als J-Funktion dargestellt werden kann, oder, mit anderen Worten, ob die in folgender Gleichung

$$\int_0^{\pi} \cos^2 (x \sin \varphi)\, d\varphi = A \cdot \left[\int_0^{\pi} \cos (x \sin \varphi)\, d\varphi\right]^2 = A \cdot [\pi \cdot \overset{0}{J}(x)]^2$$

vorkommende, noch unbekannte Grösse A in irgend einer Weise als J-Funktion anzusehen ist, d. h. als Produkt oder Quotient von J-Funktionen mit einfachem Argumente betrachtet werden kann.

Für den Spezialfall

$$x = 1$$

entsteht unter sonst gleichen Bedingungen aus Gleichung A die Gleichung:

$$\int_0^{\pi} \cos^n (\sin \varphi)\, d\varphi = \frac{\pi}{2^{n-1}} \left\{ \overset{0}{J}(n) + \binom{n}{1} \overset{0}{J}(n-2) + \binom{n}{2} \overset{0}{J}(n-4) + \cdots \right\}$$

fortgesetzt, bis das Argument 1 auftritt, und aus Gleichung B die Relation:

$$\int_0^{\pi} \cos^n (\sin \varphi)\, d\varphi = \frac{\pi}{2^{n-1}} \left\{ \frac{1}{2} \binom{n}{\frac{n}{2}} \overset{0}{J}(0) + \binom{n}{\frac{n}{2} - 1} \overset{0}{J}(2) + \binom{n}{\frac{n}{2} - 2} \overset{0}{J}(4) + \cdots \right\}$$

fortgesetzt, bis das Argument n auftritt.

Die vorher angedeutete Ähnlichkeit mit Entwicklungen der gewöhnlichen Cosinus-Funktion

$$\cos x$$

möge durch folgende Gleichungen bewiesen sein:

Man hat

$$\cos^0 x = 1$$
$$\cos^1 x = \cos x$$
$$\cos^2 x = \frac{1}{2}\{\cos(2x) + \cos 0\}$$
$$\cos^3 x = \frac{1}{4}\{\cos(3x) + 3\cos x\}$$

oder allgemein:

I. n = einer ungeraden Zahl, 1, 3, 5 ... 2m + 1

$$\cos^n x = \frac{1}{2^{n-1}}\left\{\cos(nx) + \binom{n}{1}\cos((n-2)x) + \binom{n}{2}\cos((n-4)x) + \cdots\right\}$$

fortgesetzt bis zum Gliede cos x.

II. n = einer geraden Zahl, 0, 2, 4 ... 2m

$$\cos^n x = \frac{1}{2^{n-1}}\left\{\frac{1}{2}\binom{n}{\frac{n}{2}}\cos 0 + \binom{n}{\frac{n}{2}-1}\cos(2x) + \binom{n}{\frac{n}{2}-2}\cos(4x) + \cdots\right\}$$

fortgesetzt bis zum Gliede cos (n x).

Ludwig Schläfli.

(1814 bis 1895.)

Zum Andenken

an die

Errichtung des Grabmonumentes Schläfli's und der Beisetzung der sterblichen Reste Jakob Steiner's

an der hundertjährigen Feier des Geburtstages des Letzteren

am 18. März 1896

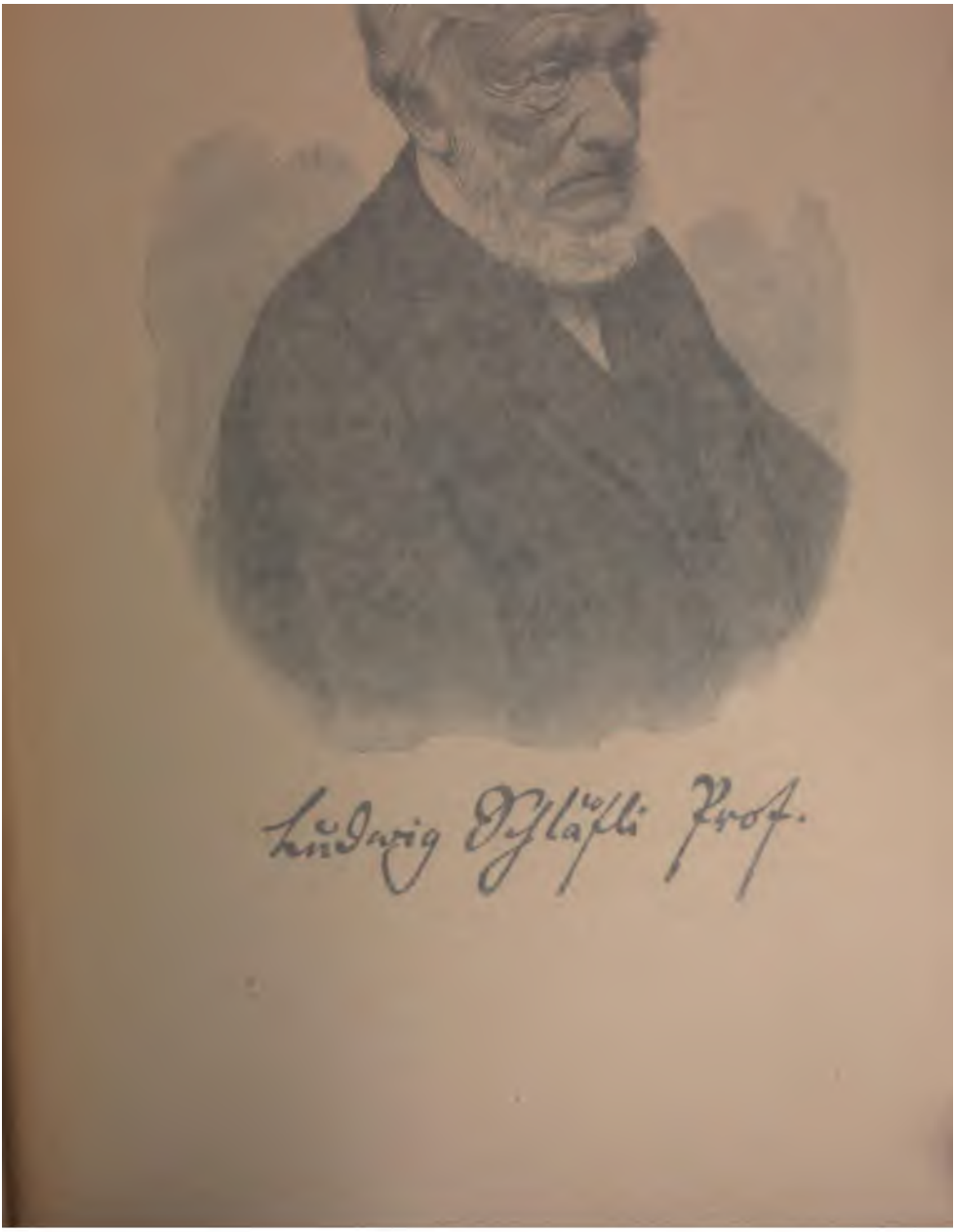
gewidmet von

Dr. phil. J. H. Graf, ord. Prof. der Mathematik an der Hochschule Bern.

An *Hugo Schiff* in Florenz schrieb *Schläfli* in seiner bekannten festen, altmodischen, aber charakteristischen Schrift:

«An eine Autobiographie werde ich nicht Hand legen, denn «mein Leben war zu unbedeutend; alle jungen Männer, mit denen «ich fort und fort bekannt werde, haben mehr Bewusstsein, als ich im «selben Alter gehabt habe. Das Wenige, was ich sagen kann, will «ich Ihnen sogleich hin schreiben. Als ich in die Bürgerschule kam «und als unterster auf der hintersten Bank sass, zeichnete der alte «Lehrer auf meine Schiefertafel ein Quadrat und einen Kreis und «zwar sehr gut und hiess mich das nachmachen und die Tafel damit «füllen. Ich hatte daran eine unvergessliche Freude. — Die Aus-«ziehung der dritten Wurzel lernte ich von einem Schwager meiner «Mutter, der Weber und Trüllmeister, vielleicht auch Feldmesser war. «Die Destillation und die Bereitung des Wasserstoffs aus Wasserdampf «und glühendem Eisen erklärte mir einmal ein Oheim, der Arzt war, «und schloss mir damit eine neue Welt auf. Ein Schulkamerad, der «von einem deutschen Schuhmacher (der, wie es scheint, Freude an «der Erkenntniss der Natur hatte) ein Buch geliehen hatte, las aus «demselben in der Schulstube vor der Ankunft des Lehrers die «Kepler'schen Gesetze vor und sprach sich über die allgemeine Gravi-«tation aus. Das wirkte wie ein Blitz in die Finsterniss.»

Mit diesen einfachen Worten *Schläfli's* sei es uns gestattet, seine Biographie einzuleiten.



Ludwig Schläfli Prof.

Ludwig Schläfli, von Burgdorf, wurde am 15. Januar 1814 zu Grasswyl geboren und am 28. Januar in der Kirche zu Seeberg getauft.[1]) Sein Vater, ein Handelsmann, war *Johann Ludwig Schläfli* von Burgdorf, *Daniel's* sel. Sohn, und seine Mutter *Magdalena Aebi* von Grasswyl.[2]) Weshalb die Familie zeitweise in Grasswyl gewohnt hat, ist nicht ganz sicher; sie kehrte aber bald nach Burgdorf zurück. *Ludwig Schläfli* ist der älteste von drei Brüdern gewesen; der Bruder mittleren Alters war im Kopfrechnen ein Original, wie *Winkler, Inaudi* und andere. und ein Schreiber; daneben trieb er viel Musik, war sehr oft in Geldnöthen und führte ein vacirendes Leben. Pfarrer D. *Haas* in Gampelen sandte an Professor *Schläfli* vor einigen Jahren ein von ihm sehr fein ausgeführtes Bild dieses seines Bruders, das dessen interessanten Kopf gut wieder zu geben scheint. Dieser unglückliche Bruder kam schliesslich in den Spital nach Burgdorf, von wo er eines Tages entwich und zu seinem in Bern lebenden Bruder *Ludwig* gehen wollte. Man fand ihn todt in der Strassenschale am Aargauerstalden, und Professor *Schläfli* stellte seine Identität in der Todtenkammer der Insel fest.

Wir führen diese Details an, um zu zeigen, dass der Familie die mathematische Begabung angeboren war. Sein jüngerer, noch in Burgdorf lebender Bruder *Emanuel* ist Kaufmann.

Ludwig Schläfli besuchte die Bürgerschule in Burgdorf und genoss den ersten Unterricht in der Mathematik bei Herrn *Hopf,* dem Vater des Dekan *Hopf* sel. von Thun. Wenn *Hopf* seine Beweise an der Wandtafel vorführte, so war *Schläfli* oft der einzige, der sie begriff und dann zu Hause schriftlich ausführte. Grosse Freude hatte er an der bekannten Sammlung von Beispielen, Formeln und Aufgaben aus der Buchstabenrechnung und Algebra, von *Meyer Hirsch,* 1804 zum ersten Mal erschienen. Mit unermüdlichem Eifer hat er sie durchgearbeitet und dieselbe auch später in seinen Vorlesungen

[1]) Auszug aus dem Taufregister zu Seeberg:
1814 den 28. Jenner ward hier getauft:
ehelicher *Ludwig.*
Parr. { *Joh. Ludwig Schläfli, Daniel's* von Burgdorf,
Magdalena Aebi von Obergrasswyl.
Tes. { Hr. *Joh. Ludwig Schläfli,* des Täuflings Vater,
Joh. Jakob Aebi.
Anna Aebi, der Mutter Geschwister,
Geben zu Seeberg, den 18. October 1814. *Nötinger,* Pfr.

[2]) Mittheilungen des Herrn *L. Schnell,* Fürsprecher und Notar in Burgdorf.

durchgenommen, wie ein Collegienheft von Professor Dr. *G. Sidler* beweist. Unstreitig wurde seine geradezu erstaunliche Fertigkeit im Rechnen durch diese Uebungen sehr geschärft. Erst 15jährig trieb er von sich aus Differenzialrechnung, indem er auf der Bibliothek Burgdorf den I. Band von *Kästner's* Analysis des Unendlichen fand. Beim Studium von Log. (a + b i) erhielt *Schläfli* schon den Anfang zu seiner allgemeinen Auffassung der Zahl.

Es ist bekannt, dass sein congenialer, engerer Landsmann, der grosse Mathematiker *Jakob Steiner* von Utzenstorf erst mit dem 17. Jahre auf eine höhere Schule, nämlich zu Pestalozzi nach Iferten, gekommen ist. Er musste als Bauernjunge an den Markt-Dienstagen auf den Wochenmarkt nach Bern; die Bauern behielten ihn oft bei sich, um sich ihre Käufe von ihm vorrechnen zu lassen, wobei sie ihm für jede Rechnung einen halben Batzen gaben. Auch *Ludwig Schläfli's* Vater wusste lange nicht, was er mit seinem Sohn anfangen sollte und dachte einen ambulanten Kaufmann (Hausirer) aus ihm zu machen. Mit einem Korb voll Waaren sollte er die umliegenden Dörfer besuchen, die Kostenpreise der Gegenstände wurden ihm mitgeteilt; allein nach der ersten Woche kehrte er abgemagert und hungrig nach Hause zurück. Verkauft hatte er fast gar nichts, weil . . . «er nicht begreifen konnte, dass man eine Sache theurer verkaufe, als man sie eingekauft habe». So liess man denn *Ludwig* studiren.

Im Jahre 1829 erhielt er ein Stipendium, bezog das Gymnasium in Bern und gab sich da gründlichen philologischen und mathematischen Studien hin. Damals ertheilte *B. Studer* den Unterricht in der Mathematik am Gymnasium. Einzelne seiner Monatszeugnisse sind noch vorhanden. Es mag dem etwas linkischen Jüngling schwer geworden sein, sich in die geregelte Schuldisciplin einer Klasse zu fügen, an sachbezüglichen Bemerkungen fehlt es nicht. Während *Studer* im Mai 1830 ihm das Zeugniss ausstellt, mit der Mathematik sei er noch nicht hinreichend bekannt, weise aber bereits schöne Kenntnisse auf, so sagt er schon im Juni, dass er zu den erfreulichsten Erwartungen berechtige, im November ist *Studer* sehr zufrieden mit ihm, obgleich ihm *Schläfli* nicht sehr sympathisch war. Die Veranlassung dazu war eigentlich gering. *Studer* hatte *Schläfli* ein Werk von *Lacroix*, wahrscheinlich «Traité élémentaire du calcul différentiel et du calcul intégral» geliehen, und *Schläfli* hatte es, um dasselbe besser gebrauchen zu können, und ohne Studer zu fragen, einbinden lassen.

Studer hielt *Schläfli* überhaupt für einen Querkopf, mit dem nicht viel zu machen sei. Nach zweijährigem Besuch des Gymnasiums wurde er nach den bestehenden Schuleinrichtungen in die Philosophie d. h. in die damalige Akademie promovirt. Die Eintrittsmatrikel, von Dr. *Eduard Henke*, Prorektor, unterschrieben, ist vom 7. Mai 1831 datirt. Hier unterrichtete *J. F. Trechsel*, auch ein Burgdorfer, Mathematik und Physik, der ihn aber, weil er *Schläfli* kannte, sofort von den Unterrichtsstunden in der Mathematik dispensirte; die Physikstunden hingegen besuchte *Schläfli*. Beim Aufschlagen eines Bandes der Petersburger Memoiren traf er auf eine Abhandlung *Euler's* über Hydromechanik. Da fiel sein Blick auf den 2. Differenzial-Quotienten und nach seinen eigenen Worten fiel es wie Schuppen von seinen Augen, dass er damit den Begriff der Beschleunigung habe.

Nach einem Brief eines Schulkameraden, *A. Willmann* in New-York (26. Dezember 1877), soll *Schläfli* 1833—1834 im Institut der Herren *Rank*[1]) und *Kreis* in Yverdon gewesen sein, wahrscheinlich um Französisch zu lernen; *Willmann* erkundigt sich auch nach den Schulkameraden *Rupp*, *de Lassey*, *Scherer* u. a.

Es scheint mir dies wohl möglich zu sein, jedoch hat Professor *Schläfli* uns nie von einem solchen Aufenthalt erzählt.

Als im Jahr 1834 die Akademie zur Universität umgewandelt wurde,[2]) trat *Schläfli* in die theologische Fakultät ein und studirte da bis zum Wintersemester 1836/37, wo er einen Theil seines Staatsexamens machte. Am 12. December 1836 wurde er provisorisch bis zum 1. November 1837 unter dem von Oberlehrer *Stähli* gemachten Propositionen zum Lehrer der Mathematik und der Naturlehre an die Burgerschule in Thun gewählt.[3]) Offenbar hatte er eine solche Stelle zu seinem Unterhalte nöthig, und doch war sie anfänglich so schlecht bezahlt, dass kein Anderer sie annehmen wollte. Den ganzen Winter und Sommer hindurch pilgerte er einmal wöchentlich von Thun nach Bern hinunter, um an theologischen Uebungen Theil zu nehmen. Hierauf bestand er das Staatsexamen als Theologe und wurde am 9. September 1838 consecrirt und in's bernische Ministerium

[1]) *Rank* war Lehrer am Pestalozzi'schen Institut gewesen und richtete dann, wahrscheinlich unmittelbar nach *Pestalozzi's* Abgang von Iferten, 1825 sein Institut im dortigen Schlosse ein.

[2]) Seine Matrikel ist datirt vom 11. Februar 1835 und vom Rector *W. Snell* unterschrieben.

[3]) Schreiben von Notar *Völkli*, Burgerrathschreiber.

aufgenommen. Nach damaligem Brauch erhielt er bei der Consecration den Spruch:

«I. Cor. IX 16. 17. Dass ich das Evangelium predige, darf ich mich nicht rühmen, denn ich muss es thun — und wehe mir, wenn ich das Evangelium nicht predigte. Thue ich es gerne, so wird mir gelohnet; thue ich es ungerne, so ist mir das Amt doch befohlen.» Trotz dieser Mahnung fühlte *L. Schläfli* innerlich keine Berufung in das Pfarramt einzutreten. Man erzählt sich, dass er an einem kalten Wintermorgen zu Fuss nach Bern gekommen sei, wo er seine Probepredigt um 10 Uhr hätte abhalten sollen; allein die Herren Examinatoren liessen ihm sagen, vor ein Uhr käme er nicht an die Reihe. Ausgefroren und hungernd hätte er sich um die genannte Zeit präsentirt und gesagt: Jetzt sei er nicht mehr im Stande zu predigen, er habe überhaupt nicht die Absicht Pfarrer zu werden und sich nur des Stipendiums wegen als Theologe eingeschrieben! und doch weiss man von Prof. *Ris*, seinem treuen Freund und Schulkameraden, dass er sein theologisches Examen vorzüglich bestanden hat. Es war sicher ein innerer Werdeprocess, der ihn zwang, am Abend des glücklich absolvirten Examens seinen Eltern, zu deren tiefem Herzeleid zu eröffnen, dass er nicht in's Pfarramt treten wolle, da er «nicht alles glaube».[1]) Und doch muss er seine Probepredigt gehalten haben, sonst wäre er nicht in's bernische Ministerium aufgenommen und im Verzeichniss fortgeführt worden. Immerhin hat seine Weigerung, in's Pfarramt einzutreten, damals einiges Aufsehen erregt. Seine ganze geistige Veranlagung trieb ihn aber auf die Seite der exacten Wissenschaften hinüber. Darum behagte ihm die Lehrstelle in Thun, hier hatte er Gelegenheit sich in das Studium der Mathematik und der Naturwissenschaften zu vertiefen. Die Signatur dieser zehn in Thun verlebten Jahre ist denn auch: «Treuer Unterricht in der Schule und stilles, tiefgründiges Privatstudium». Man könnte sich fragen, wie es dem etwas unbeholfenen jungen Manne mit der Disciplin in der Schule möchte ergangen sein. Sein Unterricht packte die Schüler; *Schläfli* gab viel und verlangte viel; er hielt die Schüler gefesselt; sie bekamen Respekt vor seinem Wissen, so dass sie von allfälligen Ungezogenheiten glücklich abgelenkt wurden. Es erweist sich eben auch bei Schläfli's Lehrjahren, dass der Unterricht das beste

[1]) Mittheilungen von Herrn Dr. *F. Ris* in Thun, der diese Thatsache von der 86jährigen Frau *Minder* von Burgdorf, der Schwester von *Schläfli's* Schulkameraden *Rupp*, hat.

Disciplinarmittel ist und bleibt.[1]) Bei den jährlichen Examina war das Publikum Auge und Ohr und hatte seine helle Freude an dem Lehrer, in dem man den Meister in seinem Fache erkannte. Wir wollen nicht gerade behaupten, dass sich *Schläfli* strenge an den vorgeschriebenen Lehrplan hielt, deswegen hatte er etliche Auseinandersetzungen mit der vorgesetzten Behörde; er ging eben auch hier seinen eigenen Weg. Wie sein Unterricht aufgenommen wurde, zeigt eine Bemerkung des Erziehungsdepartements: «Der Lehrer der Natur-«geschichte würde seinem Unterrichte in der Botanik noch mehr «Interesse und Erfolg verschaffen, wenn er hie und da mit seinen «Schülern Excursionen machen würde».[2]) Das musste man ihm, dem eifrigen Naturfreund, nicht zum zweiten Mal sagen; die Bekanntschaft mit dem bedeutenden Botaniker, alt Rathsherr *Trog*, dem genauen Kenner der schweizerischen Pilze und Schwämme, wie auch eine Reihe von Ausflügen, die fast jeden Samstag Nachmittag ausgeführt wurden und die nahe Stockhornkette und ihre Umgebung zum Ziel hatten, bildeten seine Beobachtungsgabe so aus, dass er bald ein Meister im Fach der Pflanzenkunde wurde. Ein solcher Ausflug[3]) wäre ihm bald recht übel bekommen, denn eines Samstag Abends kam er im Pfarrhaus Amsoldingen, wo sein Freund und Schulkamerad, *August Thellung* als Pfarrer residirte, ganz erschöpft, mit zerrissenen Kleidern und ohne Hut an; er hatte sich beim Suchen nach einer seltenen Pflanze verstiegen, war eine grosse Strecke hinuntergerutscht und hatte sich nur mit Mühe retten können. Gestärkt und wieder mit dem Nöthigen versehen, pilgerte er dann Thun zu.

Schläfli war in seinen mathematischen Studien bis jetzt Autodidakt gewesen, denn seine Lehrer hatte er längst überholt. Oft hat er das Bedürfniss gefühlt, bei damaligen Koryphäen der Wissenschaft, bei seinem Landsmann *J. Steiner*, bei *C. G. J. Jakobi* und *Lejeune-Dirichlet* und anderen, sich Belehrung und Anregung zu holen, und schon war er, wie ein Brief seines Freundes *Ris* vom 14. September 1843 beweist, im Begriff, zu demselben nach Dresden zu reisen und dann nach Berlin zu gehen. Da traf *J. Steiner* in Bern ein. Demselben wurde vom Physiologen *A. Valentin*, Vater, der selbst zeitlebens ein tüchtiger Mathematiker gewesen ist, von *Schläfli* gesprochen, und *Valentin* vermittelte mit *Steiner* eine Zusammenkunft im Zunfthaus zu

[1]) Sein Notizbuch über seine Thunerschüler ist noch vorhanden.

[2]) Akten auf der «schweizerischen Landesbibliothek.»

[3]) Mittheilungen von Hrn. *August Thellung*, a. Pfarrer in Bern.

Mohren in Bern. Dort gab *Steiner Schläfli* einen Beweis *Jakobi's* über die Vertauschung der Variablen bei der Differentiation, eine Formel, die *Steiner* nicht ganz gut in ihrer Anwendung auf die Theorie der Polaren begriff. *Schläfli* hingegen machte ihm die Sache sofort klar, und dies imponirte *Steiner* so gewaltig, dass er sich, allerdings nach seiner Weise, des jungen Menschen anzunehmen entschloss. Er rieth ihm ab, nach Berlin zu gehen, da er jetzt dort niemand antreffe. Am besten sei es, wenn er gleich mit ihm, *Dirichlet* und *Jakobi* nach Italien käme; dort in Rom, wo alle, wenigstens die zwei Letztern, den Winter über verbleiben wollen, könne er den Umgang mit ihnen am besten pflegen.

Ende August 1857 traf *Hugo Schiff Dirichlet* und den Anatomen *Henle* auf dem Vierwaldstätter-See, wo *Dirichlet* viel nach *Schläfli* fragte und von jener Romreise erzählte. Keiner der drei Berliner Mathematiker hätte ein Wort Italienisch gewusst; da habe *Steiner* ihnen erklärt, er habe in Bern einen Bekannten, einen ländlichen Mathematiker, für die Welt ein Esel, aber Sprachen lerne er wie ein Kinderspiel, den wollen sie als Dolmetscher mit sich nehmen. Dies ist für das Verhältniss von *Steiner* und *Schläfli* charakteristisch, wie denn *Steiner* oft auch *Schläfli* als den genialsten Tölpel bezeichnet hat, der ihm in der Welt vorgekommen sei.

Wie dem auch sei, Thatsache ist, dass *Schläfli* nach einigem Bedenken sich entschloss mitzugehen und Anstalten traf, den Winter in Italien zuzubringen. Schultheiss *C. Neuhaus* bewilligte ihm am 13. September den nachgesuchten Urlaub. Auf seine Kosten stellte er in Thun einen Stellvertreter — es war Herr *Deyhle* —, entlehnte das Reisegeld bei einem Handelsmann *Gisi*, der sein Vermögen auf den jonischen Inseln gemacht hatte und in Thun lebte. Die Gebrüder *Knechtenhofer* im Bellevue bei Thun gaben ihm nach Rom einen Empfehlungsbrief mit. Der vom 29. Sept. ausgestellte Pass enthält die Bezeichnung: «Front haut». So reisten denn *Schläfli* und *Steiner* den 1. Oktober 1843 von Bern ab,[1]) den beiden anderen nach, die schon voraus waren. *C. W. Borchardt* war auch bei der Partie. Die Reise ging per Post nach Lausanne-Ouchy, per Dampfschiff nach Genf, per Post über Chambéry, den Mont-Cenis nach Turin und Genua, dann per Schiff nach Livorno, per Wagen nach Florenz, und so langte die Gesellschaft schliesslich am 16. November in Rom an, wo *Schläfli* via di due macalli No. 48

[1]) Das Ausgabenbuch mit allen seinen Details ist noch vorhanden.

in der Nähe der Chiesa St. Andrea Wohnung bezog. In Rom war damals die Familie *Mendelssohn*, mit welcher *Dirichlet* von Seiten seiner Frau verwandt war. *Felix Mendelssohn* erzählt in seinen Briefen von dem merkwürdigen Schweizer, den er in Rom kennen gelernt habe. *Schläfli's* Mangel an Weltkenntniss gab zu verschiedenen Quiproquos Anlass. Oberflächlichen Naturen, die bloss auf das Aeussere sahen, musste der Mann unbegreiflich und ohne weltmännische Bildung vorkommen; denn bis Ende der fünfziger Jahre ging *Schläfli* noch im altgewohnten bernischen Halbfrack; im schwarzen Gehrock, meinte er, käme er sich zu feierlich vor. Da mögen denn die feinen Damen, wie *Fanny Hensel, Mendelssohn's* Schwester, über den jungen Berner die Achsel gezuckt haben; sie wussten nicht, welche Entbehrungen sich der junge Mann seit vielen Jahren auferlegt hatte, wie *Schläfli* sich seinen Unterhalt schon lange selbst hatte verdienen müssen, und dass er auf den Genuss seines väterlichen Erbtheils verzichtet hatte, um den Unterhalt einer blödsinnigen Schwester zu bestreiten. *Dirichlet* hat sich aber *Schläfli's* wacker angenommen; er unterrichtete ihn jeden Vormittag in der Zahlentheorie; auch *Jakobi* nahm sich seiner an. *Steiner* und *Borchardt* mussten bald wieder wegen Berufsgeschäften nach Berlin zurück. Der Umgang mit diesen Meistern der Wissenschaft hat *Schläfli* ganz neue Horizonte eröffnet. Daneben lernte er das Italienische spielend. Die von ihm bearbeiteten Abhandlungen im Giornale arcadico di Scienze e lettere, wie

Steiner: Teoremi relativi alle coniche inscritte e circoscritte Vol. 99. p. 147—161. (S. Crelle XXX.)

— Del baricentro di curvatura delle curve piane, 115 S. Vol. 101. p. 237—280. — 102 S. 1—31 und 121—160.

Jakobi: Sulle condizioni di ugualianza di due radici dell' equazione cubica etc. 99. p. 3—11. (S. Crelle XXX.)

— Sul principio dell' ultimo moltiplicatore etc. 99. p. 129—146.

verwendete *Schläfli* gleichsam als Stilübungen. Andererseits hat ihn auch *Jakobi* benutzt. Derselbe hatte für *Nesselmann* in Königsberg die Aufgabe übernommen, in der Vaticana eine Handschrift des *Diophantes* mit den Editionen zu vergleichen, eine Arbeit, welche *Jakobi* an *Schläfli* übertrug. Bei dieser mehr oder weniger trockenen Arbeit hatte er auch einmal von einer Gallerie aus die Gelegenheit, den Papst zu sehen. Wie *Schläfli* gelebt hat, ist noch aus seinen Aufzeichnungen ersichtlich; anfangs wohl wenig sparsam in seinen Ausgaben, wird seine

Kost gegen Ende des Aufenthalts in Rom, etwa März 1844, sehr mager. Er verliess Rom am 10. April und kehrte von Cività vecchia per Schiff über Marseille und von da, am 25. April, über Avignon-[1]) Genf nach Thun an seine Lehrstelle zurück.

In den Berichten der Delegirten des Erziehungs-Departements an den Verwaltungsrath der zum Progymnasium umgewandelten Burgerschule wird anerkannt, dass die Prüfung in den Fächern Mathematik und Naturkunde zu den gelungenen gehöre. *Schläfli* selbst klagt aber über zu wenig Theilnahme der Schüler, und die Experten bemerken, dass sein Unterricht zu hoch gehalten sei und die Fassungskraft der Schüler übersteige [2]). Er fühlte es selbst immer mehr, dass er für den Unterricht von Schülern jüngern Alters nicht recht tauge, und sehnte sich nach einem andern Wirkungskreis. Aufgefordert reichte er dem damaligen Erziehungsdirektor, Dr. *J. Lehmann*, eine mathematische Abhandlung [3]) ein und bewarb sich um die venia docendi und um eine Anstellung. Auf Frühling 1847 trat nämlich Professor *J. F. Trechsel* von seinem Lehrstuhl, der die Fächer Physik, Mathematik und Astronomie in sich begriff, zurück. In der Fakultät wurde von *Schläfli* gesagt, dass er ein seltener, ausgezeichneter Kopf und mit *Steiner* befreundet und von ihm geachtet, aber höchst unpraktischen Wesens sei, und es wurde beschlossen, da die Fächer doch nun einzeln zu besetzen seien, *Wolf* als Extraordinarius für Mathematik mit Fr. 600 Besoldung in erster Linie, in zweiter Linie *C. Adams* von Winterthur mit 1600 Fr. Besoldung, *Gerwer* als Docent mit Fr. 400 Besoldung vorzuschlagen, und bezüglich *Schläfli's*, um dieses bedeutende Talent für die Hochschule zu gewinnen, wurde es der Erz.-Direktion überlassen, demselben irgend eine «Attentation» zukommen zu lassen. Im April entschied die Erz.-Direktion dahin, dass *Wolf*, *Gerwer* und *Schläfli* zu Docenten ernannt seien, *Schläfli* mit Aussicht auf Honorar. Das gesetzliche Privatdocenten-Honorar mit Fr. 400 a. W. wurde *Schläfli* am 1. April 1848 ertheilt, mit dem ausdrücklichen Versprechen, dass er bald zum Professor promovirt werde. Mit dieser Besoldung musste *Schläfli* sich bis zum Jahre 1853 begnügen. Bei der Bereinigung des Vorlesungsverzeichnisses im Januar 1853 für das Sommersemester 1853 wurde die Frage erörtert, ob den Privatdocenten *Wolf* und *Schläfli* ge-

[1]) Sein Postbillet ist noch vorhanden.

[2]) Schreiben des Verwaltungsrathes an ihn vom 12. Juni 1843.

[3]) Mittheilungen des Hrn. *K. Lauener*, Sekretär der bernischen Erz.-Direktion; findet sich nicht unter den Akten der Erz.-Direktion.

stattet sei, ihre resp. angegebenen Vorlesungen über Meteorologie und Botanik, Fächer, welche nicht unmittelbar in den Bereich der Lehraufträge gehören, für welche die beiden Herren angestellt wären, in das Vorlesungsverzeichniss einzugeben, und die beiden Docenten sollen sich darüber ausweisen, ob sie befähigt seien, diese Vorlesungen zu halten. Nachdem *Wolf* die Verwandtschaft der Meteorologie und der Astronomie in einem längern Schreiben auseinandergesetzt hatte, und seinen Zweck erreichte, und *Schläfli*, wenn auch verspätet, das Gleiche gethan, wurde auch die Vorlesung des Letztern unter dem Titel: «Geometrische Betrachtung des Wuchses der Pflanzen und Conchyliometrie» gestattet.

In den 50er Jahren hat sich *Schläfli* eingehend mit theoretischer Chemie beschäftigt. Es vollzog sich damals bekanntlich ein Umschwung in den bisherigen Anschauungen über die Zusammensetzung der Körper und *Schläfli* blieb hier stets auf der Höhe. *Hugo Schiff* pflegte zu sagen: «Der Einzige, der in Bern etwas von Chemie versteht, ist *Schläfli*».

Inzwischen fing man an, auf *Schläfli* im Ausland aufmerksam zu werden. Am 18. Januar erhielt er die Nachricht, dass die mathematisch-naturwissenschaftliche Klasse der Kaiserlichen Akademie zu Wien die Aufnahme der Arbeit [1]) «Ueber die Resultante eines Systems mehrerer algebraischer Gleichungen etc.» in ihre Denkschriften aufzunehmen beschlossen habe, wo sie wirklich in Band 4 erschienen ist. *Schläfli* erhielt dafür ca. 760 Fr. Honorar, was er sehr gut brauchen konnte, denn seine Lebenslage war eine missliche. Als er der Erziehungsdirektion zwei Exemplare der erwähnten Abhandlung zusandte, begleitete er diese Zueignung mit einem Brief, dem ich folgende charakteristische Stelle entnehme:

. . . «Hatte ich mir Hoffnung gemacht, mein spärliches Ein-
«kommen durch Privatunterricht zu verbessern, so sah ich mich bald
«auch in dieser Hoffnung getäuscht. Bei der grossen Zahl glücklicherer
«Privatlehrer fiel mir, der ich hier ganz unbekannt war, von Privat-
«unterricht so viel wie gar nichts zu. Ich bin daher durch meine
«Habilitation an hiesiger Hochschule, zu welcher ich unter Eröffnung
«günstiger Aussichten von der Behörde aufgefordert worden, in der
«That in die drückendste Lage gerathen. Eigenes Vermögen habe ich
«nicht; das kleine Erbe, das mir von meinen Eltern selig zugefallen,
«habe ich seiner Zeit der Waisenbehörde von Burgdorf zur Unterhaltung
«meiner unglücklichen imbecillen Schwester abgegeben; beschränkt

[1]) Wohl auf *Steiner's* Empfehlung hin, wie ich aus einem Konzept eines unzweifelhaft an *Steiner* gerichteten Briefes vom 7. Februar 1851 schliesse.

«einzig auf das Honorar von 400 Franken, muss ich im eigentlichen «Sinne des Wortes darben, nicht nur an meiner Person, was ich mi «Freuden ertrüge, sondern auch an allen Hülfsmitteln meiner Wissenschaft «Ich sehe sehr wohl ein, dass Sie, hochgeehrter Herr Director, bei den «so geringen Bedürfniss nach höherer mathematischer Bildung, das sich «hier unter den gegenwärtigen Umständen kund giebt, Anstand nehmen «müssen, den Docenten der Mathematik eben reichlich auszustatten «erlauben Sie mir aber gütigst die Freiheit, Sie in aller Bescheidenhei «darauf aufmerksam zu machen, dass die höhere Mathematik und de «Lehrstuhl derselben an und für sich doch ein unumgänglich noth «wendiger und wesentlicher Theil einer universitas litterarum ist «der daher an keiner. Hochschule fehlen darf, dass ich ohne «unbescheiden zu sein, behaupten darf, diesen Zweig der Wissenschaf «an unserer Hochschule angemessen und würdig zu vertreten, und das «ich für mein Wirken an dieser öffentlichen Anstalt weiter nichts ver «lange als eine öffentlich anerkannte Stelle, eine Professur mit eine «bescheidenen Besoldung, die mich wenigstens davor schützt, an allen «Nothwendigen Mangel zu haben.»

Der letzte Satz ist von seinem Freund Prof. *Ris* [1]) den Schreiben beigefügt. *Schläfli* hätte ihn in seiner Bescheidenheit nich beisetzen dürfen. Seine wirklich missliche Lage mag noch durch Folgen des beleuchtet werden: Am Ende des ersten Jahres seiner Thätigkei in Bern erhielt er den Steuerzeddel für den Betrag seines doppelten Ge halts. *Schläfli* reklamirte. Man entgegnete ihm lachend, er werde doch niemand glauben machen wollen, dass er von seinem winzigen Gehal leben könne. Schliesslich musste er die doppelte Steuer und noch Verzugsstrafe zahlen, wie er *Hugo Schiff* zur Warnung erzählt hat, al er 1858 zu ihm kam, um ihm zu seinem ersten Besoldungsbezug z gratuliren. Thatsache ist, dass *Schläfli* in dieser Zeit im eigentlichste Sinne des Wortes, wie er uns selbst erzählt hat, den «blauen Hunger» gelitten hat. Sein Freund *Ris* hat ihn da über Wasser gehalten. *Schläfli* sagt selbst von demselben: [2]) «Ich verdanke ihm meine ganze «Wirksamkeit. Als er vernahm, dass meine beiden Eltern gestorben «waren, suchte er mich auf und verschaffte mir Privatunterricht bei «denselben Kindern, deren Hauslehrer er damals gewesen war. In allen «Nöthen ist er mir als treuer Freund beigestanden. Ihm verdanke «ich es, dass ich an hiesiger Hochschule eine angemessene Lehr-

[1]) Professor der Philosophie an der Hochschule, † 21. Dezember 1887.

[2]) Brief von *Hugo Schiff*, 26. Januar 1888.

»thätigkeit fand.» Der damalige Erziehungsdirektor *A. Moschard* war *Schläfli* sehr wohlwollend gesinnt. *Schläfli* gehörte 1851 mit a. Regierungsrath *Fetscherin* und Grossrath Dr. *Manuel* der Kommission an, welche das Gymnasium in Bern, die Progymnasien in Thun und Biel zu inspiciren hatten. Auch später, Ende der 60er Jahre, war *Schläfli* Mitglied der Kommission, welche den Unterricht der Realabtheilung der bernischen Kantonsschule zu überwachen und zu reorganisiren hatte, und seine Notizbücher zeigen, wie genau er es mit seiner Aufgabe genommen hat. Die Promotion zum Professor hätte wohl noch lange auf sich warten lassen, wenn nicht *Steiner* sich in's Mittel gelegt und gedroht hätte, die Angelegenheit vor der ganzen wissenschaftlichen Welt gehörig zu beleuchten. So wurde denn *Schläfli* am 22. September 1853 gleichzeitig mit *R. Wolf* zum Professor extraordinarius erwählt, und zwar erhöhte man seine Besoldung auf 1200 Franken. Diese Besoldung ist noch keine grosse zu nennen. Zu dieser Zeit wurde *Schläfli*, wieder auf die Empfehlung seines Freundes, Professor *Ris*, von der Massaverwaltung der schweizerischen Nationalvorsichtskasse in Bern die Ausrechnung der Beträge der einzelnen Betheiligten übertragen. Nach einem bestimmten Tarif wurde er für die Ausrechnung des Annuitätsbetrages oder des Baarvertrags eines Berechtigten entschädigt und ein förmlicher Vertrag abgeschlossen. Allfällige Kontrolle und Aushilfe bei den Rechnungen gingen auf *Schläfli's* Kosten. Wer sein Gehülfe gewesen ist, habe ich nicht in Erfahrung bringen können, jedoch hat diese Arbeit *Schläfli's* freie Zeit wohl bis zum Jahr 1860 in Beschlag genommen und ihn für ebenso viele Jahre der wissenschaftlichen Forschung entzogen. Andererseits ist dieser Nebenverdienst auch der Grund gewesen zu seinem bescheidenen Vermögen, das er sich für die Tage des Alters recht eigentlich am Munde abgespart hat. Er liebte es nicht, an diese Zeit erinnert zu werden und sprach nicht gern davon.

Am 21. Januar 1863 zeigte ihm Erziehungsdirektor *Kummer* an, dass der Regierungsrath seine Besoldung auf 1400 Franken erhöht habe. Es sollte ihm noch eine weitere Ehrung zu Theil werden. Schon im Jahr 1854, als sich *Schläfli* auf den Rath seiner Freunde Dekan *Hopf* und Professor *Rettig* hin um eine Berufung an eine der mathematischen Professuren bewarb, die mit dem neu zu errichtenden schweizerischen Polytechnikum in Zürich verbunden waren, handelte es sich darum, dass die philosophische Fakultät der Hochschule Zürich ihm auf den Antrag *Raabe's* den Ehrendoktor ertheile; obwohl man damals zugab,

dass *Schläfli* zu promoviren für Zürch eine Ehre gewesen wäre, waren die Verhältnisse in der dortigen Fakultät zu ungünstig. Zudem war leider die Meinung ziemlich verbreitet, *Schläfli* sei kein guter Lehrer, und sicher hatte er damit auch bei seiner Bewerbung an's Polytechnikum zu kämpfen und dabei auch kein Glück gehabt. Aber in seiner eigenen Heimat fing man doch an, auf ihn aufmerksam zu werden. Am 10. März 1863 ertheilte ihm die philosophische Fakultät der Hochschule Bern den Doktor philosophiae honoris causa. Das Schreiben, mit dem ihm das Diplom übersandt wurde, von Professor *M. Lazarus*, als Dekan, und *H. Usener*, als Sekretär, unterzeichnet lautet: «Die philosophische Fakultät hat in ihrer «Sitzung vom 10. III. d. J. im Hinblick auf die Bedeutung Ihrer Verdienste «um die Förderung der Mathematik und Botanik und in freudiger Anerkennung Ihres über die verschiedensten Gebiete sich verbreitenden «gründlichen Wissens den einstimmigen Beschluss gefasst, Sie zum Doktor «philosophiae honoris causa zu creiren. Es gereicht ihr zur besondern «Genugthuung, durch diesen Akt kund zu geben, dass die Hochachtung, «deren sich Ihre Leistungen bei dem wissenschaftlichen Publikum «Europas erfreuen, Ihnen in nicht geringerem Masse auch an der Anstalt «zu Theil wird, welche die Ehre hat, Sie zu den ihrigen zu zählen.»

Das Doktordiplom selbst lautet in deutscher Uebersetzung:

«Der Senat der Universität Bern unter dem Rektorat von *Ant. «Biermer*, o. Professor der Medizin, auf Anregung der philosophischen «Fakultät und deren Dekan *Moritz Lazarus*, o. Professor der Philo«sophie, ertheilt dem hervorragenden und gelehrten Mann:

«*Ludwig Schläfli*, Bürger von Burgdorf, Diener des Göttl. Wortes «und ausserordentlichem Professor der Mathematik,

Honoris causa

«die Würden, die Rechte und die Privilegien eines Doktors der «Philosophie.» —

«Dies in Anbetracht von dessen staunenswerther und umfang«reicher Gelehrsamkeit, welche die verschiedensten Wissenschaften, «deren Beherrschung durch einen einzigen Mann kaum möglich zu sein «scheint: Mathematik, Naturkunde, Theologie, alte und neue Sprachen, «mit derselben Gründlichkeit umfasst und welche durch Scharfsinn und «Belesenheit hervorragende Veröffentlichungen nicht nur bei uns, sondern «auch überall im Auslande bekannt gemacht und zur Anerkennung «gebracht hat.»

Und lateinisch:

Rectore *Antonio Biermer*, Decano Philosophorum ordinis *Mauritio Lazaro*, Senatus Universitatis Bernensis amplissimo Philosophorum

ordine auctore Viro praestantissimo atque doctissimo *Ludovico Schlæfli,* civi Burgdorfensi, Verbi divini ministro, Matheseos professori publico extraordinario, propter eruditionem mirabilem et copiosam, diversissima disciplinarum genera et quæ vix unius hominis esse videantur: Mathematica, Naturæ rationem, Theologiam, Linguas veteres et recentes, eadem peritia complexam, praeclaris litterarum et ingenii monumentis non solum apud nos sed etiam apud externas nationes cognitam et probatam

Doctoris Philosophiae dignitatem jura privilegia
Honoris causa

detulit.

Bernae, die X. Martis anni MDCCCLXIII.

In einem Brief vom 23. Januar 1868 theilt ihm *C. W. Borchardt* in Berlin, längst seit der Romreise mit *Schläfli* befreundet, mit, dass er das durch den im Dezember 1867 erfolgten Tod Poncelets frei gewordene Freiexemplar des *Crelle'schen* oder *Borchardt'schen* Journals für reine und angewandte Mathematik als ein Zeichen des Dankes für so viele gesandte Beiträge *Schläfli* bestimmt habe. Derselbe hat es denn auch vom 69. Band weg bis zu seinem Tod 1895 stets regelmässig zugesandt erhalten. Dann bittet ihn *Borchardt:*

»Auch wäre es mir, obgleich ich den grössten Theil Ihrer Arbeiten »zu kennen glaube, angenehm, wenn Sie selbst mir diejenigen (und »zwar besonders geometrischen) Arbeiten nennen oder kurz andeuten »wollten, welche Sie für Ihre Haupt-Arbeiten halten. Es ist möglich, »doch freilich nicht gewiss, dass sich im Laufe dieses Jahres eine »Gelegenheit findet, wo hiervon zu Ihrem Vortheil Gebrauch gemacht »werden kann, und eine solche Gelegenheit wollte ich alsdann nicht »gern ungenutzt vorübergehen lassen.« Damit deutet wohl *Borchardt* an, dass er entweder *Schläfli* für eine Berufung oder für die Empfehlung als Mitglied der Akademie in Aussicht genommen hat. Dass er jemals nach Berlin berufen worden sei, wie allgemein behauptet wird, habe ich in den Akten bis jetzt noch nicht finden können.

Die philosophische Fakultät empfahl ihn den 25. Mai 1868 einstimmig zur Beförderung als ordinarius. Damit hat es zwar noch einige Zeit gedauert, seine Schüler fingen an energisch für den bescheidenen Gelehrten einzutreten. Der erste, der bei *Schläfli* den Doctor philosophiæ machte, ist *C. F. Geiser*[1]). er erhielt am 28. Juli

[1]) Die Dissertation lautete: Beiträge zur synthetischen Geometrie 1866. Zürich. Schabelitz'sche Buchhdlg. (Cæsar Schmidt). 36 S. gr. 8°.

1866 den Grad magna cum laude, am 25. Januar 1871 folgte *A. Meyer*[1] mit dem Grad summa cum laude als zweiter, am 24. November 1877 folgte der Schreiber dieser Zeilen mit gleichem Grade[2]), dann am 25 Januar 1878 ebenso *Elisabeth von Litwinoff-Iwaschkina*[3]) aus Tula unsere Commilitonin von Zürich und Bern, als 5. am 1. Novembe 1878 *Jakob Hilfiker*[4]), am 31. Januar 1879 *Friedrich Græfe*[5]) magn cum laude, am 31. Juli 1883 *G. Huber*[6]) summa cum laude, am 10 November 1884 *U. Bigler*[7]) mit gleichem Grad, am 6. November 188 ebenso *Ch. Moser*[8]), 9. November 1888 *Alfred Jonquière*[9]), am 13 November *F. Büzberger*[10]) beide im gleichen Rang und am 20. Mai 189 *Hans Tschumi*[11]) als 12. und letzter Doktor unter *Schläfli's* Ordinaria mit dem Grade magna cum laude.

Es war *Johann Jakob Schönholzer*, seit 1869 in Bern, ein eifrige Schüler *Schläfli's*, der sich bald durch seine Tüchtigkeit als Lehre an der Kantonsschule in Bern die Achtung der Behörden erwarb, de energisch für *Schläfli* eintrat. Am 1. Februar 1872 erhöhte de Regierungsrath auf Antrag des damaligen Erziehungsdirektor *J. J Kummer* die Besoldung *Schläfli's* auf 2000 Franken und befördert ihn zugleich zum ordentlichen Professor, jedoch geschah die Beförderun unter der Bedingung, »dass Sie nicht auf diesen Titel gestützt eine höher Besoldung als die angegebene beanspruchen.« So schätzte man diese Gelehrten von Weltruf. Die Gerechtigkeit gebietet zu constatiren dass am 2. Juli 1873, auf Antrag *Constantin Bodenheimer's*, di Besoldung auf Fr. 3000 erhöht wurde, und *Schläfli's* Schüler legte sich so kräftig in's Zeug, dass er endlich am 11. Dezember 187

---

[1]) Titel der Dissertation: Zur Theorie der unbestimmten ternären quadr tischen Formen. Zürich, Zürcher & Furrer. 1871. 37 S. 8°.

[2]) Beiträge zur Theorie der Riemann'schen Fläche. Zürich 1878. 46 S. 8

[3]) Lösung einer Abbildungsaufgabe. 1879. Druckerei der k. Akadem der Wissenschaften, Petersburg.

[4]) Theorie des Meridianinstruments.

[5]) Der Paskal'sche Satz. Stämpfli'sche Druckerei, 1879.

[6]) Anwendungen der conformen Abbildung.

[7]) Potential einer elliptischen Walze.

[8]) Ueber Gebilde, welche durch Fixation einer sphärischen Curve un Fortbewegung des Projectionscentrums entstehen.

[9]) Ueber einige Transcendenten, welche bei der wiederholten Integratio rationaler Functionen auftreten.

[10]) Ein mit der Theorie algebraischer Flächen zusammenhängendes plan metrisches Problem.

[11]) Beitrag zur Geschichte und Discussion der Cycloide.

in seiner Besoldung einigermassen gleich gehalten wurde wie andere Professoren, indem man ihn mit Genuss vom 1. Oktober rückwärts an mit 4000 Franken besoldete.

Schläfli war und blieb überaus einfach in seinen Bedürfnissen und darin ein Original. Er wohnte die längste Zeit im Haus Grämicher (ehemals Café Dumont) neben der Oranienburg, einmal auch im Sprengergut in Wabern und als das Café *Gräf*, in dem er zu speisen gewohnt war, geschlossen wurde, hatten wir das Glück, ihn zirka ein Jahr lang an unserm Mittagstische zu sehen. Ein bürgerlicher Haushalt hat ihm daraufhin so gut gefallen, dass er sich entschloss eine eigene Haushaltung anzufangen und dabei hatte er das Glück, in Fräulein *Margar. Spichtin* eine Haushälterin zu finden, die für ihn, da er so gar nichts auf die äussere Erscheinung gab, in ausgezeichneter Weise besorgt war. Vom Jahr 1876 hat man in diesen Dingen denn wirklich eine sichtliche Wandlung konstatiren können. Wir erinnern uns noch ganz gut, wie *Schläfli* den Gedanken gefasst hat, seine Berliner Freunde, namentlich *Borchardt*, zu besuchen. Nicht etwa, dass er des Reisens nicht gewohnt gewesen sei, gieng er doch viele Jahre über die Alpen zu seinem Freund *Casorati*, der regelmässig in Rezzonico am Comersee mit seiner Familie die Ferien zubrachte. Aber so gut ausgerüstet, wie er seine Berlinerfahrt antrat, hatten wir ihn noch niemals gesehen. Ueberzieher und derartiges war ihm bis jetzt fremd geblieben. In Berlin wurde er ausgezeichnet aufgenommen, von *Borchardt* sowohl als von *Weierstrass* und *Helmholtz, Kronecker, Kummer* und *Kirchhoff;* hingegen fieng schon dazumal sein Gehör an abzunehmen; er erzählte uns, wie ihn *Borchardt* in's Hoftheater genommen hatte, aber trotz eines guten Platzes habe er doch nichts verstanden. Ein Abend bei *Helmholtz* war besonders in seiner Erinnerung geblieben.[1])

Sein Leben in Bern war ein ausserordentlich regelmässiges, was die Arbeit anbetrifft. Gewöhnlich war er Sommer und Winter um 3 Uhr Morgens an seinem Schreibtische, er gieng aber auch gern 9 oder 10 Uhr zu Bett. Nach dem Kolleg liebte er es, sich über die behandelten Gegenstände bei einem Glase Bier zu unterhalten, und der runde Tisch im Café Krone war oft Zeuge der gelehrten Gespräche, die dort

[1]) Ueber *Schläfli* als Botaniker erzählte *H. A. Schwarz* Herrn Prof. *Sidler*, er, *Schwarz*, habe *Schläfli* bei seinem Aufenthalt in Berlin in den botanischen Garten geführt und dem Garten-Direktor, Prof. *Alex. Braun* (Schwager von Agassiz), vorgestellt. Die beiden Herren hätten sich sofort tiefgründig über die Gesetze der Blattstellungen unterhalten.

genommen. Nun liegt mir die angenehme Pflicht ob, Dich, indem ich mir und der Gesellschaft der Lincei vor allem aufrichtig Glück wünsche, zum ordentlichen auswärtigen Mitglied zu ernennen und Dir die eherne Tafel der Gesellschaft zu übersenden, sowie diejenigen Bände der Verhandlungen der Gesellschaft, über welche wir noch verfügen können. Zugleich erhältst Du ein Exemplar der Statuten der Lincei, woraus Du alles, was das Wesen der Gesellschaft und die Pflichten und Rechte der einzelnen Mitglieder betrifft, entnehmen magst.

Schliesslich bitte ich Dich, gemäss unserer Verbindung, sowohl in meinem eigenen Namen als in dem meiner Collegen, auf's Angelegentlichste, in Deinem Theile die Akademie zu fördern, indem Du ihr die Bände Deiner schätzbaren Geistesarbeit verehrst, welche alljährlich zur Förderung der Wissenschaften unter die Presse kommen. Das wird ein treffliches Zeugniss Deiner guten und wohlwollenden Gesinnung gegen uns sein.

Lebe wohl und sei unser eingedenk.

Gegeben zu Rom im Hause der Lincei, am 16. Dezember 1883.

Quintino Sella. Domenico Carutti.
Pietro Blaserna.

Die königliche Akademie der Lincei

hat im 280. Jahre seit ihrer Gründung *Ludwig Schläfli* unter ihre auswärtigen Mitglieder der physikalischen, mathematischen und naturwissenschaftlichen Classe aus freien Stücken berufen in dem Wunsche, ihre Genossenschaft mit dem Ruhme seines Namens zu schmücken und in der Voraussicht, dass er die gemeinsamen Studien durch neue Denkmäler seines Geistes fördern werde.

Mit Glückwunsch übersendet *Quintino Sella*, Vorstand der Lincei, dem geschätzten Genossen die Inschrifttafel der Gesellschaft.

Rom, am 16. Dezember 1883.

Dom. Carutti. Pietro Blaserna.

An der 50jährigen Gründungsfeier der Hochschule Bern, den 4. bis 6. August 1884, wurde *Schläfli* von der königlichen Universität Rom als Delegirter bezeichnet und hatte die Gratulationsadresse dieses Instituts zu übergeben. Als *Schläfli* vortrat und dem Rector magnificus, Professor Dr. *Forster*. das Dokument mit einigen Worten übergeben wollte, wurde dem Gelehrten eine spontane Huldigung bereitet,

testandi sollicita, Te virum Clarissimum inter Sodales suos Ordinarios exteros disciplinis physicis, mathematicis et naturalibus adscriptos cooptavit. Nunc vero, quod munus meum est jucundissimum, candide mihi et Lynceorum Societati in primis gratulans, te Sodalem Ordinarium exterum renuntio, tibique Societatis tesseram aeneam mitto nec non illa Actorum Academia volumina, de quibus adhuc constituendi potestas penes nos est. Simul accipies Constitutionum Lyncearum exemplar, ex quibus quaecumque vel Societatis formam, vel singulorum munera et honores respiciunt, facile colliges. Reliquum est, ut pro nostra modo conjunctione, tum meo, tum autem Collegarum nomine, tecum precibus agam quam possum diligentissimis, ut pro virili parte Academiae profectui adsis, nobilibus ingenii tui scriptionibus volumina ad honestando quae in studiorum gratiam quot annis prelo traduntur. Hoc porro boni et lubentis animi tui in nos praeclarum extabit testimonium. Vale, et nostri memor esto. Dabam Romae ex aed. Lynceis, XII. kal. ian. A. Ch. MDCCCLXXXIII. *Quintinus Sella*. *Dominicus Carutti*, *Petrus Blaserna* ab actis.

Die zugesandte Erztafel enthält folgende gravirte Inschrift:

Regia Lynceorum Academia.

An. a Societate instituta CCLXXX *Ludovicum Schlaefli* inter sodalis suos exteros in classem disciplinarum physicarum mathematicarum et rerum naturalium adscriptos ultra accivit porta nominis fama collegium condecorari expetens eadem auguratu illum novis ingenii monumentis communia studia auctarum.

Gratulans Sodali optatissimo *Quintinus Sella* Lynceorum princeps incisam societatis tesseram mittit Romae XVII kal. ian. A. C. MDCCCLXXXIII.

Dom. Carutti
Petr. Blaserna } ab actis.

oder in Uebersetzung:

Königliche Akademie der Lincei.

Quintino Sella, Vorstand der Lincei

grüsst *Ludwig Schläfli*.

Die Gesellschaft der Lincei hat in dem Bestreben, den hervorragendsten Männern, sowohl in Italien als im Auslande, welche sich um die Wissenschaften besonders verdient gemacht haben, Dich hochberühmten Mann unter ihre ordentlichen auswärtigen Mitglieder der physikalischen, mathematischen und naturwissenschaftlichen Fächer auf-

Studiums eröffnen, so wie Ihnen selbst, zur Freude und zum Genuss gereichen. Möge es Ihnen vergönnt sein, Ihren so zahlreichen und so werthvollen Abhandlungen, von denen jede, wenn auch jede innerhalb einer anderen Begrenzung, ein in den kleinsten Theilen ähnliches Bild Ihres Geistes darbietet, in jugendfrischer Schöpferkraft noch manche ebenbürtige Nachfolger zu geben.

Wir wissen, dass die Arbeit Ihres Lebens nicht der Rücksicht auf jetzige oder spätere Anerkennung, sondern vielmehr einem inneren unbezwinglichen, unaufhörlichen Drange nach Erkenntniss seinen Ursprung verdankt, einem Drange, der Sie weit über das Gebiet der Mathematik und ihrer direkten Anwendungen hinaus in das Reich der beschreibenden Naturwissenschaft, sowie in die vielgestaltigen Bezirke der Sprachforschung geführt hat. Und so erlauben Sie uns denn, unsern Glückwunsch mit dem Ausblick auf die Unzerstörbarkeit dieses Strebens nach Wahrheit zu beschliessen.

Man erzählt von *Gauss*, in dessen zahlentheoretischen, algebraischen und geometrischen Schriften Sie so vielfachen Anstoss zu eigenen scharfsinnigen Untersuchungen fanden, dass er sich gewisse Probleme hier zur Seite gelegt habe, die er in einem höhern Zustande später geometrisch zu behandeln dachte. Uns scheint, dass wenn dereinst die Funktion Ihres Lebens an die Kluft getragen wird — (möge sie recht weit vom Ursprung abliegen) — über welche hinaus sie nicht mehr in einer Mannigfaltigkeit von drei Dimensionen fortgesetzt werden kann, auch Ihnen noch Probleme höherer Ordnung aufbehalten bleiben.

Wir glauben aber, dass sie dem glücklichen Forscher in der Geometrie von n-Dimensionen bald in ihrer wahren Bedeutung anvertraut sein werden, selbst wenn *Jakob Steiner*, wie er es schon auf dieser Erde liebte, ihm den innern Zusammenhang derselben verdecken wollte.

Zürich, den 14. Januar 1884.

(Folgen die Unterschriften.)

Abgedruckt in No. 4 der «Schweizerischen Bauzeitung», vom 26. Januar 1884.

Zu seinem 75. Geburtstag schenkten ihm die Berner Fachkollegen und Schüler eine goldene Uhr, die ihm grosse Freude bereitete. Bei der hundertjährigen Gedächtnissfeier des Geometers *Nikolaus Iwano-*

witsch Lobatcheffsky wurde *Schläfli* gebeten als Ehrenmitglied in's Comite einzutreten.

Leider nahmen seine leiblichen Kräfte ab. An *Hugo Schiff* schreibt er: «Ihr Brief war mir wie Regen auf dürres Gras. Ich habe schon im Sommer 1891 nicht gelesen und Anfangs Herbst meine Entlassung eingegeben. Auf ärztlichen Rath habe ich das Massage gegen einen Rheumatismus angewendet und dadurch einen Bruch, den ich schon seit 30 Jahren habe, sehr vergrössert, so dass ich jetzt mit beiden Uebeln behaftet bin und wohl mit den Rheumatismen allein zufrieden wäre. Jetzt gerade bin ich sehr leidend, kann fast nicht mehr in der Stube herumgehen.» Sein Bruchleiden rührte von der Misshandlung durch einen betrunkenen Kerl her, der den in tiefen Gedanken dahin gehenden Gelehrten, der des Menschen nicht gewahr wurde, zu Boden geworfen hatte. Nichts desto weniger war er bis in's hohe Alter ein ausgezeichneter Fussgänger. In der Mitte der siebenziger Jahre gehörte eine Fahrt auf das 2193 m. hohe Stockhorn zu traditionellen Ausflügen, die der Mathematik-Professor mit seinen Schülern machte, und im Jahr 1877, als *Schläfli* bereits mehr als 63 Jahre alt war, lief er noch ohne Beschwerde mit Professor *Sidler* und mir vom Bad Schwefelberg über das Gurnigelbad zu Fuss nach Bern. Nach 1877 hat er keine Bergtouren mehr gemacht, aber viel spaziert ist er gleichwohl. Sein Entlassungsgesuch lautet: «Meine geistigen und leiblichen Kräfte sind »so geschwunden, dass ich meine Lehrthätigkeit beendigen muss. Bei »meinem Alter ist eine Herstellung der Gesundheit unwahrscheinlich; »sonst wollte ich mir das Recht Vorlesungen zu halten, von dem ich »in diesem ganzen Sommerhalbjahre keinen Gebrauch gemacht habe, »noch vorbehalten. Ich danke dem hohen Regierungsrath für die »fortwährende Unterstützung und das bewiesene Wohlwollen und bitte »für den Rest meines Lebens um eine Pension.» Der Regierungsrath versetzte ihn auf 1. Januar 1892 in den Ruhestand in allen Ehren und unter Verdankung der geleisteten Dienste und fixirte seine Pension auf 3000 Fr. jährlich. Wir entnehmen dem Schreiben der Regierung folgende Stelle:

»Wir benützen diesen Anlass, um Ihnen noch unsern wärmsten »Dank auszusprechen für die so vielfache ausgezeichnete Wirksamkeit »an unserer Hochschule und für die hohen Verdienste, die Sie sich »um die Wissenschaft, speziell die Mathematik, erworben haben. Möge

«es Ihnen noch recht lange vergönnt sein, bei guter Gesundheit die «wohlverdiente Ruhe des Alters zu geniessen.

Der Erziehungsdirektor in Vertretung:
Steiger.»

Auf Antrag der philosophischen Fakultät wurde er am 20. I. 1892 von der Regierung zum Professor honorarius ernannt, um noch die Möglichkeit zu haben, ihn in den Listen der Hochschullehrer fortzuführen.

Bei seinem 80. Geburtstag gratulirte ihm die philosophische Facultät:

Eine Deputation der philosophischen Fakultät der Hochschule, bestehend aus dem Dekan Professor Dr. *A. Rossel* und den Schülern *Schläfli's*, Professor Dr. *Graf* und Professor Dr. *G. Huber*, überreichte dem Jubilar eine von Hrn. Kalligraph *Eckert* auf der bernischen Staatskanzlei einfach, aber geschmackvoll verfertigte Gratulationsadresse, deren Wortlaut folgender ist:

«Hochgeehrter Herr Kollege!

Die philosophische Fakultät der Hochschule Bern, an welcher Sie während 45 Jahren mit grosser Auszeichnung als akademischer Lehrer gewirkt haben, beehrt sich hiemit, Ihnen, hochgeehrter Herr Kollege, zu Ihrem 80. Geburtstag die herzlichsten Glückwünsche darzubringen. Die Fakultät hat nicht vergessen, in welch hervorragender Weise Sie das Fach der mathematischen Wissenschaften an der Hochschule vertreten haben, und fühlt sich hochgeehrt, Sie noch zu den ihrigen zählen zu dürfen. Möge es Ihnen vergönnt sein, nach des Lebens harter Arbeit die wohlverdiente Ruhe, ohne von zu viel Schmerzen des Leibes beeinträchtigt zu sein, zu geniessen, und genehmigen Sie die Versicherung unserer vollkommensten Hochachtung!»

(Folgen die Unterschriften).

«Leider ist *Schläfli*, berichtet ein stadtbernisches Blatt, der dem Staat im ganzen 55 Jahre gedient hat, durch ein körperliches Leiden gezwungen, die meiste Zeit im Bette liegend zuzubringen, da die Schmerzen ihm nur gestatten, einige Stunden des Tages ausserhalb des Bettes sich aufzuhalten. Geistig ist er noch sehr frisch und munter; möge der Lebensabend des berühmten Gelehrten und treuen Lehrers ein von Schmerzen möglichst freier sein! Das ist unser aller Wunsch!»

Von Rom traf folgendes Telegramm ein: «Académie Lincei appréciant votre éminente valeur de géomètre vous envoie dans ce jour les souhaits les plus cordiaux. Président Brioschi.» L. Cremona Roma: «Auguri saluti cordiali all' illustre scienziato ottimo amico Luigi Cremona.» Von Göttingen: «Dem bernischen Altmeister der Mathematik sendet zu seinem 80. Geburtstage die besten Wünsche die Mathematische Gesellschaft Göttingen. *F. Klein.*»

Gratulationstelegramme liefen ein: Von der Akademie der Wissenschaften in Berlin, durch den Secretär der mathematischen Klasse, Hr. *Du Bois-Reymond,* und den Herren *Auwers, Frobenius, Helmholtz, Schwarz, Schwendener,* von Professor *G. Sidler,* der damals in Berlin weilte, aus Rom von den Herren *Cremona* und *Beltrami,* aus Florenz von *Hugo Schiff,* aus der Schweiz von seinen Schülern *Gubler,* Zürich; *Gysel,* Schaffhausen; *Meyer,* Zürich u. v. a.

Seine Kräfte eilten aber doch dem Verfall entgegen. Einen damals an *Hugo Schiff* angefangenen Brief konnte er nicht mehr vollenden, er musste seine letzte schriftliche Thätigkeit, die Uebersetzung des Rig-veda, aufgeben. In den wenigen Augenblicken, wo er des Tages sich von seinem Lager erhob, war die Lektüre der Neuen Zürcher Zeitung seine Beschäftigung. Dann schwand auch diese Zerstreuung. Etwa ein Jahr vor seinem Tode entstand in der Nähe seiner Wohnung ein grosser Brand, einen Moment konnte man auch für seine Wohnung an Gefahr denken. Als wir daselbst eintrafen und es uns gelang, seine treue, für ihn ängstliche Pflegerin zu beruhigen, kleideten wir, im Fall man sich vor dem Brande flüchten müsste, den Gelehrten an und setzten ihn in seinen Stuhl, wo er mitten in Gefahr und Unruhe mit mir ein Integral aus den Bessel'schen Funktionen erörterte. Gewiss ein Beweis seiner klassischen Seelenruhe. Die Athemnoth und die Wassersucht nahmen aber doch zu, und am 17. März wurde er von einer Lungenentzündung ergriffen. Sein Zustand schien uns am Abend des 19. März hoffnungslos, denn er erkannte uns nicht mehr, und so schied er am 20. März Morgens 3 Uhr von uns. Er wurde am 23. März begraben. Das Leichengebet hielt Herr Pfarrer *Thellung,* der Sohn seines noch lebenden Freundes aus seinem Thuner-Aufenthalt. Die Behörden, Professoren und Studenten, seine Freunde, Schüler und Anverwandten gaben ihm das letzte Geleite zum Bremgarten-Friedhof. Wir lesen im «Bund»: [1])

[1]) Bund vom 25. III. 1895.

Die Wissenschaft ist interkantonal und international! Das zeigte sich Samstags wieder bei der Beerdigung des verstorbenen Professors *Schläfli*. Aus der Schweiz waren eine stattliche Anzahl der ehemaligen Schüler persönlich erschienen, aus dem Auslande liefen Kondolenztelegramme ein, so z. B. aus Rom von Professor *Beltrami*.

Aus dem Trauergeleite wollen wir wenigstens einige Namen nennen: Professor *Geiser*, Direktor des Polytechnikums in Zürich, Dr. Gubler (Zürich), Dr. *Gysel*, Direktor des Gymnasiums in Schaffhausen, Dr. *Bigler* (Aarau), Dr. *Bützberger* (Burgdorf), alles ehemalige Schüler. Der bernische Schülerkreis war selbstverständlich nahezu vollzählig erschienen, ferner Professor *Rudio* (Zürich), Professor *Meyer* (Zürich).

Die von Professor Dr. *Graf* in Bern dem grossen Lehrer und Kollegen nachgerufenen Grabesworte lauten:

«Geehrte Trauerversammlung! Es sei mir gestattet, am Grabe, in welches die sterblichen Reste des hochverehrten Herrn Professor Dr. *Ludwig Schläfli* versenkt werden, im Namen der Hochschule, seiner Kollegen, der Studentenschaft und seiner Schüler von nah und fern, das tiefgefühlte Beileid auszudrücken. Die Hochschule Bern, die es sich zur Ehre anrechnete, den grossen Verstorbenen, der seit 1847 bis 1892, also volle 45 Jahre lang dem Lehrkörper angehörte, auf der Liste der Professoren und Dozenten fortzuführen, erleidet in *Schläfli* einen herben Verlust, den erst eine spätere Generation noch recht nachfühlen wird. Mit *Schläfli* sinkt eine Leuchte der mathematischen Wissenschaften, ein Gelehrter ersten Ranges, ein wahres Genie in's Grab. Als ihm vor 32 Jahren die Hochschule den Doktortitel honoris causa verlieh, that sie dies in Anbetracht seiner staunenswerthen und umfangreichen Gelehrsamkeit, welche die verschiedensten Wissenschaften, deren Beherrschung durch einen einzigen Mann kaum möglich zu sein scheint, mit derselben Gründlichkeit umfasste. Mathematik, Naturkunde, Theologie, alte und neue Sprachen bewältigte er mit seltener Sicherheit und durch seinen Scharfsinn und seine Belesenheit, durch seine hervorragenden Publikationen, mehr als sechzig an der Zahl, hat er besonders die Mathematik nicht nur bei uns, sondern auch im Ausland zu hoher Anerkennung gebracht. Seine Schriften sind für gewisse Zweige der Mathematik von fundamentaler Bedeutung, sein Name ist für immer mit einzelnen Funktionen verknüpft, sein Wirken bahnbrechend für gewisse mathematische Auffassungen.

Er beherrschte die Sprachen in seltenem Maasse, schrieb er doch mit derselben Leichtigkeit italienische, englische und französische

Abhandlungen. Die Vertiefung in die orientalischen Sprachen war für ihn eine Erholung, sein letztes Studium galt dem Persischen, der Keilschrift und dem Hebräischen. In den Naturwissenschaften, ganz besonders in der Botanik, excellirte er durch hervorragende Kenntnisse. Ihm wurden vom Ausland Ehrungen zu Theil, wie wohl keinem seiner schweizerischen Zeitgenossen. Die königliche Akademie der Wissenschaften in Berlin, diejenige zu Göttingen, die Reale Accademia dei Lincei in Rom, die königliche Akademie in Bologna betrauern in ihm den Verlust eines hervorragenden Mitgliedes.

Und was war er als Mensch! So unscheinbar und bescheiden im Auftreten, eine wahre Gelehrtennatur, nur glücklich in der Stille des Studierzimmers. Wer sein Schüler sein durfte, weiss, welche Aufopferung und Hingebung, gepaart mit Herzensgüte, in diesem Manne wohnten. Sein gerader und offener Charakter verabscheute jede Ungerechtigkeit, am Vaterlande hing er treu, ihm wollte er dienen, darum allein schlug er die ehrenvolle Berufung in fremde Lande aus. Ueber sein Leben lässt sich das Motto setzen, das in der Gratulationsschrift zu seinem siebenzigsten Geburtstage in Sanskrit geschrieben steht: Die Wissenschaft ist des Mannes schönste Schönheit, ein tief geborgener Schatz. Man darf wohl sagen, seit des unvergleichlichen *Leonhard Euler's* Tode hat kein Schweizer wie er das mathematische Wissen beherrscht und unter den zeitgenössischen Mathematikern kann man ihm nur Wenige, was die Mannigfaltigkeit der durchforschten Gebiete anbetrifft, an die Seite stellen. Auch im Vaterlande blieb ihm schliesslich die Anerkennung nicht aus. Die Fürsorge der Regierung gestaltete seinen Lebensabend, was das Aeussere anbetrifft, zu einem sorgenfreien. Zunehmende Gebrechlichkeit und körperliche Leiden bildeten leider eine nicht angenehme Zugabe, doch alles ertrug er mit Geduld und stoischer Fassung. So scheidet er denn von uns als Gelehrter hochgewürdigt, als Lehrer und Mensch hoch geachtet. Von seinem Arbeitszimmer, das auch sein Sterbezimmer wurde, blickte er oft hinüber in den Monbijou-Friedhof; dort ist ein einfacher Grabstein, der zeigt uns die Stätte an, wo sein um 18 Jahre älterer Fachgenosse, der andere grosse Berner Mathematiker *Jakob Steiner* ruht, dessen sterbliche Reste auch in diesen Friedhof übergeführt werden sollen.

Bern halte Deine grossen Todten in Ehren! So leb denn wohl, treuer Lehrer und Freund, die Wissenschaft, das Vaterland trauert an Deinem Grab, der Geist, den Deine Werke ausstrahlen, Dein ganzes

Wesen, Dein Leben voll Arbeit und Forschung, mögen uns Dein Bild immer wieder vor Augen stellen. Leb wohl!»

Durch testamentarische Verfügung wurde seine Haushälterin Frl. *Margaretha Spichtin*, welche seit 19 Jahren mit grosser Treue seinem Haushalt vorgestanden und welche ihn während seiner mehrere Jahre andauernden Leiden mit grosser Geduld gepflegt hatte, zur Erbin seines bescheidenen Vermögens eingesetzt. Frl. *Spichtin* schenkte die Bibliothek und sämmtliche Manuscripte des verstorbenen Gelehrten der am 1. Mai 1895 in Bern eröffneten Schweizerischen Landesbibliothek mit der Bestimmung, dass alle Nicht-Helvetica der Hochschul-Bibliothek und der Bibliothek der Schweizerischen Naturforschenden Gesellschaft, welcher *Schläfli* seit 1. December 1840 angehört hat, abgegeben werden sollen.

Steiner ist im Monbijou-Friedhofe, der demnächst zum Theil überbaut werden soll, begraben. Ein *Steiner-Schläfli*-Comité, bestehend aus den Herren Professor Dr. *J. H. Graf* als Präsident, Professor Dr. *G. Sidler*, Professor Dr. *G. Huber*, Professor Dr. *E. Ott*, Dr. *Ch. Moser*, Docent, Dr. *F. Bützberger*, Lehrer am Technikum in Burgdorf, Professor Dr. *C. F. Geiser* in Zürich, Professor Dr. *H. Kinkelin* in Basel und Professor Dr. *Hugo Schiff* in Florenz, hat sich gebildet, mit dem bestimmten Zwecke, die Ueberreste *Steiner's* auf den 18. März 1896, den hundertjährigen Geburtstag dieses grossen Gelehrten, zu exhumiren und *Schläfli* ein Grabmal zu setzen. Die Hauptaufgabe sah das Comité aber darin, die Grabstätten der beiden grossen Gelehrten für immer zu sichern. Die Behörden der Stadt Bern sind denn auch dem Comité bereitwilligst entgegen gekommen. Durch Schreiben vom 15. August 1895 gewährt der Gemeinderath der Stadt Bern unentgeltlich eine Grabstätte zur Beisetzung der Asche *Steiner's* und koncessionirte durch Schreiben vom 21. August gegen eine mässige Gebühr die Ruhestätte *Schläfli's*. Man hat sich desshalb an alle Freunde, Verehrer und Schüler in der Schweiz gewandt, um die Unkosten zu decken, und über die ganze Angelegenheit wird das Comité seinerzeit Rechenschaft ablegen.

Volle 55 Jahre ist *Schläfli* im Dienst des mittlern und höhern Schulwesens des Kantons Bern gestanden, davon hat er allein während 45 Jahren an der Hochschule unterrichtet. Ueber diese seine Wirksamkeit verweisen wir auf die Beilage zu dieser Biographie, welche nicht nur genau angiebt, welche Vorlesungen *Schläfli* gehalten hat,

sondern auch den mathematischen Unterricht an der Hochschule für ca. 50 Jahre zu illustriren im Stande ist. *Schläfli* unterrichtete gern; hatte er bloss Landeskinder vor sich, so geschah es in «urchigem Berndeutsch», waren aber Landesfremde unter seinen Studenten, so bediente er sich des Schriftdeutschen, das er natürlich ganz gut handhabte. Bis in sein Alter bewegte er sich mit jugendlicher Behendigkeit an der Wandtafel, und da er von kleiner Statur war, so musste er sich oft des Stuhles bedienen um mächtige Ausdrücke von Formeln auf der Tafel unterzubringen. Im Kopf rechnete er mit fabelhafter Leichtigkeit und nach seinem eigenen Geständniss arbeitete er jedes Kolleg, wenn er es zum zweiten oder dritten Male hielt, neu um. In einem Brief an *Hugo Schiff* äusserte er sich folgendermaassen:

«Was die rein wissenschaftliche Thätigkeit anbetrifft, so steht «ihr die allgemeine Ermüdung des Geistes, daher die Häufigkeit logi- «scher Irrthümer und Schwerfälligkeit des Herauswindens aus wirklichen «oder vermeintlichen Widersprüchen entgegen. Ich bin über pflicht- «mässige Unterrichtsthätigkeit äusserst froh und bemühe mich, meine «mathematische Hartknochigkeit und Routine auf andere zu übertragen. «Ich trachte immer im Unterricht so frisch und unmittelbar als möglich «zu sein und, wenn es mir gelingt in dieser Thätigkeit mich aufzu- «brauchen, so will ich mich für glücklich halten.»

Diesen Eindruck hatte man auch von seiner Persönlichkeit und seiner Lehrweise; voll Eifer und Hingebung an den Stoff, voll Aufopferung für seine Schüler, das charakterisirte seine Thätigkeit als Hochschullehrer. Auf jede Frage war er bereit Auskunft zu geben, wenn nicht sofort, dann nach Ueberlegung. Das beweist auch sein immenser Briefwechsel mit seinen Schülern und Collegen.

Die *Korrespondenz Schläfli's* kann hier Raumes halber nur in Bruchstücken angegeben werden. Von vorne herein reserviren wir uns, diejenige zwischen *Steiner* und *Schläfli* extra zu behandeln; auch einzelnes der übrigen Korrespondenten wird noch, so weit es für die Fortentwicklung der Mathematik Interesse hat, einer besonderen Beachtung unterzogen werden. Wir bemerken zum Verständniss der nachfolgenden Angaben, dass die beigesetzten Zahlen die Jahre angeben, innerhalb welcher sich ungefähr der Briefwechsel vollzog.

Aeschlimann, U. (1877.) System der orthogonalen Flächen.

Affolter, Fr. G. (1872—1874.) Betrifft die Privatstudien und seinen Aufenthalt in Pisa. Verschiedene geometrische Probleme, welche gleichzeitig *Darboux* in seiner Geometrie publizirte.

Albrecht, Karl, Lehrer, Brugg. (1866—72) Lösung von Gleichungen.

Battaglini, Guiseppe. Università di Napoli. (1891.)

Baur, J. (1880.) Vorlesungen und Besuch derselben.

Beck, Alex. in *Riga.* (1874—1893.) Persönliche Verhältnisse.

Becker, J. C. in Feuerthalen bei Schaffhausen (1872). Betrifft den Streitfall *Schläflis* mit demselben. *Schläfli* hatte in den Berichten des Reale Istituto Lombardo (Vol. V. fasc. V.) eine Abhandlung veröffentlicht: «Ueber den Nexus zwischen Analysis und der geometrischen Anschauung», zu welcher ihm die Abhandlungen *Becker's:* «Abhandlungen aus dem Grenzgebiete der Mathematik und Philosophie, Zürich 1870», veranlasst hatten. *Becker's* Haupttendenz gieng dahin, die Berechtigung der unmittelbaren Anschauung als wissenschaftlich zulässige Erkenntnissquelle darzustellen, d. h. die Berechtigung einer Berufung auf die unmittelbare Anschauung als Erkenntnissgrund für wissenschaftliche Behauptungen philosophisch zu begründen. *Schläfli* fasste dies als ein Perhorresciren der analytischen Methoden bei geometrischen Untersuchungen auf.

In den Papieren findet sich ein Aufsatz *Becker's*: «Ueber das Vermächtniss von *Riemann* zu *Kant*».

Beltrami, Eugenio, Professor in Rom. (1871—1895.)

Bertini, E., Professor in Pavia. (1889—1891.)

Bigler, U., Lehrer der Mathematik, Aarau. (1886—1891.) Ueber dessen enormen Briefwechsel mit *Schläfli* enthalten wir uns des Urtheils.

Blaserna, Pietro. (1887—1889.) Secretär der Accademia dei Lincei.

Both, Samuel. Schüssburg. (1885.) Gammafunctionen.

Borchardt, C. W.[1]) (1856—1880). Die Correspondenz beschlägt den Druck der *Schläfli'schen* Arbeit: «Ueber die Geometrie von n-Dimensionen», welche der ältere Reimer in Verlag nehmen wollte, da sie für das *Crelle'sche* Journal zu umfangreich war; dieser Druck unterblieb, wie denn *Schläfli* sich nicht dazu verstehen konnte ein mathematisches Gebiet in Buchform zu behandeln. Eine Stelle eines Briefes vom 26. Dezember 1865 lautet: «Sie erinnern sich, dass Band 43, «in dem Ihr erster combinatorischer Aufsatz steht, noch von dem «seligen *Crelle* redigirt worden ist. Er möge dem höhern Tribunal, «dem er jetzt verantwortlich sein mag, Rede stehen für die Ent«stellungen Ihrer Arbeit, die er sich hat zu Schulden kommen lassen;

[1]) Gestorben 27. VI. 1880 auf dem Rittergute Rüdersdorf bei Berlin.

«ich freue mich sehr, dass ich mich jenseits nicht wegen solcher «Sünden werde verantworten müssen!»

Am 10. August 1872 wollte *Borchardt Schläfli* mit *Weierstrass* besuchen, traf ihn aber nicht.

Borchardt lud ihn oft ein, Berlin einen Besuch abzustatten: (15. März 1873.)

«Sie sind Berlin einen Besuch eigentlich schuldig, da Sie schon «im Jahr 1843 nach Berlin kommen wollten und nur durch *Steiner* «daran verhindert worden.»

Der Besuch in Berlin, im April 1876, verursachte einen ziemlich intensiven Briefwechsel; *Schläfli* wohnte auch einer Sitzung der Akademie bei. *Borchardt* selbst kam jedes Jahr nach Thun, wo sich *Schläfli* öfters bei ihm einfand. —

Wir führen hier den Brief *Schläfli's* an *Borchardt* an (vom 16. März 1876), dessen Concept vorliegt:

«Ich hatte strebsame und fleissige Zuhörer und wandte vielen «Fleiss auf meine Vorlesungen, in dem Sinne wie Sie schon aus münd- «lichen Mittheilungen wissen. Eine Vorlesung trieb mich auf's Neue «an, über die Convergenz der Reihe $\Sigma A \mathfrak{J}(\beta x)$, $[\mathfrak{J}(\beta) = 0,\ \beta > 0]$, x positiv «in's Klare zu kommen, womit ich mich früher schon vergeblich ab- «gemüht hatte; ich suchte Rath bei einer aus *Hankel's* Nachlass in den «Math. Annalen veröffentlichten Abhandlung; aber die Lösung des «Knotens, die ich hier fand, erschien mir zu künstlich und zu meinem «Trost fand ich, dass die Sache lange nicht so schwierig ist, wie ich «meinte. Weil nun die gefundene Lösung auf die Annalen Bezug hatte «und weil ich gegen *Neumann* die lange unterlassene Empfangsanzeige «für geschenkte Bücher abzubüssen hatte, so schickte ich ihm die «wenigen Federstriche, welche die Lösung enthielten zu.

«Was sagen Sie zu der Sammlung von Originalberichten der «Verfasser mathematischer Abhandlungen, welche *Königsberger* und «*Zeuner* herausgeben wollen? Die Sache ist bereits stark in der «Uebung, insofern als viele Verfasser ihren Arbeiten eine Inhaltsanzeige «voran schicken. Aber das noch extra in einer besondern Zeitschrift «zu thun, scheint mir, sollte für viele Arbeiter unangenehm sein. Man «kommt sogar nicht aus der Subjectivität heraus. Wenn dagegen ein «anderer meine Arbeit kritisirt, so habe ich doch die Genugthuung «zu wissen, dass sie jemand gelesen hat.» —

Darauf antwortete ihm *Borchardt* (21. März 1876): «Das *Königs-* «*berger-Zeuner'sche* Unternehmen bildet eine Concurrenz der «Fortschritte

«der Mathematik» von *Ohrtmann* und *Müller*. Ich behalte mir mein «Urtheil über diesen Versuch noch bis dahin vor, wo bereits eine «Reihe von Heften dieses Bulletins Auskunft über den darin herrschenden «Geist gegeben haben werden.

«Da die Unternehmer nicht darauf rechnen können, von allen «mathematischen Autoren Anzeigen zu erhalten, so ist es schwer ver- «ständlich, auf welche Weise sie die durch mangelnde Original- «Anzeigen entstehenden Lücken ausfüllen wollen. Dass Original-Anzeigen «von grossem Interesse sind, besonders wenn sie in dem sachlichen «Styl geschrieben sind, in welchem *Gauss* seine Abhandlungen in den «Göttinger Anzeigen besprach, ist unfraglich. Aber wo findet sich in «der heutigen Generation die dazu nöthige *Gauss'sche* Tiefe und Reife?»

Brändli, H. (1872) Lehrer der Mathematik, zuerst in Burgdorf, dann in Zürich. Longimetrische Functionen.

Bützberger, F., Lehrer am Technikum Burgdorf. (1887—1895.) Geometrisches und Persönliches.

Casorati, F., Professor in Mailand etc. *Schläfli* war mit der ganzen Familie sehr befreundet, besuchte dieselbe mehrmals in ihrem Sommer-aufenthalt in Molvedo, Rezzonico am Comersee. Der Briefwechsel beschlägt das *Dirichlet*'sche Princip, die *Schwarz*'schen Minimalflächen, *Gauss*'sche Gewebelehre, Differentialgleichungen etc. und dauert von den sechziger Jahren bis zum Tode *Felice Casorati's* 1891.

Cassani, Pietro. Venezia. (1872.)

Cayley, Arthur. Cambridge. (1856—1871.) Flächen 3. Ordnung und die 27 darauf sich findenden Geraden und andere Arbeiten.

Chelini, Domenico della Scuola Pie. (1844—1845.) Druck der Uebersetzung *Schläfli's* von *Steiner's* «Sul baricentro di curvatura» Giornale arcadico 1845.

Cremona, Luigi, Professor an der *R. Scuola* degli *ingegneri*, jetzt in Rom. Flächen 3. Grades, Zusammenhang nach *Riemann*.

Dufour, G. H. (1851.) Ueber Pendelbeobachtungen.

Enneström, G. (1885.) Abhandlung in den «Acta mathematica».

Fankhauser, F., Pfarrer in Signau. (1861.) Schulkamerad von *L. Schläfli*.

Fiedler, W. (1882.) Geometrie.

Frölich, Oscar. (1865—1871.) Physikalische Gegenstände. Unterricht an der Hochschule Königsberg.

Froté, Eugène, Ingénieur, St. Imier. (1856—1860.) Schüler von *Schläfli*, der erste der bei *Schläfli* ein Fachexamen (nicht Doctorat) gemacht hat.

Geiser, C. F. (1874—1895.) Persönliches.

Graefe, F., jetzt Professor in Darmstadt. (1881.)

Grosmann, K. Stuttgart. (1868—1876.) Auflösung der Gleichung 5. Grades, *Dirichlet's* Princip, Diskussion mit *S. Gundelfinger.*

Gubler, E., Docent, Zürich. Ueber die verschiedensten Gegenstände der höheren Mathematik, meistens im Anschluss an dessen Studien bei *Schläfli* in Bern.

Gundelfinger, S. (1869—1871.)

Gruner, P., jetzt Gymnasiallehrer und Docent in Bern. (1889 bis 1891.) Seine Studien.

Gysel, Julius. Gymnasialdirektor in Schaffhausen. (1874—1894.) Persönliches.

Heller, F. Grossrath in Bern. (1872.) Fortbildung in der Mathematik.

Hermite, Charles. (1882—1891.) Wir geben folgenden Brief wieder: «Permettez-moi de vous informer que la section de géometrie «de l'Académie des Sciences a pris la décision de vous offrir un exem- «plaire des Œuvres de Cauchy en témoignage de ses sentiments de «haute estime pour vos travaux. Le premier volume contenant le «mémoire sur la théorie des ondes et le mémoire sur les integrales «définies vous sera prochainement envoyé ainsi que la notification «officielle du secrétaire perpétuel, au nom de l'Académie. C'est en «joignant à l'hommage de mes confrères l'expression d'une profonde «et bien sincère sympathie, que je vous prie Monsieur, de recevoir «l'assurance de ma plus haute considération.»

Paris, 21 Mars 1882. *Ch. Hermite.*

Hilfiker, J., ehemals Assistent am Observatorium in Neuenburg. (1882—1892.) Astronomisches.

Hölder, Otto. (1882.)

Huber, G., a.o. Professor der Mathematik, Bern. (1882—1895.) Ueber Cassinische Curven.

Hunziker, E. F., Pfarrer in Thun. (1849.) Schulkamerad.

Jonquière, Alfred. (1889—1891.) Schüler von *Schläfli.* Seine Studien.

Juvalta, W. v., Schloss Ortenstein. (1873.) Wegen seinen bündnerischen Forschungen.

Kœgi, A., Prof. Dr., in Zürich, (1883—1892.) Rigveda.

Kocher, R. F. (1864.)

Königsberger, Leo. (1876.) Betrifft das Repertorium.

Klein, F., Göttingen. (1872—1876.) Damals in Erlangen und München. Der sehr eingehende Briefwechsel betrifft Fragen des Zusammenhanges der Flächen und das Verhältniss der *Analysis situs Riemann's* zur projectivischen Geometrie.

Kuhn, E. F., Pfarrer. (1887.) Schulkamerad von *Schläfli*. Liebhaber der Mathematik.

Lampe, E. Berlin. (1873.) Aufsatz in *Darboux's* «Bulletin des sciences mathématiques» über orthogonale Flächensysteme.

Langhans, F., ehemals Professor in Bern. (1875.) Philosophisches.

Lenz, G., Pfarrer, Rapperswyl. (1873.) Liebhaber der Mathematik.

Linde, Is. Schüler *Schläfli's*. (1887—1888.) Integration.

Litwinoff, Elisab. v. Schülerin *Schläfli's*. (1874—1884.) Ueber Abbildungsaufgaben.

Meyer, Arnold, Zürich. (1871—1895.) Persönliches.

Meyer, Paul, Golden, State of Colorado U. S. A. (1888—1889.) *Dirichlet'*sches Princip.

Metzdorff, Direktor in Proskau, ehemals Professor an der Thierarzneischule in Bern. (25. August 1876.) Persönliches.

Moser, Ch., Bern. (1886—1895.) Schüler *Schläfli's*. Synthet. Geometrie. Sein Pariser Aufenthalt.

Mossbrugger, Leop., Aarau. (1865.)

Neumann C., (1868—1876), der ihn um die Mitarbeiterschaft an den Mathematischen Annalen bat und mit ihm correspondirte über die Aufnahme der in Band III der Mathematischen Annalen gedruckten Arbeiten über *Bessel'*sche Functionen und die hypergeometrische Reihe.

Padova, Ernesto, Livorno. (1871—1873.)

Papon, A., Lehrer. (1876.) Persönliches.

Prisi, Jakob, Sekundarlehrer, Grosshöchstetten und Lyss. (1866 bis 1878.) Unglücklicher Schüler *Schläfli's*.

Ratzel, F. (1889.) Ueber den Forschungsreisenden Dr. *F. Schläfli*.

Rebstein, J. (1871—1873.) Bestimmung von Beobachtungsfehlern.

Ribi, David (1881), ehemals Gymnasiallehrer in Bern. Gammafunctionen.

Ris, F., Vater, Prof. der Philosophie in Bern. } langjährige
Ris, F., Dr. med., Sohn, Arzt in Thun. } Freunde *Schläfli's*.

Rhiner, Jos., Schwyz. (1860.) Neue Pflanzenarten im Berner Oberland.

Rode, Ludwig, Bekannter von Thun her, Lehrer in Peterlingen, Thun, Neuenstadt, Rolle und Montreux. 1884 in Ruhestand. (1863 bis 1891.)

Ruefli, J., Lehrer der Mathematik an der Mädchensekundarschule Bern. (1883—188?.) Astronomisches: Dauer von Sonn- und Mondfinsternissen.

Schiff, Hugo, ehemals Docent der Chemie in Bern, jetzt Professor am Istituto di studi superiori in Florenz, kam Ende Juli 1857 nach Bern, hat damals *Schläfli* gleich im Café Gräf getroffen. *Schläfli* correspondirte auch mit Frau *Elisa Schiff*, der Gemahlin von *Moritz Schiff* in Genf, mit *Robert Schiff*, damals in Zürich studirend. Mit der ganzen Familie *Schiff* war *Schläfli* durch intime Freundschaft verbunden.

Schorer-Haas, Alex., Geometer. (1866—1871.) Gestorben Ende März 1895 in Drouin (Australien). Integrationen.

Schmalz, J. J., Geometer, Büren. (1848—1891.) Schulkamerad und Freund von *L. Schläfli*. Liebhaber der Astronomie; siehe Wolf, Notizen zur Kulturgeschichte der Schweiz, Nr. 458.

Schmied, Joh., Pfarrer, Muttenz. (1862.) Kegelschnitte und Gleichungen.

Schönholzer, J. J., a. o. Professor der Mathematik in Bern. (1874 bis 1877.) Seine Programmarbeit für die Kantonsschule Bern.

Schwarz, H. A. (1872—1880.) Empfehlung der Frau *E. Litwinoff*. Beweis des Hrn. Genocchi (Atti di Tornio IV, 1869, p. 327 bis 331.) Fragen der Abbildung.

Schweizer-Sidler, H. (1862—1883.) Sanskrit.

Spring, J., Stefflsburg. (1850.) «Wasserschmecken».

Stern, M. A. und *Stern, Alf.* (1884—1891.) Persönliches und Mathematisches.

Sylow, L., Fredrickshald. (1882.)

Tardy, P., Professor in Genua. (1865—1877.) Dessen Arbeiten.

Veltmann, W. (1879—1881), ehemals Lehrer der Mathematik zu Remagen, Preussen.

Vollenweider, C., Direktor des Technikums Burgdorf. (1885 bis 1891.) Kollegienbesuch.

Weiler, A. (1884.) Persönliches.

Weber, H. (1891.) Persönliches.

Winkler, Jakob, Kopfrechner. (1852.)

Willmann, A. (1877.) Etymologisches. Schulkamerad von *Schläfli*.

Wolf, Rudolf. (1850—1893.) Persönliche Verhältnisse und Aufnahme von Arbeiten in die Zürcher Vierteljahrsschrift.

Zeuthen, H. G. (1882.)

Beim Tode *L. Schläfli's* sind eine grosse Zahl von Nekrologen erschienen, so im «Bund» 1895 Nr. 80 22. März 2. Blatt, im «Berner Tagblatt» Nr. 69 1895 22. März, im «Berner Schulblatt», in der «Allgemeinen Schweizerzeitung» Nr. 71 2. Blatt 24. März, alle vom Verfasser dieser Schrift, sodann im «Intelligenzblatt» 1895 Nr. 70 23. März und in der Leipziger «Illustrirten Zeitung» vom 13. April 1895 mit dem wohlgetroffenen Bild des Verewigten, das wir hier an der Spitze dieser Schrift uns zu reproduziren erlaubt haben, beide Artikel sind von Hrn. Dr. *Ch. Moser*, Docent und Mathematiker des Eidgen. Landwirthschafts- und Industrie-Departements, das Bild ist reproduzirt nach einer Photographie des Hrn. Weidmann, Secretär im gleichen Departement. In der Beilage «Berg und Thal» zur Schweizerchronik erschien (siehe Nr. 18 4 V. 1895) eine biographische Skizze Schläfli's (ebenfalls von J. H. Graf verfasst), der ein wohlgelungenes Bild beigegeben war, das eine frühere, ca. 1884 von Photograph Vollenweider verfertigte Photographie wiedergibt. An der Spitze des Blattes stand folgendes Sonett von A. C.:

† Professor Dr. Ludwig Schläfli in Bern.

Die Feierstunde schlug dem Lebensmüden,
So ist nach heissem Tag der Greis entschlafen,
Um zu gelangen in der Ruhe Hafen,
Zu jenem Ziel, das allen ja beschieden.

Und sind's der Lebenstage viel hienieden,
Verbracht in treuem Wollen — regem Schaffen,
So sind vergessen nicht die Tapfern, Braven,
Es lebt ihr Werk — ob sie auch ruh'n im Frieden.

Es lebt ihr Werk und es wird weiter leben;
Denn was gewirket edler Menschen Streben,
Das kann nicht flüchtig, wie sie selbst, entschwinden.

Entschwinden? Nein, Gott wird sie neu entzünden
Die Geister, die gesäet der Zukunft Saaten,
Und ihre Zeit geweiht mit edlen Thaten.

Endlich darf ich nicht unerwähnt lassen, dass *F. Brioschi*, Präsident der Reale Accademia dei Lincei, dem Verstorbenen am 7. April 1895 folgenden Nachruf[1]) gehalten hat, der sich im Vol. IV, 1° Sem. Serie 5ª Rendiconti abgedruckt findet:

[1]) Einige fehlerhafte Jahreszahlen wird der Leser wohl gütigst selbst corrigiren und ihr Vorkommen Hrn. *Brioschi* gegenüber entschuldigen.

«Ho di nuovo il doloroso compito di annunziare all'Accademia la perdita di un Socio straniero nella Sezione delle Matematiche.

«Il chiaro Geometra Lodovico Schläfli moriva in Berna la mattina del dì venti dello scorso marzo. Il professori, gli scolari di quella Università, la cittadinanza tutta, tributarono alla memoria di lui i maggiori onori, rimeritando così la feconda opera sua di insegnante, e di scienziato.

«Nato il 15 gennaio 1814 a Grasswyl, piccolo comune del Cantone di Berna, dalla sua prima giovinezza Schläfli diede singolari prove di attitudine alle scienze matematiche ed alle filologiche. Fondata nell'anno 1834 l'Università di Berna, appartenne alla facoltà Teologica fino al 1838, nel quale anno fu ordinato pastore. Ma contemporaneamente egli continuava da sè lo studio delle matematiche superiori, ed abbandonato l'ufficio di pastore, accettò di insegnare matematica e scienze naturali nel proginnasio di Thun, ove rimase fino al 1847. In questo anno si abilitò come privato docente nell'Università di Berna, nel 1852 vi fu nominato professore straordinario e nel 1872 promosso ad ordinario. Nel 1891, all'età di 77 anni, già da qualche tempo sofferente di salute, chiese il riposo.

«Lo Schläfli accoppiava ad una vasta coltura matematica, le cognizioni di un filologo e di un botanico. Poteva scrivere correttamente in tedesco, in italiano, in francese ed inglese, come lo dimonstrano i suoi lavori matematici.

«Fu più volte in Italia ospite costante di un nostro compianto carissimo collega il Casorati; ed aveva fra noi amici, ed ammiratori della sua lucida mente e delle sue modeste abitudini. Ma il suo primo viaggio nel nostro paese, nel 1847, merita speciale menzione, essendo venuto in Roma in compagnia di Jacobi, di Dirichlet, e di Borchardt.

«I primi lavori dello Schläfli rimontano agli anni 1846, 1847; appartengono alla geometria differenziale, e furono pubblicati in un periodico di Berna. Ma il lovoro che acquistò ben presto a lui fama di insigne matematico, si è quello sulla eliminazione, o sopra il risultante di un sistema di equazioni algebriche, publicato nel 1851 negli Atti dell'Accademia di Vienna. Rileggendo ancora negli scorsi giorni quella importante memoria, parmi poter affermare che già nella medesima si rinvengono le qualità predominanti in tutta l'opera dello Schläfli, e cioè, dapprima conoscenza profonda, completa, dei lavori altrui sull'argomento, poi tendenza e facilita nel generalizzare i risultati, perspicacia somma nell'esaminare i problemi sotto i vari loro aspetti.

«Tutti i periodici matematici di Europa, i giornali di Crelle e di Liouville, il Quarterly Journal, i Mathematische Annalen, gli Annali di Matematica, contengono memorie dello Schläfli, e inoltre i Comptes-Rendus de l'Académie des Sciences, e le Philosophical Transactions della Società Reale di Londra.

«Agli Annali di Matematica egli dedicò importanti suoi lavori sopra svariati argomenti. Non è mio intendimento di addentrarmi in un esame dei medesimi, come degli altri pubblicati altrove; ma oggi ancora rammento la grata impressione nel leggere (1868) la memoria «*Sulle relazioni tra diversi integrali definiti che giovano ad esprimere «la soluzione generale della equazione di Riccati*» l'altra che ha per titolo — *Sugli spazi di curvatura costante — Nota ad una memoria del prof. Beltrami* (1871) infine quella — *Sopra un teorema di Jacobi recato a forma più generale ed applicato alla funzione cilindrica* (1871). Quest' ultimo lavoro è connesso agli altri di molto valore sulle funzioni di Bessel e di Heine, pubblicati in alcuno degli indicati periodici.

«Schläfli non ebbe altro pensiero, altro amore nella sua vita, che per la scienza e per l'insegnamento. Uno dei suoi scolari scrivevami giorni sono: «Questi (gli scolari), che erano la sua famiglia, «possono dire quale spirito di abnegazione e di sacrificio, quale tesoro «di affetto, fossero nell'animo del loro maestro». E di questa abnegazione diede prova allorquando invitato ad assumere una cattedra in altra Università con sensibile vantaggio nelle condizioni pecuniarie, rifiutò per non abbandonare la patria, e la famiglia dei suoi scolari.

«Al lutto dell'Università di Berna per la morte dell'eminente scienziato si associa di cuore la R. Accademia dei Lincei».

Damit sind wir vorläufig zu Ende mit unserer Skizze. Eine specielle Würdigung des Gelehrten als Mathematiker müssen wir uns in einer späteren Arbeit im nächsten Jahresbande vorbehalten. Es drängt uns aber, den Herren Prof. Dr. *Hugo Schiff*, Prof. Dr. *G. Sidler* und Frl. *Marg. Spichtin* für alle Beihülfe bei der Abfassung der vorliegenden Schrift den herzlichsten Dank auszusprechen.

Gedruckte Abhandlungen L. Schläfli's.

Mittheilungen der Naturforschenden Gesellschaft in Bern.
(abgekürzt M. B.)

1) Ueber ein räumliches System von Geraden im Allgemeinen und über dasjenige der Normalen einer krummen Fläche insbesondere. M. B. 1846. S. 88—100. M. B. 1846. S. 111—119.

2) Ueber den Ort der Mittelpunkte grösster und kleinster Krümmung beim Ellipsoid, die kürzeste Kurve auf demselben und verwandte Gegenstände. M. B. 1846. S. 145—160.

3) Bemerkungen über confocale Flächen 2. Grades und die geodätische Linie auf dem Ellipsoid. M. B. 1847. S. 97—101.

4) Ueber die Relationen zwischen den neun Cosinus, durch welche die gegenseitige Lage zweier rechtwinkliger Coordinatensysteme bestimmt wird. M. B. 1848. S. 27—33.

5) Ueber eine Verallgemeinerung des Lagrange'schen Lehrsatzes für die der Beweis noch gefordert wird. (4. März 1848.) M. B. 1848. S. 97—109.

6) Ueber eine durch zerstreuendes Licht bewirkte Interferenzerscheinung. (3. Juni 1848 vorgetragen.) M. B. 1848. S. 177—183.

7) Ueber die einfachste Art, die Differenzialgleichungen 1. Ordnung, durch welche die Störungen der elliptischen Elemente einer Planetenbahn bestimmt sind, auszudrücken. (3. Juni 1848.) M. B. 1848. (S. 184—186.)

8) Bemerkung zu einem Aufsatz von *H. Brändli*, über arithmetische, geometrische und harmonische Mittel. M. B. 1849. S. 178. Anmerkung.

9) Ueber zwei Cucurbitaceen. (gelesen 15. November 1851.) M. B. 1852. S. 5—21.

10) Elementare Bestimmung der Beschleunigung der elliptischen Planetenbewegung. (Mit 1 Tafel.) M. B. 1862. S. 65—82.

11) Ueber den Gebrauch des Integrationsweges. (Eingereicht im Dezember 1862.) M. B. 1862. S. 257—267.

Giornale arcadico di Scienze e Lettere.

12) *Steiner*: Teoremi relativi alle conichi inscritte e circoscritte. Vol. 99. p. 147—161. (Vgl. Crelle XXX.)

13) — Del baricentro di curvatura delle curve piane. Trattato del Sign. J. Steiner. Tradotto dal Tedesco.
Vol. 101. p. 237—280.
» 102. p. 1—31 und p. 121—160.

14) *Jakobi:* Sulle condizioni di ugualianza di due radici dell' equazione cubica etc.
Vol. 99. p. 3—11. (Vgl. Crelle XXX.)

15) Sul principio dell' ultimo moltiplicatore etc.
Vol. 99. p. 129—146.

Grunert's Archiv.

16) Bemerkungen über die Lambert'sche Reihe. (Grunert's Archiv X p. 332—340. 1847.)

17) Betrachtung der Coeffizienten in der Entwicklung des Produktes $\prod_{i=0}^{i=n-1}(1 + i x)$ nach steigenden Potenzen von x.

18) (Ib. id.) .— Nachtrag hiezu. (Ib. XII. 1849.)

19) Anwendung des barycentrischen Calculs auf die Bestimmung der grössten einem Vierseit eingeschriebenen und der kleinsten einem Viereck umschriebenen Ellipse. (Ib. XII, p. 39—129, 1849.)

20) Geometrischer Beweis zweier bekannter Sätze über die elliptischen Functionen der ersten Art. (Ib. id.)

21) Ueber die Relationen zwischen den neun Cosinus, durch welche die gegenseitige Lage zweier rechtwinkliger Coordinatensysteme bestimmt wird. (Ib. XIII. 1849.)

22) Construction des Näherungswerthes $\frac{355}{113}$ der Zahl π. Ib. XI, p. 98. 1849.

23) Ueber die Begründung der Theorie der elliptischen Functionen durch die Betrachtung unendlicher Doppelprodukte. (Ib. XIV., p. 393—451. 1850.)

Denkschriften der Wiener Akademie.

24) Ueber die Resultate eines Systems mehrerer algebraischen Gleichungen, ein Beitrag zur Theorie der Elimination. Aus dem IV. Band der Denkschriften der math.-naturw. Classe der kaiserl. Akademie der Wissenschaften besonders abgedruckt. Wien, k. k. Hof- und Staatsdruckerei, 1852. Vorgelegt 9. Januar 1851. 74 S. Folio.

Programm der Berner Hochschule.

25) Lösung einer Pendelaufgabe.

Zum Lections-Katalog der Berner Hochschule 1867. Bern. 1867. (Ueber die Bewegung eines starren Körpers, der in Bezug auf seinen Schwerpunkt zwei gleiche Hauptträgheitsmomente hat, wenn ein in der Axe des dritten ungleichen Hauptträgheitsmoments befindlicher Punkt befestigt und der Körper der Schwere unterworfen ist.) 27 S. 4°.

26) Einige Zweifel an der allgemeinen Darstellbarkeit einer willkürlichen periodischen Function einer reellen Variabeln durch eine trigonometrische Reihe. 1874. Bern, 1874. 27 S. 4°.

27) Ueber die zwei *Heine*'schen Kugelfunktionen mit beliebigem Parameter und ihre ausnahmslose Darstellung durch bestimmte Integrale. Festschrift zum Lections-Katalog der Hochschule. 1881. 66 S. Folio.

Journal für reine und angewandte Mathematik. (Crelle.)

28) Sur les coefficients du développement du produit $1 . (1 + x) (1 + 2x) \ldots (1 + \overline{n - 1} . x)$ suivant les puissances ascendantes de x. (Crelle's Journal 43. 1852.)

29) Ueber das Minimum des Integrales $\int \sqrt{(dx_1^2 + dx_2^2 \ldots + dx_n^2)}$, wenn die Variabeln $x_1, x_2 \ldots x_n$ durch eine Gleichung zweiten Grades gegenseitig von einander abhängig sind. (Ib. p. 23—36.)

30) Ueber eine Function von drei Winkeln, deren erste Abgeleitete ebenfalls als Winkel anzusehen und durch algebraische Relationen ihres Cosinus zu denen der Unabhängigen bestimmt sind. (Ib. 48. 1854 p. 292—300.)

31) Ueber eine symbolische Formel, die sich auf die Zusammensetzung der binären quadratischen Formen bezieht. (Ib. 57, p. 170—174. 1860.)

32) Ueber invariantive Elemente einer orthogonalen Substitution, wenn dieselbe als Ausdruck einer Bewegung jeder Gruppe von Werthen der Variabeln aus dem identischen Zustande in den transformirten gefasst wird. (Bd. 65, p. 185—187. 1866.) 3 S.

33) Erweiterung des Satzes, dass zwei Polendreiecke perspektivisch liegen, auf eine beliebige Anzahl von Dimensionen. (Bd. 65, p. 189—197. 1866.) 9 S.

34) Ergänzung zur Abhandlung über die Entwicklung des Produktes $1 . (1 + x) (1 + 2x) \ldots (1 + \overline{n - 1} . x) = \overset{n}{\Pi}(x)$ im Band 43 dieses Journals. (Bd. 67, p. 179—182, 1867.) 4 S. Bern, 28. Nov. 1866.

Dieser Arbeit angeschlossen:

35) Ueber die Entwickelbarkeit des Quotienten zweier bestimmter Integrale von der Form $\int dx . dy \ldots dz$. (Bd. 67, p. 183—199. 1867.) 17 S. 4. Dezember 1866.

36) Ueber die partielle Differenzialgleichung $\frac{dw}{dt} = \frac{d^2w}{dx^2}$. (Bd. 72, p. 263 bis 284. 1870.) 22 S. 27. April 1870.

37) Beweis der Hermite'schen Verwandlungstafeln für die elliptischen Modularfunctionen. (Bd. 72, p. 360—369. 1870.) 11 S. 31. Juli 1870.

38) Ueber die allgemeinste Flächenschaar zweiten Grades, die mit irgend zwei andern Flächenschaaren ein orthogonales System bildet. (Bd. 76, pag. 126—148. 1873.) 23 S. 8. Juli 1870.

Daran schliesst sich:

39) Ueber die linearen Relationen zwischen den 2 p Kreiswegen erster Art und den 2 p zweiter Art in der Theorie der Abel'schen Functionen der Herren Clebsch und Gordan. (Bd. 76. 1873.) 7 S. 21. März 1873.

40) Ueber die allgemeine Möglichkeit der conformen Abbildung einer von Geraden begrenzten ebenen Figur in eine Halbebene. (Bd. 78, pag. 63—80). 1874. 24. Aug. 1873.

Mathematische Annalen.

41) Ueber die *Gauss*'sche hypergeometrische Reihe. (III. Bd., p. 286 bis 295.) 1870.

42) Einige Bemerkungen zu Herrn Naumann's Untersuchungen über die Bessel'schen Functionen. (Bd. III, p. 134—149.) 1870.

43) Ueber die Convergenz der Entwicklung einer arbiträren Function f(x) nach den Bessel'schen Functionen

$$\overset{a}{J}(\beta_1 x),\ \overset{a}{J}(\beta_2 x),\ (\overset{a}{J}(\beta_3 x),\ \ldots,\ \text{wo } \beta_1, \beta_2, \beta_3 \ldots$$

die positiven Wurzeln der Gleichung $\overset{a}{J}(\beta) = 0$ vorstellen. (Bd. XII, p. 137—142. 1876.) 6 S. 17. Januar 1876.

Vierteljahrsschrift der naturforschenden Gesellschaft in Zürich.

44) Bemerkungen und Zusätze zum ersten Heft der mathematischen Mittheilungen Herrn Prof. *Raabe*'s. Bd. III, pag. 23—36. 1858.

45) Betrachtungen über verschiedene Gegenstände die in Herrn *Hug*'s «Mathematik in systematischer Betrachtungsweise» vorkommen. Bd. VII, pag. 366—409. 1862.

46) Ueber den Satz III in Herrn *Hug*'s mathematischen Mittheilungen vom 1. August 1862. Bd. VIII, p. 79—82. 1863.

47) Bemerkungen zu Herrn Dr. *Sidler*'s Theorie der Kugelfunctionen. Bd. VIII, pag. 205—215 und pag. 324—339. 1863.

Collectanea mathematica in memoriam D. Chelini. Mediolani 1881.

48) Einige Bemerkungen über die *Lamé*'schen Functionen. Collectanea p. 277. 11 S. 30. November 1880.

Accademia dei Lincei:
Memorie della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

49) Verbesserungen und Zusätze zu den Bemerkungen: Ueber die *Lamé*'schen Functionen. (Collectanea mathematica in Memoriam *D. Chelini*, p. 277.) Memorie Serie I^a, Bd. IV. 10 S. Folio.

Annali di Matematica pura ed applicata
Brioschi e *Cremona,* Milano.

50) Sul moto di un pendolo, quando la retta passante pel punto di sospensione e pel centro di gravità e, per questo punto, il solo asse principale d'inerzia che sia determinato di posizione. Serie II^a, tomo I°. Fasc. II^a, p. 105—131. 1868. 26 S.

51) Sulle relazioni tra diversi integrali definiti che giovano ad esprimere la soluzione generale della equazione di Riccati. Serie II^a, tomo I°. Fasc. III°, pag. 232—240. 1868. 11 S.

angeschlossen:

52) Alcune osservazioni interno alle funzioni di *Laplace.* Serie II^a, tomo I°, Fasc. III°, p. 241—247. 1868. 5 S.

53) Sopra una equazione a differenziali parziali del primo ordine. Serie II^a, tomo II°, Fasc. I°, pag. 89—96. 1869. 8 S. März 1867.

54) La risolvente dell' equazione di quinto grado sotta la forma di un determinante simmetrico a quattro linee. Serie II^a, tomo III°, Fasc. I°, pag. 171—174. 1870. 4 S. August 1869.

55) Sullo sviluppo del periodo imaginario pel caso che il modulo delle funzioni ellittiche sia abbastanza piccolo. Serie II^a, tomo III°. Fasc. III°, pag. 243—248. 1870. 6 S.

56) Nota alla memoria del Sig. *Beltrami:* «Sugli spazii di curvatura constante». Serie II^a, tomo V°, pag. 178—193. 1872. 15 S. Aug. 1871.

57) Sopra un teorema di *Jacobi* recato a forma più generale, ed applicato alla funzione cilindrica. Serie II^a, tomo V°, pag. 199—205. 1872. 6 S. August 1871.

58) Quand' è, che dalla superficie generale di terz' ordine si stacca una parte che non sia realmente segata da ogni piano reale? Serie II^a, tomo V°, pag. 289—295. 1873.

59) Correzione alla memoria intitolata: Quand' è, che dalla superficie generale di terz' ordine si stacca un pezzo rientrante? Serie II^a, tomo VII°, p. 193—196. 1876. 4 S. 2. Sept. 1875.

Rendiconti del R. Istituto Lombardo.

60) Del nesse che vige fra l'analisi e l'intuizione geometrica. Vol. V. Fasc. V. 1872.
(Dat. Pederno d'Adda, September 1871, als Gast von *Cremona.*)

Philosophical Transactions
of the R. Society of London. MDCCCLXIII.

61) On the distribution of surfaces of the Third Order into species, in reference to the absence or presence of singular points, and the reality of their lines. Communicated by *Arthur Cayley,* F. R. S. 48 S. 4°.

Quaterly Journal of pure and applied mathematics,
edited by *Sylvester* and *Ferrers*. London.

62) On a Generalisation given by *Laplace* of *Lagrange's* Theorem. By Dr. *Schlœfli*. Bern, Januar 1856. Vol. II, p. 24—31.

63) An Attempt to determine the Twenty-Seven Lines upon a Surface of the Third Order, and to divide such Surfaces into Species in reference to the Reality of de Lines upon the Surface. By Dr. *Schlœfli*. Translated by *A. Cayley*. Vol. II, p. 55—65 and p. 110—120.

64) On the Multiple Integral $\int_0^n dx\,dy \ldots dz$, whose limits are

$$p_1 = a_1 x + b_1 y + \ldots + h_1 z > 0,\ p_2 > 0,\ \ldots\ p_n > 0,$$
$$\text{and } x^2 + y^2 + \ldots + z^2 < 1.$$

By Dr. *Schlœfli*. Vol. II, pag. 269—301. Vol. III. p. 54—68 and 97—108.

65) On *Staudt's* Proposition relating to the *Bernoullian* Numbers. By Professor *Schlœfli*. Vol. VI, p. 75—77. (See *Crelle's* Journal, Vol. XXI, p. 372.)

66) A consequence of Mr. *Cayley's* Theory of Skew Determinants concerning the Displacement of a Rigid System of an Ever Number of Dimensions about a Fixed Origin. By Professor *Schlœfli*. Bern, 27. October 1865. Vol. VIII, p. 167—182.

67) Solution of a Partial Differential Equation. By Professor *Schlœfli*. Vol. VIII, p. 252—256.

68) On the Expansibility of the Multiple Integral treated of in Vol. II, p. 269. By Professor *Schläfli*. Vol. VIII, p. 370—373.

Acta Mathematica
herausgegeben von *G. Mittag-Leffler*.

69) Ueber $\int_0^\infty \frac{\sin a x}{\sin b x} \cdot \frac{dx}{1+x^2}$ und verwandte Integrale.
Bd. VII, 2. Heft, pag. 177—196. 20 S. Bern. 13. August 1885.

Journal de Mathématiques pures et appliquées. (J. Liouville.)

70) Reduction d'une intégrale multiple qui comprend l'arc de cercle, l'aire du triangle sphérique comme des cas particuliers. Tom. XX 1855, p. 359—394. 35 S. 4°.

Nachgelassene Manuscripte Schläfli's.

(Einzelne, die augenscheinlich schon im Druck erschienen sind, habe ich mit einem * versehen).

Mathematik und mathematische Physik.

1) Auszug aus *Leroy's* darstellender Geometrie. Rechnungen, die Optik betreffend, 3 Hefte.
2) Bemerkungen zu Lamé's Physik.
3) Tafel der durch 3 nicht theilbaren Zahlen in ihre ersten Faktoren zerlegt.
4) Notizen betreffend Nationalvorsichtskassa.
*5) Sur les coefficients dans le développement du produit $1\ (1+x)\ (1+2x)\ \ldots\ (1+(n-1)x)$ selon les puissances descendantes de x.
6) Démonstration analytique simple de l'équation différentielle de premier ordre à la ligne géodésique sur un ellipsoïde quelconque.
7) Théorème sur les trois cordes qu'interceptent trois surfaces homofocales sur une même droite quelconque.
Note sur une expression générale donnée par *M. Gauss* pour la mesure de courbure d'une surface quelconque.
8) Berechnung von $\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)$ und $\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)$.
9) Approximative Integration. Bestimmung einer Function durch Randwerthe ihrer reellen Componente längs eines Kreises. *Fourier'sche* Reihe. *Laurentischer* Satz. Gewöhnliche Behandlung der trigonometrischen Reihe. *Dirichlet's* Behandlung der trigonometrischen Reihe.
Anwendung der trigonometrischen Reihe auf eine Verwandlung der elliptischen Thetareihe.
Anwendung der trigonometrischen Reihe auf die *Kepler'sche* Aufgabe. Schwingende Saite.
Ueber das *Dirichlet'sche* Princip nach *Riemann*.
Ueber Kugelfunctionen.
10) 1861. Von einem Punkte innerhalb eines ebenen Dreiseits (def) gehen Strahlen a b c nach dessen Ebenen; wie sind die Bedingungen
$$\cos(bd) + \cos(cd) = 1$$
$$\cos(ce) + \cos(ae) = 1$$
$$\cos(af) + \cos(bf) = 1$$
zu erfüllen?
11) Wann ist die Summe der 6 Keile eines Tetraeders ein Maximum oder Minimum? (Differenzialgleichungen zwischen den Stücken eines Kugeldreiecks).
12) Relationen zwischen den Stücken eines tetrasphärischen Plagioschems?
Ueber das Continuum dritten Grades in der vierfachen Totalität.
Inhalt des tetrasphärischen Plagioschems, annähernd bis auf die 5. Ordnung hinsichtlich der Seiten ausgedrückt, mittelst Zerlegung in 6 Orthoscheme.
*13) Zu *Sidler's* Theorie der Kugelfunctionen.

14) Ueber die vortheilhafteste Wahl der Ordinaten zur parabolischen Quadratur.

15) Die Function $Xn(\cos\Theta\cos\Theta' + \sin\Theta\sin\Theta'\cos\psi)$ in die Form $M_0 + 2\sum_{\lambda=1}^{\lambda=n} M_\lambda \lambda\cos\lambda\psi$ zu bringen.

16) Entwicklung von $\left(\frac{1+\sqrt{1-4x}}{2}\right)^n$, wenn n beliebig und absol. $< \frac{1}{4}$.

17) Ueber Hauptkrümmungsrichtungen einer Fläche. — Krümmungsmaass.

18) Zwei nicht äquivalente binäre quadratische Formen können nicht eine und dieselbe primitive Form impliciren.

19) Gleichung einer Geraden, die die Focalellipse und Hyperbel schneidet, in confocalen Coordinaten.

20) Potential eines homogenen von einem Ellipsoid umschlossenen Körpers

21) Wenn e eine ungerade Primzahl und $h > 1$, so gehören zum Discr. $e^2 h$, $e - \left(\frac{-h}{e}\right)$ so viele reine Classen als zum Discr. h., zum Discr. e^2 gehören $\frac{1}{2}\left(e - \left(\frac{-1}{e}\right)\right)$ Classen.

22) Bewegung eines starren Körpers, auf den keine äusseren Kräfte wirken.

23) Bewegung eines festen Körpers um einen festen Punkt, wenn nur die irdische Schwere auf ihn wirkt und für den Fall, wo der Schwerpunkt in einer singulären Axe liegt.

24) Hauptträgheitsmoment eines festen Körpers für einen beliebigen Punkt derselben im Zusammenhang mit den confocalen Flächen.

25) Reciprocität zwischen zwei Schaaren confocaler Flächen.
Ueber Rotation eines festen Körpers unter dem Einfluss der allgemeinen Schwere.

26) Ueber das System $\Sigma x'x_1 = 0$, $\Sigma \pm x'_1 y' z_1 = 0$.
Schaar $xyz = A$.

27) Orthogonales System f f' f''.

28) Direkte Ableitung der Differenzialgleichung 3. Ordnung für f.

29) Algebraische Gleichung Θ^{ten} Grades zwischen wxyz, worin die Coefficienten gesuchte Functionen des Parameters f sind.
Fall $\Theta = 2$; beiläufige Notiz.
Integrabilitätsbedingungen. Alles (No. 18 und 206).

30) Paraboloide. Versuch die Schaar $\frac{x^2}{A} + \frac{y^2}{B} + \frac{z^2}{C} = 1$, $A(B-C)dA + B(C-A)dB + C(A-B)dC = 0$ orthogonal zu durchsetzen. Wiederholung der allgemeinen Betrachtungen. (Ein Versuch Ebenencoordinaten einzuführen).

31) Orthogonale Flächen (29. März 1869).

32) Ueber eine Transversale eines Dreiseits, wenn die in den Schnittpunkten auf die Seiten errichteten Senkrechten in einem Punkt des Dreiseits zusammentreffen, über vier Punkte im Kreis. (28. Februar 1869.)

33) Werth des Doppelverhältnisses der 4 Tangenten, die von einem Punkt der Curve dritten Grades aus an dieselbe gehen.

34) Algebraische orthogonale Flächen, im Besondern solche zweiten Grades.

35) Zu *Brioschi* Teorica dei determinanti.

36) *Malmsten*, über approximative Integration. *Crelle* XXXV.

37) *Tardy*, sopra un teorema di poligonometria (1852).

38) *Tardy*, transformazioni di un prodotto di n fattori (1851).
Sui differenziali a indice qualunque. (1858).

39) *Tardy*, sopra alcuni punti della teoria del moto dei liquidi (1847).

40) Zur Hydraulik. 2 Hefte.

41) Ueber eine symbolische Formel, die sich auf die Zusammensetzung der binären quadratischen Formen bezieht.

42) Ueber die Werke von $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n}\varphi \, d\varphi$, $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n+1}\varphi \, d\varphi$.

43) Beweis einer Formel, welche $\sum \frac{\cos n\Theta}{n^m}$ und $\sum \frac{\sin n\Theta}{n^m}$ gibt.
Beweis einer Formel, welche den Rest der Reihe ausdrückt, welche die Definition der *Bernoulli'schen* Zahlen gibt.

44) Darstellung der Zahl $C = \text{Lim.}\left(1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{k} - \text{Log}\, k\right)$, für $k = \infty$.

45) Digression über Ergänzungen bei der approximativen Integration.

46) Gränzausdruck für die Gammafunction, wenn ihr Argument unendlich wächst.

47) Ueber eine Art der Summation, wo auf das Integral nicht Differenzialcoefficienten, sondern endliche Differenzen folgen.

48) Ueber den aus Summation mittels Differenzialcoefficienten von Log x hervorgegangenen Ausdruck für Log Γ (x).

49) Bemerkung über den Ausdruck für Γ (k), wenn $k = \infty$.

50) Anwendung der Differenzen auf den Ausdruck Log Γ (x).

51) Ein Versuch, eine Function Δ (x) anzugeben, welche der Bedingung Δ (x + 1) — Δ (x) = x Log x genügt und für x = 1 verschwindet.

52) Kurzer Beweis des Satzes, der die Umkehrung einer nach den steigenden Potenzen der Variablen fortschreitenden Reihe betrifft.

53) Ueber binäre quadratische Formen.

54) 1861. Zur Lehre von den elliptischen Functionen. 2 Hefte.

55) Aufgabe: Wenn die positive Zahl a und eine hohe positive ganze Zahl n gegeben sind, so verlangt man eine untere Gränze für die positive Variable x, über die hinaus immer $e^x > ax^n$ ist.

56) Die zwei fundamentalen Definitionen der Γ-Function verglichen.

57) Ueber die Summe $\sum_{r=1}^{r=1} r^{-n} e^{+2ir\pi x}$, wenn n positiv ganz.

*58) Zum *Staudt*'schen Satz.

59) *Bernoulli*'sche Zahlen. *Raabe*'s Integrale.
60) *Kummer*'s Satz. (Sept. 1847, *Crelle* XXXV.)
61) Ueber Gammafunctionen. (Einleitung: Ueber *Bernoulli*'sche Zahlen und praktische Integration.)
62) Quaternionen.
63) Zur Entwicklung von L nach K und von $\frac{1}{\sqrt{1-\alpha}} \operatorname{Log} \frac{1+\sqrt{1-\alpha}}{2}$ (28)
64) Zu *Hattendorff*'s Ausgabe *Riemann*'scher Vorlesungen. 4 Hefte.
65) *Heine*'s Kugelfunctionen P^n und Q^n sind Functionen einer Unabhängigen; Sätze darüber.
66) Zu *Neumann*'s Lehre von den *Bessel*'schen Functionen.
67) Nachtrag zum Beweise der Entwickelbarkeit nach (*Laplace*'schen) Kugelfunctionen, Verkürzung derselben.
68) Aus *Serret*'s Algebra. 3 Hefte.
69) Sommer 1874. Analytische Mechanik. (Princip der kleinsten Wirkung) *Hamilton*'sches Integral. *Hamilton*'sche Form der Differenzialgleichung der Bewegung (Potenzial eines homogenen Ellipsoids), Gleichgewicht einer Gaskugel, deren Theile gegen einander gravitiren.
70) Potentialtheorie.
71) Zusätze zu den Auszügen aus *Dienger*'s Differenzial- und Integralrechnung.
72) *Bessel*'sche Functionen. Viele Hefte.
73) Auszug aus *Herrschel*'s Licht.
74) *Laplace*. Mécanique céleste. 3 Hefte.
75) Littrow. Astronomie.
76) Planetenstörung.
77) *C. Marx*. Ueber einen neuen experimentellen Beweis von der Axenumdrehung der Erde. *Poggendorff*'s Annalen LXXXIII. S. 302. (1851.)
78) 3 Hefte über Flächen 3. Grades.
79) Ueber die trigonometrische Reihe.
80) *Kronecker*. Ueber die Anzahl der verschiedenen Classen quadratischer Formen von negativer Determinate.
*81) Ueber die Integralformel, die ein Vieleck von einfachem Umlauf auf die nördliche Halbebene abbildet.
*82) Ueber die Reihe $f(x) = \sum_{\lambda=1}^{\lambda=\infty} A_\lambda \overset{a}{J}(\beta_\lambda x)$, wenn $\beta_1 \beta_2 \cdots$ die positiven Wurzeln der Gleichung $\overset{n}{J}(x) = 0$ bedeuten.
83) *Gauss* disquisitiones generales circa superficies curvas.
84) Bemerkungen zu Herrn *Steiner*'s Abhandlung über das Maximum isoperimetrischer Figuren. (Aprilheft 1841 des Journals von *Liouville*.)
85) Ueber den Integrationsweg.
86) *Jakobian* von 6 Punkten.
87) Bemerkungen zu *Dienger*'s Differenzial- und Integral-Rechnung. 2 Hefte.
88) Optik.

89) Flächen zweiten Grades. Krümmungslinien, orthogonale Flächen. Geometrie. (Merkwürdiger Weise findet sich hier eine Uebersetzung aus dem Englischen von Washington's Leben angeschlossen.)

*90) Betrachtungen über verschiedene Gegenstände, die in Herrn *Hug*'s Mathematik in systematischer Behandlungsweise vorkommen. 2 Hefte. (October 1862.)

91) Ueber Curven 3. Grades.

92) Ueber die Cassinische Curve.

93) *Bernoulli*'sche Functionen.

94) Die Spitze eines geraden Kegels und der Umfang seiner Grundfläche liegen in einer Kugelfläche vom Radius 1. Wann ist die Oberfläche des Kegels ein Maximum?

95) Man soll den Werth von x finden welches bewirkt, dass die Gleichung $x^4 + x^3 - x^2 - x + X = 0$ zwei gleiche Wurzeln hat.

96) Wann ist $e^{-x} x^a$ ein Maximum, wenn a pos. etc.

97) Die Periodenverhältnisse z und deren Modularfunctionen $\varphi(z)$ und X(z) auf Gebiete zu beschränken, wo jene diesen eindeutig entsprechen.

98) 1881. Analytische Mechanik:
Pendel mit horizontaler Axe.
Bewegung eines schweren Punktes in einer hohlen Kugel.
Bewegung eines starren Körpers um einen festen Punkt unter dem Einfluss der Schwere.
Kettenlinie.
Gespannter Faden auf einer Fläche $\lambda\,dx + \mu\,dy + \nu\,dz = 0$.
Gespannte Saite. Längsschwingungen eines elastischen Stabes. Fall eines punktförmigen Körpers auf einer gegebenen krummen Fläche. Die Tautochrone. Brachistochrone. Gravitation zweier Körper. Sonnensystem mit Variation der elliptischen Bahnelemente behandelt.

99) Lösungen und Erweiterungen der Algebra von *Bourdon*.

100) Einleitung zur Differenzialrechnung.

101) Des Euklides Gegebene. (Zur Lehre von der Wärme.)

*102) Distribution of the cubic surface into species in reference to the absence or presence of singular points and the reality of its lines (continued).

103) Notiz über *Friedrich August*: Disquisitiones de superficiis tertii ordinis. Berlin, Februar 1862. Inaugural-Dissertation.
On *Staudt*'s proposition relating to the *Bernoullian* numbers. (*Crelle*, XXI, S. 372.)
Supplement to the kind XXII of the cubic surface.
On same integrals connected with Riccati's equation.

104) Algebraische Analysis.

105) Osservazioni sull' equazioni cubice per la quale si determinano gli arci principali nelle superficie di second' ordine, allorchè queste sono riportate ed arci obliquangoli. (Roma, 20. Febbrajo 1844. *D. Chelini* d. S. P.)

106) Quadratische Formen.

*107) Supplement of Art. 3 (a conseq. of *Cayley*'s Theory of skew determinants). Q. J. I, p. 4.

108) *Cayley*, on some integral transformations. Q. J. I, p. 5.
109) Note on reciprocal triangles and tetrahedra, respecting to the papers on that subject in Q. J. I, p. 7. 191. 241.
Erweiterung für 3 Dimensionen.
4 Dimensionen.
n Dimensionen.
*110) Erweiterung des Satzes, dass zwei polare Dreiecke perspectivisch liegen von zwei auf eine beliebige Anzahl von Dimensionen.
Ueber invariantive Elemente einer orthogonalen Transformation.
Russell, on the application of the calculus of finite differences to the solution of linear differential equations. Q. J. I, p. 23.
111) *Spottiswoode*, note on axes of equilibrium. Q. J. I, p. 36.
112) Versuch die Gleichung $x^5 - x^3 - 2x^2 - 2x - 1 = 0$ auf Kreis-Theilung zurückzuführen. (1868.)
113) *Lamé'sche* und *Bessel'sche* Functionen.
114) Ueber elliptische Modularfunctionen. (1885.)
115) Abhandlung über die Theorie der vielfachen Continuität (der kaiserlichen Akademie präsentirt, den 8. October 1852).
116) Zu *Heine's* Kugelfunctionen. (Grosses Manuscript, 588 Seiten.)
117) Partielle Differenzialgleichungen.
118) Gewebe von zwei Dimensionen im Raume. (1885.)
Mit Auszug aus *Gauss*, disquisitiones generales circa superficies curvas. (8. October 1827.)
119) Differenzialgleichungen. (Beginnt mit Ellipsoid.)
120) Analytische Mechanik.
121) Zum polymetrischen Satz von *Prouhet*. (Nouveaux Annales de *Terquem*. Mai 1851.)
122) Zu *Sylvester's* invariantiven Kriterien der reellen und imaginären Wurzeln eines binären Quintics.
123) An exemple of an equation with partial differential of the first order and in the second degree.
124) Zu *Hermite's* Modulargleichungen. 10 Hefte. 1867.
125) Bruchstück elliptischer Modulargleichungen.
126) Quadratische Formen. Seite 101—195. (Beginnt mit der Multiplication und enthält die *Dirichlet'schen* Sätze über die Classenmenge.) Mehrere kleinere und grössere Manuscripte.
127) Ergänzung der *Taylor*'schen Reihe.
128) Gammafunctionen.
129) *Bernoulli*'sche Zahlen.
130) Approximative Integration mit Anwendung auf *Bernoulli*'sche Zahlen.
131) Behandlung der elliptischen Functionen mittelst unendlicher Doppelproducte. (Der Anfang fehlt.)
132) *Weierstrass*'sche Entwickelungen.
133) Ueber *Abel*'sche Integrale. (Substitutionen, durch welche ein kanonisches System in ein anderes verwandelt wird.)
Versuche, durch Veränderung der Reihenfolge der Verzweigungspunkte zu bewirken, dass solche, die ein erstes Blatt mit einem andern verbinden, unmittelbar auf einander folgen.
Herstellung eines Normalsystems von Kreiswegen.
Ueber die Periodicitätsmasse der Integrale 1. Art.

Perioden der Integrale 3. Art.
Verwandlung einer homogenen ganzen Function von n Variabeln in eine Summe von Quadraten.
Ueber Integrale algebraischer Functionen.
Perioden der Integrale 3. und 2. Art (nach *Clebsch*).
Bemerkungen zu *Riemann's* Theorie der *Abel*'schen Functionen.

134) Convergenz der Thetareihe.
135) Ueber das Verschwinden der Thetafunction.
136) Directer Beweis der Formel

$$\frac{V}{U} = \sum_{u(\varphi)=0} \frac{V(\varphi)}{U'(\varphi)} Z_\varphi + \text{const.}$$

137) Zu *Riemann* § 6, Zurückführung der *Riemann*'schen Basis auf eine C^{p+1}, wenn $p > 2$.

Zwischen den Perioden $a_{\lambda\mu}$ bestehen $\frac{(p-2)(p-3)}{2}$ Relationen.

Zu *Riemann* §§ 14, 15, 16 (eine Anwendung des *Abel*'schen Additionssatzes).
Zu *Riemann* § 17 (Definition einer Θ-Function); über die Verwandlung einer homogenen ganzen Function 2. Grades in ein Aggregat von Quadraten; Convergenz der Θ-Reihe.

138) *Hermite's* Wintervorlesung 1881/1882. Seite 16.
139) Ein Kreis berührt eine Ellipse und zwei Tangenten derselben.
140) S. 20. Ueber die Reduction des Integrals.

$$\int_0^x \frac{(k^2 x^2)^{n+1} dx}{R} = Sn.$$

S. 22. Fälle wo ein Integral nur scheinbar ein elliptisches ist. Der Ausdruck für den Bogen einer einläufigen Curve enthält keine logarithmische Unstätigkeit. S. 25.
141) Gammafunctionen und *Bernoulli*'sche Functionen.
142) Zu *Cauchy* I pag. 120, Note III, II, S. 19; 133, Note VI; 134; 342, (c); 348, (d); 356, (h); 357, (i); 359, (l); 361, (n); 394; 430; 431; 433, Note w; 442; 443; 444; 447, (l); 449; 452, (p); 452, (q); 454, (s); 456; 460; 464, (x); 466; 471; 472; 475; 488. Vorbereitung zu pag. 494; 495; 504; 506.
*143) Ueber die zwei *Heine*'schen Kugelfunctionen mit beliebigem Parameter und ihre ausnahmslose Darstellung durch bestimmte Integrale.
144) *Heine*'s Kugelfunction I. und II. Art. 243 S.
145) Gammafunctionen und elliptische Functionen.
146) Ueber den Halbmesser der grössten und kleinsten Krümmung und die Richtung desselben auf einer krummen Fläche überhaupt, und auf der Fläche des 2. Grades insbesondere, nebst verwandten diese letztere betreffende Untersuchungen. Febr. 1846.
147) Auszüge aus *Crelle*'s Journal:
C. G. J. Jacobi. (Aug. 1827.) Ueber die Integration der partiellen Differenzialgleichungen 1. Ordnung.
De formatione et proprietatibus Determination.

De Determinantibus functionalibus.
De functionibus alternantibus earumque divisione per productum e differentiis elementorium conflatum.

148) Archimedes. 4 Hefte.

149) Ueber die Curven grösster und kleinster Krümmung auf dem Ellipsoid, den Ort der Mittelpunkte grösster und kleinster Krümmung, und über die kürzeste Curve auf der genannten Fläche.

*150) Aufsatz, März 1846. (Mittheilungen der bernischen naturforschenden Gesellschaft.)

151) Ueber ein räumliches System von Geraden im Allgemeinen, und über dasjenige der Normalen einer krummen Fläche insbesondere.

152) Zahlenlehre. 6 Hefte.

153) Geometrie. 7 Hefte. Darunter:
Otto Hesse, Crelle XXVIII: Ueber die Resultante dreier quadratischer Gleichungen.
A. Cayley: Note sur deux formules etc. *Crelle* XXIX.
Mémoire sur les hyperdéterminants. *Crelle* XXX.
Theorie der vielfachen Continuität.
Methode *Fourier*'s, die Zahl der zwischen gegebenen Ganzen liegenden reellen Wurzeln einer algebraischen Gleichung zu bestimmen.
Cauchy's Methode, um für eine algebraische Gleichung mit ungleichen Wurzeln eine positive Grösse herauszufinden, welche kleiner ist, als der Modul jeder Differenz zweier Wurzeln.
Sturm's Satz.

154) *J. Steiner*, Ueber das Maximum und Minimum der Figuren.
Abel Franson, Recherche sur la courbure des lignes et des surfaces.
G. Gescheau. Bemerkungen zu der geometrischen Theorie der bleibenden Drehungsaxen.
Alle drei aus *Liouville*'s Journal.
Ebenso Copien von Aufsätzen von:
J. Liouville, Minding, E. Catalan, Puiseux, Briot, Brassine, J. Bertrand, Mac-Cullagh, Daru, Chasles, C. F. Gauss.

155) Geometrische Untersuchungen. 25 Hefte.

*156) Bemerkungen zu Herrn Dr. *Sidler*'s Theorie der Kugelfunctionen. 3. Oct. 1862.

*157) Betrachtungen über verschiedene Gegenstände, die in Herrn *Hug*'s Mathematik in systematischer Behandlungsweise vorkommen.

158) Ueber Reciprocitätsverwandtschaft algebraischer Curven und Flächen im Allgemeinen und über die Reciprocität der Curven 3. Grades im Besondern.

*159) Ueber die *Lambert*'sche Reihe, als ein Mittel zur Verallgemeinerung der Binomialformel und über die ihren Evoluten ähnlichen Curven.

160) Entwickelung der durch die Relation

$$h_{n+1} = \frac{n+1}{n+3} h_n + \frac{\beta}{n+3} (h_0 + h_1 + \cdots + h_{n-1})$$

verbundenen Grössen $h_0\ h_1 \cdots$ $\left(\text{wo } h_0 = \frac{1}{2},\ h_1 = \frac{1}{6}\right)$ nach den steigenden Potenzen von β.

161) Zu *Sylvester*, on the real and imaginary roots of algebraical equations.
162) Enveloppes polaires. (1854.)
163) Integralrechnung.
164) Zur Geschichte der Mathematik (aus *Proctor*).
165) Zur Elimination der Curve 3. Grades.
166) *Laplace* mécanique céleste. 2 Hefte.
167) Ueber verschiedene mathematische Gegenstände als Focallinien des Kegels, elliptische Functionen, Potential einer in Beziehung auf ihre Umdrehungsaxe symmetrischen Ebene.
168) Lösungen einiger Aufgaben von *Grunert's* Archiv.
169) Auszüge aus Aufsätzen von *Dove, Minding, Dirichlet,* aus *Liouville (William Roberts, Michaël Roberts, Chasles, Liouville, Auguste Miquel, Lebesgue, J. A. Serret),* aus *Crelle (O. Schlömilch, Jacobi, Eisenstein, Dirichlet, Stern).*
170) Lösung von Aufgaben:
Untersuchung über die kleinste Fläche.
Zwei Sätze über geodätische Linien auf dem Ellipsoid.
Einen Kreis zu beschreiben, der drei gegebene Kreise berührt.
Ueber die kürzeste Curve auf der kleinsten Umdrehungsfläche.
Ueber die Möglichkeit oder Unmöglichkeit der Aufgabe, durch zwei gegebene Kreise von gemeinschaftlicher Axe eine kleinste Fläche zu legen.
Auf der kleinsten Umdrehungsfläche ein gegebenes Areal mit der kürzesten Curve zu umschliessen.
Ueber die Curven, welche auf einer beliebigen Fläche ein gegebenes Areal mit dem kleinsten Bogen umschliessen.
Ueber die ein gegebenes Areal mit dem kürzesten Bogen umschliessende Curve auf der kleinsten Fläche.
Das Areal eines von Hauptcurven umschlossenen Vierecks auf der kleinsten Fläche ist durch einfache Integration zu finden.
Eine andere Form der Gleichung der ein gegebenes Areal umschliessenden kürzesten Curve auf einer beliebigen krummen Fläche.
Krümmungshalbmesser und Krümmungscurven der kleinsten Fläche.
171) Ueber die Resultante eines Systems mehrerer algebraischer Gleichungen, ein Beitrag zur Theorie der Elimination.
172) Zahlenlehre. Binäre quadratische Formen. 6 Hefte.
173) Copien von Abhandlungen aus *Liouville's* Journal, *G. Gescheau, Jacobi, Gauss, Ch. Delaunay, Sturm, E. Catalan, J. Liouville, Du Hays, A. Cauchy, Sturm, A. Serret, E. Brassine, Ossian Bonnet, H. Molins, B. Amiot, J. Bertrand, Chasles, O. Rodrigues, Ch. Delaunay, A. Cayley, E. Biot, A. F. Svanberg, Michael Roberts.*
174) *Grunert's* Archiv, I. Theil, 1. Heft, 2. Heft, bis S. 178. 2. Heft von S. 179 an.
175) Copien aus *Crelle.* XXXII. 2 (*A. Cayley, J. Steiner).*
176) *Cassini's* Curve.
177) Integration nach der Ableitungsmethode.
178) Ueber eine merkwürdige Art, die Classengleichung einer Curve dritten Grades zu finden.

179) Ueber die Wendungstotalität ∞^{n-2} einer algebraischen Totalität. ∞^{n-1}.
Bemerkungen zu der Abhandlung von *Hesse* über die Curven dritter Ordnung. (*Crelle* XXXVI.)

180) Ueber die Curve 3. Classe, welche von den durch Punktpaaren einer Curve 3. Grades gelegten Graden umhüllt wird.
Im Raume ∞^n den Grad der Classengleichung einer algebraischen Fläche m^{ter} Ordnung zu finden.
Ueber die Hyperdeterminante A 4. Grades eines cubischen Polynoms mit 3 Variablen, welche in der Theorie der Wendungspunkte der Curve 3. Grades vorkommt. Neue Darstellungen der Functionen Ω, $^1\!P$, L, M, N, P, Q, R, F.

181) Elliptische Functionen. I.

182) Notizen aus der Astronomie.

183) Démonstration analytique simple de l'équation différentielle du premier ordre représentant la ligne géodésique sur un ellipsoïde quelconque.
Théorème sur les trois cordes qu'interceptent trois surfaces homofocales sur une même droite quelconque.
Des arcs géodésiques d'égale longueur sur l'Ellipsoïde.
Deux théorèmes relatifs aux surfaces du second degré.
(Conzept zu seinen Artikeln für die Académie des Sciences à Paris).

184) Ueber ein Gewebe von zwei Dimensionen und die geodätische Linie auf demselben.

185) Zu Hesse.

186) Ueber die zwei *Heine*'schen Kugelfunctionen mit beliebigem Parameter.

187) Hypergeometrische Reihe.

188) Zu *Raabe* I, pag. 145.

189) Zu *Wolf's* Lehre von den geradlinigen Gebilden in der Ebene.

190) *C. A. Bretschneider:* Untersuchung einer dreiseitigen Pyramide. (*Grunert's* Archiv.)

*191) A consequence of Mr. *Cayley's* Theory of skew determinants.

192) Analytische Mechanik, Electrizität, Potential.

193) Ueber die Integralformeln, in denen *Bessel*'sche Functionen vorkommen und deren *Weber* in einer physikalischen Abhandlung sich bedient.

194) *Lamé*'sche Functionen. (April 1886.)

195) *Riemann*, Bestimmung einer Function durch Grenz- und Unstetigkeitsbedingungen.

196) Theorie der *Abel*'schen Functionen I, II; darin steckt auch *Kummer*, Beitrag zur Theorie der Gammafunction. *Crelle*, XXXV, September 1847.

197) Ueber cubische Formen.
Untersuchung der Zahl ε, Potenz von — 1, in den Formeln

$$\sum_0^d \left(\frac{n}{d}\right) \cos \frac{2n\pi}{d} = \varepsilon \sqrt{d}, \text{ wenn } d \equiv 1 \pmod 4.$$

$$\sum^d \left(\frac{n}{d}\right) \sin \frac{2n\pi}{d} = \varepsilon \sqrt{d}, \text{ wenn } d \equiv 3 \pmod 4.$$

Kann man von der Summe $f(c) = \sum_{0}^{n=d-1} e^{n^2 \cdot \frac{2 i c \pi}{d}}$, wo c zu d prim, aus zu der folgenden Summe $\sum_{0}^{d} \left(\frac{n}{d}\right) e^{\frac{i 2 n \pi}{d}}$ gelangen?

198) Ansicht confocaler Flächen aus irgend einem Punkte des Raumes. (18. Januar 1880.)

199) Ursprüngliche Wurzeln, wenn der Modul Potenz einer ungeraden Primzahl ist.

200) Stellt jede reine binäre quadratische Form Primzahlen dar, die zugleich in einer gegebenen arithmetischen Reihe, wo Differenz und Term zu einander prim sind, vorkommen.

201) Ueber die Gammafunction, den Werth der Reihe $\sum_{\lambda=-\infty}^{\lambda=\infty} \frac{e^{i\lambda(\pi - d)}}{\lambda + x}$, wo λ reell, Eigenschaften der Function X (n, x).

202) Formenti, sulli funzioni ad un solo valore.

203) Elliptische Functionen. Summenreihen für Sx, Cx, Dx.

204) Ueber *Bernoulli*'sche Zahlen und Functionen.
Ueber *Bessel*'sche Functionen.

*205) Ueber die Integralformel, die ein Vieleck auf die nördliche Halbebene abbildet.

206) Herstellung der Uebergangslinien bei einer durch eine algebraische Gleichung bestimmten *Riemann*'schen Fläche.
Zerschneidung der vierblättrigen *Riemann*'schen Fläche, bis sie einfach zusammenhangend wird.

207) *Laurent*'scher Satz.

208) Construction der *Abel*'schen Integrale auf einer 2 p fach zusammenhangenden *Riemann*'schen Fläche.

209) Integrale algebraischer Functionen nach *Clebsch* und *Gordan* I. und II. Heft.

210) Zu *Dienger's* Differenzial- und Integralrechnung. 3 Hefte.

211) Aus *L. Fuchs*, zur Theorie der linearen Differenzialgleichungen mit veränderlichen Coefficienten. (Borch. 66). 2 Theile.

212) Aufgabe: Alle geodätischen Linien einer krummen Fläche sollen in Gerade einer Ebene übertragen werden können u. s. w.

213) Betrachtung eines Gewebes von 3 Dimensionen.

214) Beweis des *Beltrami*'schen Satzes über die Beschaffenheit eines Gewebes von n Dimensionen, dessen geodätische Linien in Gerade in einem linearen Continuum durch analytische Substitutionen verwandelt werden können.

215) Zur Mittheilung an die Herren Abonnenten des *Liouville*'schen Journals, eine Arbeit von *L. Schläfli*, Lehrer in Thun.

216) Die Aufgabe, einem Dreieck einen Kreis, oder einem Tetraeder eine Kugel umzuschreiben, in analytischer Allgemeinheit dargestellt.
Anwendung der gefundenen Sätze auf das Tetraeder.

217) Sätze über Kegelschnitte.
Ueber Durchmesser und Polaren einer algebraischen Curve.
Geometrische Sätze.
218) Ueber die sphärische Ellipse und den Mantel des schiefen Kegels mit kreisförmiger Basis.
219) *Enneper*: Elliptische Functionen. 2 Hefte.
*220) Zur Abhandlung über *Lame*'sche Functionen in memoriam *Chelini* p. 277.
221) *Hermite*'s Modulargleichungen.
*222) Distribution of the surface of the third order. (Concept.) 2 Hefte
223) Was wird erfordert, damit eine Fläche 3. Grades einen Knoten habe?
224) Geometrisches.
225) Curven 3. Grades.
226) Zahlenlehre.
227) Analysis.
228) Ein grosses Manuscript zu *Dienger*'s Differenzial- und Integralrechnung.
229) Zu *Meyer-Hirsch*'s Aufgaben.
230) Ueber reguläre Polyschema der vierfachen Totalität.
231) Einleitung in die Infinitesimalrechnung, enthält die Rechtfertigung des Rechnens mit imaginären Zahlen.
232) Ueber orthogonale Flächenschaaren, besonders über solche 2. Grades.
233) Abbildungen mittelst elliptischer Functionen.
Abbildung eines Vierecks.
234) Vorlesung über einige partielle Differenzialgleichungen. Nach *Hattendorff*'s Ausgabe *Riemann*'scher Vorlesungen. (Sommer 1870.)
235) Bemerkungen zum 2. Band von *Serret*'s Algebra.
236) Ueber elliptische Functionen, vollständige Vorlesung.
Anwendungen auf Geometrie und Mechanik enthaltend. (Nov. 1870.)
237) Differenzialgleichungen für die Störungen der elliptischen Elemente der Planetenbahnen.
238) Ueber das Tetraeder; über eine Hypokykloide.
239) Differenzial- und Integralrechnung, Beispiele von Quadraturen.
240) Directe und indirecte Differenzenrechnung.
241) *Bernoulli*'sche Zahlen und Functionen.
242) Log $\Gamma(a)$ für ein sehr grosses a.
243) Vielfache Continuität. (Den Anfang des Manuscriptes hat Herr Dr. *Gysel* in Schaffhausen.)
244) Zu *Riemann*'s Theorie der *Abel*'schen Integrale. (*Crelle* 54.) Grosses Manuscript.
245) Ueber die Entwicklung eines artiosphärischen Plagioschems.
Orthoschem, Tetraschem, Plagioschem. Artiosphäre.
246) *Tardy*, moto dei fluidi. Sulle quadrature.
247) Kugelfunctionen.
248) Infinitesimal deplacement of a rigid orthogonal system of four dimensions around a fixed point.
249) Curven 1. Grades.
250) *Kummer*, über die Divisoren gewisser Formen der Zählung, welche aus der Theorie der Kreistheilung entstehen.

251) *Kronecker's* Beweis für die Irreducibilität der Gleichung
$x^{p-1} + x^{p-2} \ldots + 1 = 0$, wenn p = 0 ist.

252) Quadratische Formen. *(Dirichlet.)*
Multiplication binärischer quadratischer Formen, ternäre quadratische Formen u. s. w.

253) Aus *Serret's* Algebra. 2 Hefte.

254) Euklid. 2 Hefte.

255) Reciprocität zwischen zwei Schaaren confocaler Flächen.

*256) Bemerkungen zur Abhandlung: Ueber die Begründung der Theorie der elliptischen Functionen durch die Betrachtung unendlicher Doppelprodukte.

257) Welches ist die einem Vielseit eingeschriebene Ellipse von grösstem Flächeninhalt?

258) Copien von Abhandlungen aus *Liouville's* Journal:
(Lamé, Liouville, Raabe, Catalan, J. Steiner.)

259) Electro-dynamische Untersuchungen.

260) Ueber die Transformation der Variabeln bei vielfachen Integralen.

261) Bemerkungen zu *Lefebure's* analytischer Geometrie.

262) Ueber die einhüllende Fläche der confocalen Flächen zweiten Grades.

263) Ueber die gegenseitige Bestimmung zweier Punkte mittelst Durchschnitte confocaler Flächen.

264) 1846. Wenn eine Gerade zwei confocale Flächen berührt, so stehen die durch diese Gerade gelegten Berührungsebenen beider Flächen aufeinander senkrecht; u. a. Sätze.

265) Betrachtung der Coefficienten in der Entwicklung
$z(z-1)\ldots(z-n+1) = z^n - C_1^n z^{n-1} + C_2^{n-2} z^{n-2} - \ldots$

266) Statische Untersuchungen.

267) Widerlegung einer von *Chasles* in *Liouville* XI in Betreff der geodätischen Linien auf dem Ellipsoid ausgesprochenen Behauptung.

268) Arbeiten aus *Crelle* XXXII, *Liouville* XI.

269) Sätze über Differenzialgleichungen von *Jacobi* mitgetheilt. 1843. October. Sätze über das Tetraeder.

270) (6. Aug. 1854.) Note sur les surfaces orthogonales. (Vielleicht *Liouville's* Journal.) (Nimmt Bezug auf einen Aufsatz *Serret's*. *Liouville* XII, S. 241.)

271) Analytische Behandlung der Kegelschnitte. 5 Hefte.

272) Theorie der vielfachen Continuität. 4 Hefte.

273) Determinante eines Systems linearer Gleichungen.

274) Lectur: *Lardner* und *Kater*, Mechanik der festen Körper.
Kämtz, Meteorologie etc. etc. *Poisson*, mécanique.
Fechner, Gauss, J. A. Grunert, Liouville, Pfaff. 10 Hefte.

275) Mechanik.

*276) Sopra alcune formole integrali formate da funzioni di Bessel.

277) Bestimmung nnd Function einer einzigen unabhängigen Variablen durch Bedingungen, welche längs geschlossenen Curven im Zahlenfelde des Arguments stattfinden.

278) Modulargleichungen.

279) Aufgabe, den Inhalt eines Dreiecks anzugeben, wenn dessen Ecken durch allgemeine Punktcoordinaten, die sich auf ein ganz im Endlichen liegendes Fundamentaldreiseit beziehen, gegeben sind.

280) Dr. *Sidler* stellt die Aufgabe, eine ganze Function n^{ten} Grades f(x) von der Eigenschaft zu finden, dass, wenn x abs < 1, in der Entwicklung des Produkts x Log $(1 + x)$. f(x) die Coefficienten x^{n+1}, x^{n+2}, . . . x^{2n} verschwinden.

281) Zu § 7 der Theorie der *Abel*'schen Function von *Riemann*.

282) Gebrauch des Integrationsweges zur Ermittlung einiger bestimmter Integrale. (Winter 1872/73.)

283) Complanation und Rectification der sphärischen Ellipse.

284) Ueber Kugelfunctionen.

285) Astronomisches. Beobachtungen über Sonnenfinsternisse. Kometenbeobachtungen.

286) Notizen zu Archimedes.

287) Zur Abhandlung über die partielle Differenzialgleichung

$$\frac{dw}{dt} = \frac{d^2w}{dx^2}.$$

288) Aufgabe: Die unbegrenzte Ebene ausserhalb der einen von den zwei getrennten Curven, aus denen die *Cassini*'sche Curve besteht, in das Innere eines Kreises vom Radius 1 abzubilden, so dass dem Horizont des Originals der Mittelpunkt des Bildes entspricht.

289) Zu der Lehre von den elliptischen Functionen.

290) *Cayley*, chapters in the analytical geometry of n dimensions (Cambr. M. J. IV.)

291) *Hermite*. Sur la théorie des équations modulaires et la résolution de l'équation du cinquième degré. Paris, 1859. Mit Zusätzen.

292) Potential eines elliptischen Cylinders. (Grosses Manuscript.)

293) Mathematische Physik:
Bewegung eines starren Körpers, auf den keine äussern Kräfte wirken.

294) Theorie der Gleichungen.

295) Differenzialgleichungen.

296) Flächen 3. Grades.

297) Orthogonale Flächen.

298) Bewegung eines Massenpunktes auf einem homogenen Umdrehungsellipsoid, wenn der Punkt gezwungen ist, auf der Oberfläche zu bleiben nach dem Gesetze der Schwere.

299) Zur Auflösung der partiellen Differenzialgleichung 1. Ordnung.

300) Auf einer krummen Fläche ist ein Dreieck von drei geodätischen Seiten umschlossen; die Längen dieser Seiten und die Krümmungsmaasse in den Ecken sind bekannt; man verlangt eine angenäherte Berechnung der ganzen Krümmung des Dreiecks, seiner 3 Winkel und seines Inhalts, wenn die Seiten klein genug (1. Ordnung) sind, um eine Entwickelung nach ihren steigenden Producten zu gestatten.

301) Ueber Umkehrung der Reihen.

302) Differenzialgleichungen höherer Ordnung mit 2 Variabeln.

303) Theoretische Optik.

Naturwissenschaftliche Manuscripte.

1) Aus *Poggendorff*'s Annalen LXXXIII. S. 302.
2) Ueber morphologische Botanik.
3) Notizen über botanische Ausflüge auf das Stockhorn, den Hohgant, die Simmenfluh, im Wallis, vom Sanetsch.
4) Katalog des Herbariums des Herrn Dr. *Medici* in Gravedona.

Theologische und sprachliche Studien.

1) Zu *Wilken's* persischer Chrestomathie.
2) *Lassen,* Chrestomathie. Abschnitt I. 3 Hefte.
3) Zur Edda. 3 Hefte.
4) Zu *Heinrich Barb*'s zbdë alhkaiat. (Wien 1856.) 3 Hefte.
5) *Daniel.*
6) Versuch einer Erklärung des Koheleths (mit steter Vergleichung der *Piscator*'schen Uebersetzung).
7) Morgenländische Sprachen. Viele Hefte.
8) Griechisch.
9) Sanskrit. 5 Hefte.
10) Noten zu *Delbrück*'s Rigveda. 10 Hefte.
11) Polnisch.
12) Arabisch.
13) Omar Alkiami.
14) Italienisch.
15) Bartling ordines naturales plantarum. 22 Hefte.
16) Koptische Wörter.
17) Neupersische Studien.
18) Samaritan Chronik.
19) Koran sure. 5 Hefte.
20) Exegese der Genesis.
21) Exegese des Neuen Testaments. 2 Hefte.
22) Türkisch, Sanskrit, Russisch.
23) Sanskrit, ca. 90 Hefte à 40 Quartseiten. Commentar zu Rigveda.
24) Religiöse Lieder. Alttestamentliche Stücke. Leben Kepler's.
25) Predigttexte. Gespräch zwischen Niesen und Stockhorn. (Gänzlich unbekannt.)
26) Italienisches Vocabulario.
27) Französische und deutsche Gedichte.
28) Notizen zur Kirchengeschichte.
29) „ „ Virg. Georg I.
30) „ „ Dhûrtasamâgamas.
31) Theologisches.
32) Sanskrit.
33) Schwedisch.
34) Gothisch.
35) Zu *Freitag*'s Chrestomathie. 4 Hefte.
36) Zu *Wahrmundt*'s arabischer Grammatik. I. und II.
37) Kurze arabische Grammatik.
38) Русские.

39) Fortsetzung der Bemerkungen zu der von *Delbrück* in seiner altindischen Tempuslehre gegebenen Uebersetzung von Stücken der Rigveda. 8 Hefte à 40 Quartseiten.
40) *Medford*'s Lesebuch.
41) Logik. 2 Hefte.
42) König *Alfred*'s Uebersetzung des Geschichtswerkes des Orosius. 3 Hefte.
43) Chronologie und Notizen.
44) *Galileo Galilei*, Italienisch.
45) Englische Präparationen mit Notizblättern.
46) Zu *Delbrück*'s Chrestomathie, vedisch. 9 Hefte.
47) *Stenzler*. 2 Hefte.
48) *Gylden*. 3 Hefte.
49) *Lassen*.
50) Auszüge aus italienischen Schriften.

Anhang.

Von *L. Schläfli* während seiner Wirksamkeit an der Berner Hochschule, Winter 1847/1848 bis Sommer 1891, angekündigte Vorlesungen, ein Beitrag zur Geschichte des mathematischen Unterrichts an der Hochschule Bern.

Winter 1847/1848.

Zahlenlehre und Theorien der Kettenbrüche. 2 Stunden.

Differenzial- und Integralrechnung mit Anwendung auf die Geometrie. 4 Stunden.

Trigonometrie. 4 Stunden.

Analytische Geometrie der Ebene und des Raumes. 4 Stunden.

Die übrigen mathematischen Vorlesungen dieses Semesters waren: *B. Gerwer* (Docent seit Sommer 1835): Arithmetische Reihen und Interpolationen; Differenzial- und Integralrechnung mit Anwendungen auf Geometrie und Mechanik; Beschreibende Geometrie mit Schatten und Perspective. — *R. Wolf* (Docent seit Sommer 1846): Die beiden Trigonometrien mit Anwendungen auf Geodäsie und Astronometrie; Analytische Mechanik.

Sommer 1848.

Mathematische Vorbereitung für Studierende der Naturwissenschaft und Medizin. 2 Stunden.

Anleitung zum kaufmännischen und statistischen Rechnen. 2 Stunden.

Mechanik mit Rücksicht auf Anwendung. 3 Stunden.

Daneben: *Gerwer:* Elemente der Mathematik; Mathematische Geographie; Ueber Landesvermessung und Landkarten. — *Wolf:* Algebra und Einleitung zur höheren Analysis; Analytische Mechanik, 2. Theil; Topographie des Himmels.

Winter 1848/1849.

Anfangsgründe der Mathematik. 2 Stunden.

Differenzial- und Integralrechnung. 3 Stunden.

Analytische Geometrie. 3 Stunden.

Daneben: *Gerwer:* Ueber Landesvermessung und Landkarten; Die windschiefen Flächen; Mechanik. — *Wolf:* Praktische Geometrie mit besonderer Berücksichtigung der Lehre von den Instrumenten; Praktische Astronomie, Anleitung zum Beobachten und Rechnen.

Sommer 1849.

Elemente der Mathematik. 2 Stunden.

Höhere Geometrie nach synthetischer Methode. 2 Stunden.

Analytische Mechanik. 4 Stunden.

Daneben: *Gerwer:* Elemente der Mathematik mit Repetitorium; Die nächsten Anwendungen der Differenzial- und Integralrechnung auf Algebra, Geometrie, Mechanik etc.; Beschreibende Geometrie mit unmittelbarer Berücksichtigung der Praxis. — *Wolf:* Elemente der Wahrscheinlichkeitsrechnung; Praktische Geometrie, 2. Theil, Uebungen auf dem Felde; Praktische Astronomie.

Winter 1849/1850.

Elemente der Mathematik. 2 Stunden.

Differenzial- und Integralrechnung. 4 Stunden.

Analytische Geometrie. 3 Stunden.

Daneben: *Gerwer:* Gleichungen der Figuren (analytische Geometrie); Beschreibende Geometrie, 2. Theil; Dynamik. — *Wolf:* Anleitung zur praktischen Astronomie; Uebungen auf der Sternwarte als Anwendung der Anleitung zur praktischen Astronomie.

Sommer 1850.

Elemente der Mathematik. 3 Stunden.

Darstellende Geometrie. 3 Stunden.

Analytische Geometrie des Raumes. 3 Stunden.

Analytische Mechanik. 4 Stunden.

Daneben: *Gerwer:* Arithmetik und Geometrie für Praktiker; Beschreibende Geometrie mit ihren Anwendungen auf Perspective, Stein- und Holzbau, Kartenzeichnungen etc.; Elemente der höhern Mathematik. — *Wolf:* Examinatorium über die Elemente der Mathematik; Populäre Astronomie; Anleitung zum astronomischen Beobachten und Rechnen.

Winter 1850/1851.

Elemente der Mathematik. 2 Stunden.

Analytische Geometrie. 2 Stunden.

Differenzial- und Integralrechnung. 4 Stunden.

Daneben: *Gerwer*: Repetitorium über Arithmetik und Geometrie; Elemente höherer Mathematik, sowohl reiner als angewandter; Industrielle Mechanik. — *Wolf*: Ebene Geometrie mit Einschluss der Trigonometrie und der Lehre von den Kegelschnitten; Uebungen auf der Sternwarte.

Sommer 1851.

Elemente der Mathematik. 3 Stunden.

Differenzial- und Integralrechnung. 4 Stunden.

Analytische Mechanik. 4 Stunden.

Daneben: *Gerwer*: Repetitorium der Arithmetik und Geometrie; Elemente der höheren Mathematik. — *Wolf*: Wenig bekannte Partien der ebenen Geometrie und Uebungen im Auflösen geometrischer Aufgaben durch Konstruktion und Rechnung; Anleitung zur Astrognosie.

Winter 1851/1852.

Elemente der Mathematik. 3 Stunden.

Analytische Geometrie. 4 Stunden.

Differenzial- und Integralrechnung. 4 Stunden.

Mechanik. 4 Stunden.

Daneben: *Gerwer*: Elemente der Mathematik; Analytische Geometrie; Integralrechnung. — *Wolf*: Raumgeometrie; Uebungen auf der Sternwarte.

Sommer 1852.

Elemente der Mathematik. 3 Stunden.

Infinitesimalrechnung. 4 Stunden.

Höhere Geometrie. 4 Stunden.

Mathematische Physik. 4 Stunden.

Daneben: *Gerwer*: Elemente der Mathematik; Analytische Geometrie (Kegelschnitte); Dynamik (Fallgesetze, Wurflinien, Planetenbewegung etc.). — *Wolf*: Elemente der Astronomie; Uebungen im Gebrauche mathematischer Instrumente auf dem Felde und auf der Sternwarte.

Winter 1852/1853.

Algebra. In 3 noch zu bestimmenden Stunden.

Analytische Geometrie. 4 Stunden.

Differenzial- und Integralrechnung. 4 Stunden.

Daneben: *Gerwer*: Analytische Geometrie 4 Stunden; Statik, theoretisch und praktisch, 3 Stunden. — *Wolf*: Praktische Geometrie in besonderer Berücksichtigung der Instrumente, 3 Stunden. Uebungen auf der Sternwarte, in geeigneten Abendstunden.

Sommer 1853.

Elemente der Mathematik. 3 Stunden.

Analytische Geometrie. 3 Stunden.

Mechanik in Verbindung mit den erforderlichen analytischen Hülfskenntnissen. 4 Stunden.

Geometrische Betrachtung des Wuchses der Pflanzen und Conchyliometrie, in noch zu bestimmenden Stunden.

Daneben: *Gerwer*: Analytische Geometrie; Theorie der Gleichungen; Mechanik. — *Wolf*: Praktische Uebungen auf der Sternwarte.

Winter 1853/1854.

Elemente der Mathematik. 2 Stunden.

Mechanik mit Einschluss des Nothwendigsten aus der Differenzial- und Integralrechnung. 4 Stunden.

Repetitorium der geometrischen Botanik mit Rücksicht auf die natürlichen Familien. 2 Stunden.

Daneben: *Gerwer*: Kegelschnitte; Differenzial- und Integralrechnung; Mechanik. — *Wolf*: Elemente der Astronomie; Uebungen auf der Sternwarte.

Sommer 1854.

Auf Sommer 1854 waren *Schläfli* und *Wolf* zu ausserordentlichen Professoren befördert worden, und war *Gerwer* zurückgetreten.

Elemente der Mathematik. 2 Stunden.

Analytische Geometrie. 3 Stunden.

Differenzial- und Integralrechnung. 4 Stunden.

Daneben: *Wolf*: Geschichte des kopernikanischen Weltsystems; Uebungen auf der Sternwarte.

Winter 1854/1855.

Elemente der Mathematik. 2—3 Stunden.

Analytische Geometrie. 3 Stunden.

Differenzial- und Integralrechnung. 4 Stunden.

Darstellende Geometrie und Perspektive. 2 Stunden.

Analytische Mechanik. 4 Stunden.

Daneben: *Wolf*: Ebene und sphärische Trigonometrie mit Anwendungen; Populäre Astronomie.

Sommer 1855.

Elemente der Mathematik. 3 Stunden.

Analytische Geometrie. 4 Stunden.

Differenzial- und Integralrechnung. 6 Stunden.

Daneben: *Wolf*: Wahrscheinlichkeitsrechnung mit Anwendung auf Rentenanstalten. Skrutinium etc.; Uebungen mit dem Theodoliten.

Im Oktober 1855 ward das eidgenössische Polytechnikum in Zürich eröffnet und *R. Wolf* als Professor der Astronomie dahin berufen. — Im Winter 1855/1856, im Sommer 1856 und im Winter 1856/1857 war daher *L. Schläfli* der alleinige Vertreter der Mathematik an der Berner Hochschule.

Winter 1855/1856.

Analytische Geometrie des Raumes. 4 Stunden.

Differenzial- und Integralrechnung. 6 Stunden.

Trigonometrie. 2 Stunden.

Theoretische Astronomie. 6 Stunden.

Sommer 1856.

Elemente der Mathematik. 3 mal wöchentlich.

Darstellende Geometrie. 3 mal wöchentlich.

Winter 1856/1857.

Elemente der Mathematik. 2 Stunden.

Differenzial- und Integralrechnung. 6 Stunden.

Im Herbst 1856 war die Berner Kantonsschule eröffnet worden, in welche als Lehrer *B. Gerwer* und *G. Sidler* eintraten. *B. Gerwer* ward zugleich als ausserordentlicher Professor an die Hochschule berufen, und *G. Sidler* habilitirte sich daselbst als Privatdocent. Im Sommer 1857 und den folgenden Semestern kündigen daher neben *L. Schläfli* auch die beiden letztgenannten Vorlesungen an.

Sommer 1857.

Analytische Geometrie. 3 Stunden.

Theorie der quadratischen Formen mit zwei ganzen Variabeln. 3 Stunden.

Daneben: *Gerwer*: Elemente der Mathematik; Differenzial- und Integralrechnung. — *Sidler*: Astronomie.

Winter 1857/1858.

Analytische Geometrie. 3 Stunden.

Theorie der quadratischen Formen mit zwei ganzen Variabeln. 3 Stunden.

Daneben: *Gerwer*: Mechanik; Analytische Geometrie. — *Sidler*: Ebene und sphärische Trigonometrie mit Anwendungen auf Astronomie; Algebraische Analysis als Einleitung zur Differenzialrechnung.

Auf den Sommer 1858 hat sich auch *D. Schinz*, Lehrer an der städtischen Realschule, als Docent habilitirt.

Sommer 1858.

Lehre von den Determinenten. 3 Stunden.

Lehre von den algebraischen Kurven und Flächen überhaupt. 3 Stunden.

Daneben: *Gerwer*: Integralrechnung; Darstellende Geometrie; Trigonometrie für Praktiker. — *Schinz*: Elemente der Differenzialrechnung mit Anwendung auf Geometrie und Mechanik; Repetitorium über das Vorige. Theoretische Mechanik. — *Sidler*: Ueber die Eigenschaften der ganzen Zahlen; Ueber trigonometrische Reihen.

Winter 1858/1859.

Lehre von den elliptischen Functionen. 3 Stunden.

Lehre von der Resultanten mehrerer algebraischer Gleichungen. 3 Stunden.

Daneben: *Gerwer*: Elemente der Mathematik (Repetitorium); Integralrechnung. — *Schinz*: Analytische Geometrie. Theorie der optischen Instrumente; Kosmische Physik. — *Sidler*: Theorie der Kräfte, die nach dem Newton'schen Gesetze wirken; Astronomie. —

Sommer 1859.

Theorie der Exponentialfunktionen und Trigonometrie. 2 Stunden.

Analytische Geometrie. 4 Stunden.

Daneben: *Gerwer*: Analytische Geometrie im Raume; Uebungen im Lösen von Aufgaben aus der höheren Mechanik. — *Schinz*: Differenzialrechnung mit Anwendung auf Probleme der Geometrie und Physik; Dampfmaschinenlehre mit besonderer Rücksicht auf Locomotiven. — *Sidler*: Elemente der Differenzial- und Integralrechnung.

Winter 1859/1860.

Lehre von den ganzen Funktionen. 3 Stunden.

Differenzial- und Integralrechnung. 4 Stunden.

Mechanik. 2 Stunden.

Daneben: *Gerwer*: Elemente der Mathematik für Techniker; Mathematische Geographie. — *Schinz*: Probabilitätsrechnung; Populäre Astronomie. — *Sidler*: Elemente der analytischen Mechanik mit Anwendung auf die Theorie der Planetenbewegung; Planetenbewegung.

Sommer 1860.

Ueber quadratische Formen und Kreistheilung. 2 Stunden.

Ueber den Gebrauch linearer Transformationen. 3 Stunden.

Ueber die Flächen 2. und 3. Grades. 3 Stunden.

Daneben: *Gerwer*: Elemente höherer Mathematik; Mechanik. — *Schinz*: Uebersicht der Mathematik mit Einschluss der Differenzialrechnung; Theoretische Mechanik; Allgemeine Technologie mit besonderer Rücksicht auf die Schweiz, nebst Excursionen. — *Sidler*: Elemente der Differenzial- und Integralrechnung; Astronomie mit Uebungen auf der Sternwarte.

Winter 1860/1861.

Algebra und Analysis. 2 Stunden.

Analytische Geometrie. 3 Stunden.

Differenzial- und Integralrechnung. 3 St.

Daneben: *Gerwer*: Analytische Geometrie im Raume; Integralrechnung mit hauptsächlich mechanischen Anwendungen; Repetitorium der Elemente der Mathematik. — *Schinz*: Probabilitätsrechnung; Theorie der Rotationen, mit besonderer Rücksicht auf die Bewegung der Himmelskörper. — *Sidler*: Mathematische Uebungen.

Sommer 1861.

Binäre quadratische Formen. 2 Stunden.

Ueber algebraische Flächen. 2 Stunden.

Differenzial- und Integralrechnung. 4 Stunden.

Daneben: *Gerwer*: Elemente der Mathematik für Techniker; Analytische Geometrie; Geodäsie mit praktischen Uebungen. — *Schinz*: Uebersicht der Mathematik mit Einschluss der Differenzialrechnung; Theoretische Mechanik; Colloquium über Mathematik.

Winter 1861/1862.

Geometrie des Raumes. 2 Stunden.

Integralrechnung, 2. Hälfte. 2 Stunden.

Daneben: *Gerwer*: Darstellende Geometrie; Theoretische Mechanik; Repetitorium der Mathematik. — *Schinz*: Analytische Geometrie; Ausgewählte Partien der technischen Physik, mit Experimenten; Populäre Astronomie. — *Sidler*: Astronomie in populärer Fassung; Theorie der Störungen.

Sommer 1862.

Ganze Functionen. 3 Stunden.

Kreisfunctionen. 2 Stunden.

Elliptische Functionen. 2 Stunden.

Daneben: *Gerwer*: Kegelschnitte; Theorie und Anwendung der windschiefen Flächen; Differenzial- und Integralrechnung von der praktischen Seite. — *Schinz*: Differenzialrechnung mit Anwendungen auf Geometrie und Physik; Repetitorium über Differenzialrechnung; Theoretische Mechanik mit Experimenten. — *Sidler*: Mathematische Uebungen; Astronomie.

Winter 1862/1863.

Kegelschnitte. 2 Stunden.

Algebra. 3 Stunden.

Mechanik. 3 Stunden.

Daneben: *Gerwer*: Kegelschnitte; Differenzial- und Integralrechnung; Mathematische Geographie. — *Schinz*: Analytische Geometrie der Ebene und des Raumes; Theorie der Rotationen mit besonderer Rücksicht auf die Bewegungen der Himmelskörper; Technische Physik. — *Sidler*: Differenzial- und Integralrechnung; Astronomie.

Sommer 1863.

Zahlenlehre. 3 Stunden.

Algebraische Curven. 3 Stunden.

Lehre von den Differenzialgleichungen. 3 Stunden.

Daneben: *Gerwer*: Elemente der Mathematik mit Repetitorium; Differenzialrechnung; Ueber Gradmessungen. — *Schinz*: Differenzialrechnung mit Anwendung auf Geometrie und Mechanik; Repetitorium darüber; Mathematik der festen und flüssigen Körper mit Einschluss der Akustik. — *Sidler*: Astronomie in populärer Behandlungsweise; Theoretische Astronomie.

Winter 1863/1864.

Analytische Geometrie des Raumes. 3 Stunden.

Theilung des Kreises. 2 Stunden.

Mechanik. 4 St.

Daneben: *Gerwer*: Allgemeine Theorie der algebraischen, insbesondere numerischen Gleichungen; Mathematisches Repetitorium; Dynamik central wirkender Kräfte. — *Schinz*: Analytische Geometrie; Populäre Astronomie; Elastizitätslehre mit Anwendung auf Akustik. — *Sidler*: Algebra; Astronomie mit Uebungen auf der Sternwarte.

Sommer 1864.

Zahlenlehre. 2 St.

Differenzialgleichungen. 4 Stunden.

Mechanik. 3 Stunden.

Daneben: *Gerwer*: Darstellende Geometrie; Theorie der algebraischen Gleichungen. — *Schinz*: Uebersicht über die Elemente der Mathematik; Mechanik der festen und flüssigen Körper. — *Sidler*: Elemente der Mathematik; Astronomie mit Uebungen auf der Sternwarte.

Winter 1864/1865.

Differenzialgleichungen. 2 Stunden.

Infinitesimalrechnung mit Anwendungen. 1 Stunde.

Mechanik. 4 Stunden.

Daneben: *Gerwer*: Differenzial- und Integralrechnung; Mathematisches Repetitorium. — *Schinz*: Analytische Geometrie mit besonderer Rücksicht auf die neuere Darstellungsweise; Differenzial- und Integralrechnung mit Anwendung auf Geometrie; Theoretische Mechanik mit Experimenten; Populäre Astronomie mit besonderer Berücksichtigung der Entdeckungen des 19. Jahrhunderts. — *Sidler*: Algebraische Analysis; Analytische Mechanik mit besonderer Berücksichtigung der nach dem umgekehrten Quadrat der Entfernung wirkenden Kräfte; Theoretische Astronomie.

Auf das Frühjahr 1865 ging Dr. *E. Schinz* von Bern weg, so dass die Mathematik nunmehr durch *Schläfli, Gerwer* und *Sidler* vertreten war.

Sommer 1865.

Analytische Geometrie. 3 Stunden.

Differenzialgleichungen. 4 Stunden.

Infinitesimalrechnung. 2 Stunden.

Daneben: *Gerwer*: Theorie der algebraischen Gleichungen; Darstellende Geometrie; Analytische Mechanik. — *Sidler*: Ebene und sphärische Trigonometrie mit Anwendung auf mathematische Geographie; Differenzial- und Integralrechnung.

Winter 1865/1866.

Analytische Geometrie. 3 Stunden.

Infinitesimalrechnung. 2 Stunden.

Zahlenlehre. 3 Stunden.

Daneben: *Gerwer*: Darstellende Geometrie (Fortsetzung); Theorie der algebraischen Gleichungen; Analytische Mechanik. — *Sidler*: Repetitorium der Elementarmathematik; Elemente der Astronomie.

Sommer 1866.

Moderne Geometrie. 1 Stunde.

Lehre von den binären quadratischen Formen. 2 Stunden.

Lehre von den Differenzialgleichungen. 2 Stunden.

Integralrechnung. 3 Stunden.

Daneben: *Gerwer*: Elemente der Mathematik; Analytische Geometrie im Raum. — *Sidler*: Elemente der Differenzial- und Integralrechnung mit Anwendungen; Populäre Astronomie; Theorie der Bewegungen der Planeten und Kometen.

Winter 1866/1867.

Analytische Mechanik. 3 Stunden.

Elliptische Functionen. 2 Stunden.

Binäre quadratische Formen. 2 Stunden.

Daneben: *Gerwer*: Kegelschnitte; Dynamik; Mathematisches Repetitorium. — *Sidler*: Theorie der Bewegung der Himmelskörper, welche die Sonne umlaufen; Astronomie in populärer Behandlungsweise; Differenzial- und Integralrechnung; Theorie der kleinsten Quadrate.

Sommer 1867.

Auf den Sommer 1867 war Herr *Blaser* als Docent eingetreten, und *Schläfli* kündigte am schwarzen Brette «für ehrliche Freunde der Wissenschaft» an:

Elementarmathematik. 1 Stunde.

Elemente der Mechanik. 2 Stunden.

Elemente der Lehre von den doppelt periodischen Functionen. 2 Stunden.

Daneben: *Gerwer*: Höhere Theile der Mechanik; Geodäsie und Astronomie von der praktischen Seite; Repetitorium zu wählender Abschnitte aus reiner und angewandter Mathematik. — *Sidler*: Einleitung in die Differenzial- und Integralrechnung als Repetitorium; Populäre Astronomie. — *Blaser*: Elemente der Mathematik mit Rücksicht auf Artillerie und Genie.

Winter 1867/1868.

Algebra. 2 Stunden.

Mechanik. 2 Stunden.

Integralrechnung. 2 Stunden.

Daneben: *Gerwer*: Differenzial- und Integralrechnung; Analytische Geometrie im Raume. — *Sidler*: Neuere Geometrie nach *Steiner*; Algebraische Analysis; Theoretische Astronomie. — *Blaser*: Die Elemente der Ballistik.

Sommer 1868.

Algebra. 2 Stunden.

Analytische Geometrie. 2 Stunden.

Integralrechnung. 2 Stunden.

Daneben: *Gerwer*: Elemente der Mathematik mit Repetitorium; Analytische Geometrie im Raume; Differenzial- und Integralrechnung; *Sidler*: Synthetische Geometrie; Mechanik des Himmels; Elliptische Functionen. — *Blaser*: Elemente der Mathematik; Die Theorie des Polygonalverfahrens mit Uebungsbeispielen.

Winter 1868/1869.

Algebra. 2 Stunden.

Analytische Geometrie der Ebene. 2 Stunden.

Analytische Geometrie des Raumes. 2 Stunden.

Daneben: *Gerwer*: Analytische Mechanik; Repetitorium zu wählender Abschnitte aus reiner und angewandter Mathematik. — *Sidler*: Differenzial- und Integralrechnung; Analytische Geometrie des Raumes; Astronomie. — *Blaser*: Ballistik für Offiziere und Offiziersaspiranten; Polygonalverfahren für Forstgeometer.

Sommer 1869.

Auf den Sommer 1869 starb *Gerwer*, so dass neben *Schläfli* nur *Blaser* und *Sidler* verblieben.

Analytische Geometrie des Raumes. 2 Stunden.

Abel'sche Functionen. 3 Stunden.

Differenzialgleichungen. 2 bis 3 Stunden.

Daneben: *Sidler*: Ebene und sphärische Trigonomie; Differenzial- und Integralrechnung; Astronomie. — *Blaser*: Elemente der Mathematik; Ballistik.

Winter 1869/1870.

Analytische Geometrie. 2 Stunden.

Differenzialgleichungen. 3 Stunden.

Einleitung in die Infinitesimalrechnung. 2 Stunden.

Daneben: *Sidler*: Differenzial- und Integralrechnung; Theoretische Astronomie; Repetitorium der Elementarmathematik. — *Blaser*: Elemente der Mathematik mit Anwendungen auf Ballistik.

Sommer 1870.

Auf den Sommer 1870 hatte sich noch *E. Jenzer* als Docent habilitirt.

Algebra. 2 Stunden.

Analytische Geometrie. 3 Stunden.

Elliptische Functionen. 2 Stunden.

Partielle Differenzialgleichungen. 2 Stunden.

Daneben: *Sidler*: Differenzial- und Integralrechnung; Theoretische Astronomie. — *Blaser*: Ballistik mit Anwendungen auf Artillerie. — *Jenzer*: Einleitung in die praktische Astronomie mit Uebungen auf der Sternwarte; Theorie der meteorologischen Instrumente.

Winter 1870/1871.

Auf den Winter 1870/1871 habilitirte sich Herr Dr. *Cherbuliez* als Docent.

Elliptische Functionen. 2 Stunden.

Partielle Differenzialgleichungen. 3 Stunden.

Geometrie von drei oder mehr Dimensionen. 2 Stunden.

Mechanik. 2 Stunden.

Daneben: *Sidler*: Synthetische Geometrie; Elemente der Differenzial- und Integralrechnung. — *Blaser*: Ballistik mit Anwendung auf Artillerie. — *Jenzer*: Einleitung in die praktische Astronomie mit Demonstrationen auf der Sternwarte; Praktische Uebungen auf der Sternwarte. — *Cherbuliez*: Geschichte der mathematisch-physikalischen Untersuchungen im 18. Jahrhundert; Analytische Mechanik, 1. Theil; Geschichte der Physik, von *Galilei* bis *Newton*.

Sommer 1871.

Mathematische Uebungen. 2 Stunden.

Analytische Geometrie. 2 Stunden.

Differenzial- und Integralrechnung. 3 Stunden.

Daneben: *Sidler*: Ueber die nach dem umgekehrten Quadrat der Entfernung wirkenden Anziehungskräfte; Ueber die Bewegung der die Sonne in Kegelschnitten umlaufenden Himmelskörper. — *Blaser*: Anleitung zur Berechnung von Schusstafeln für Offiziere und Aspiranten der

Artillerie; Das Polygonalverfahren für Forstgeometer. — *Jenzer*: E leitung in die praktische Astronomie mit Uebungen auf der Sternwarte. *Cherbuliez*. Die Interferenz- und Beugungserscheinungen des Lichtes mathematischer Behandlung; Elemente der Theorie der Kapillarit Geschichte der Physik (Fortsetzung: *Newton's* Zeit).

Winter 1871/1872.

Mathematische Uebungen. 1 Stunde.

Elliptische Functionen. 2 Stunden.

Mechanik. 3 Stunden.

Analytische Geometrie. 3 Stunden.

Geometrie von mehr als drei Dimensionen. 2 Stunden.

Daneben: *Sidler*: Elliptische Functionen; Neuere Geometrie. *Blaser*: Mathematischer Vorbereitungskurs für Offiziersaspiranten Artillerie; Das Polygonalverfahren mit Einschluss der mathematisc Vorbereitung. — *Jenzer*: Praktische Astronomie mit Uebungen auf Sternwarte. — *Cherbuliez*: Die Entwickelung der mathematischen Ph im 18. Jahrhundert; Die Gesetze der Strahlenbrechung und der Zurü werfung des Lichtes; Die Elemente der mechanischen Wärmetheorie.

Sommer 1872.

Auf den Sommer 1872 trat *E. Jenzer* von seiner Thätigkeit der Hochschule zurück.

Mathematische Uebungen. 2 Stunden.

Differenzialgleichungen. 3 Stunden.

Flächen dritten Grades. 3 Stunden.

Mechanik. 3 Stunden.

Daneben: *Sidler*: Differenzial- und Integralrechnung; Theoretisc Astronomie. — *Blaser*: Mathematischer Vorbereitungskurs für Offizie aspiranten der Artillerie und des Genie; Polygonalverfahren mit E schluss der mathematischen Vorbereitung. — *Cherbuliez*: Einleitung die mathematische Physik; Elemente der Hydrodynamik in mathematisc Behandlungsweise; Mathematische Darstellung physikalischer, namentl periodischer Erscheinungen.

Winter 1872/1873.

Auf den Winter 1872/1873 verliess Herr Dr. *Cherbuliez* Be so dass neben *Schläfli* nur noch *Blaser* und *Sidler* zurückblieben.

Integrale algebraischer Functionen. 4 Stunden.

Algebra. 3 Stunden.

Mathematische Uebungen. 2 Stunden.

Flächen dritten Grades. 3 Stunden.

Daneben: *Sidler*: Ueber Functionen complexer Grössen; Synthetis Geometrie. — *Blaser*: Theoretischer Wiederholungskurs für Offiziere

Artillerie und des Genie; Mathematische Uebungen aus der analytischen Optik.

Sommer 1873.

Integrale mathematischer Functionen. 4 Stunden.

Analytische Mechanik. 4 Stunden.

Daneben: *Sidler*: Sphärische Astronomie. — *Blaser*: Repetitorium der elementaren Mathematik; Darstellende Geometrie mit Anwendungen.

Winter 1873/1874.

Elliptische Functionen sammt Anwendungen. 3 Stunden.

Ueber Flächen 2. Grades. 2 Stunden.

Analytische Mechanik. 3 Stunden.

Binäre quadratische Formen. 2 Stunden.

Differenzialgleichungen. 3 Stunden.

Daneben: *Sidler:* Ueber die Bewegungen der Planeten um die Sonne; Einleitung in die mathematische Physik. — *Blaser*: Theorie des gesetzlich vorgeschriebenen Polygonalverfahrens mit Einschluss der mathematischen Vorbereitung; Ballistik mit Anwendung zur Berechnung der Schusstafeln.

Sommer 1874.

Zahlenlehre. 3 Stunden.

Analytische Mechanik. 3 Stunden.

Differenzialgleichungen. 2 Stunden.

Mathematische Uebungen. 1 Stunde.

Daneben: *Blaser*: Theorie des gesetzlich vorgeschriebenen Polygonalverfahrens, 2. Theil; Einleitung in die höhere Analysis.

Winter 1874/1875.

Zahlenlehre. 2 Stunden.

Flächen dritter Ordnung. 2 Stunden.

Elliptische Functionen. 3 Stunden.

Differenzialgleichungen. 3 Stunden.

Daneben: *Sidler*: Elemente der Differenzial- und Integralrechnung mit Anwendungen auf analytische Geometrie; Theorie der planetarischen Störungen. — *Blaser*: Elementarmathematik; Theorie des gesetzlich vorgeschriebenen Polygonalverfahrens.

Sommer 1875.

Auf das Sommersemester 1875 trat *Albert Benteli* als Docent ein.

Differenzialgleichungen. 3 Stunden.

Analytische Geometrie. 3 Stunden.

Analytische Mechanik. 3 Stunden.

Daneben: *Sidler*: Einleitung in die synthetische Geometrie; Die Erscheinungen am gestirnten Himmel. — *Blaser*: Einleitung in die Differenzial- und Integralrechnung; Ebene Trigonometrie; Algebra und Geometrie; Ballistik. — *Benteli*: Elemente der darstellenden Geometrie mit Uebungen. — *Schönholzer*: Differenzial- und Integralrechnung; Analytische Geometrie; Repetitorium der Elemente der Mathematik. — *Graf*: Theoretische Mechanik; Ausgewählte Gebiete der Geometrie; Algebraische Analysis. — *Gräfe*: Geschichte der mathematischen Wissenschaften der Griechen; Anwendung der Differenzial- und Integralrechnung (Theorie der Curven doppelter Krümmung und der Flächen); Theorie der *Fourier'schen* Reihen und Integrale.

Winter 1879/1880.

Einleitung in die Infinitesimalrechnung. 3 Stunden.

Integralrechnung. 3 Stunden.

Analytische Geometrie. 2 Stunden.

Lehre von den quadratischen Formen. 2 Stunden.

Mechanik. 3 Stunden.

Daneben: *Sidler*: Synthetische Geometrie; Theoretische Astronomie. — *Blaser*: Ballistik; Einleitung in die Differenzial- und Integralrechnung; Theorie des Polygonarverfahrens; Ebene und sphärische Trigonometrie. — *Benteli*: Darstellende Geometrie: Curven, Strahlenflächen und Rotationsflächen; Methodik des technischen Zeichnens. — *Schönholzer*: Ausgewählte Kapitel der Mathematik; Algebraische Analysis; Analytische Geometrie der Ebene. — *Graf*: Mechanische Wärmetheorie; Geometrie; Algebraische Analysis. — *Gräfe*: Theorie der höheren Gleichungen; Elliptische Functionen und Integrale: Repetitorium der niedern Mathematik.

Sommer 1880.

Infinitesimalrechnung. 2 Stunden.

Differenzialgleichungen. 3 Stunden.

Mechanik. 2 Stunden.

Zahlenlehre. 2 Stunden.

Daneben: *Sidler*: Synthetische Geometrie der Kegelschnitte. — *Blaser*: Ebene Trigonometrie; Theorie des Polygonarverfahrens. — *Benteli*: Elemente der darstellenden Geometrie. — *Schönholzer*: Differenzial- und Integralrechnung; Analytische Geometrie der Ebene; Elemente der Mathematik. — *Graf*: Theoretische Mechanik; Ausgewählte Gebiete der Mathematik; Differenzialgleichungen. — *Gräfe*: Theorie der Maxima und Minima (Einleitung in die Variationsrechnung); Theorie der Determinanten; Ausgewählte Kapitel aus der Differenzial- und Integralrechnung.

Winter 1880/1881.

Differenzialgleichungen. 3 Stunden.

Infinitesimalrechnung. 3 Stunden.

Analytische Mechanik. 3 Stunden.

Mathematische Uebungen. 2 Stunden.

Flächen dritten Grades. 3 Stunden.

Daneben: *Sidler*: Theorie der planetarischen Bewegungen. — *Blaser*: Ballistik; Theorie des Polygonarverfahrens; Ebene Trigonometrie. — *Benteli*: Darstellende Geometrie (Dreikant, Curven, Strahlenflächen, Rotationsflächen); Methode des technischen Zeichnens; Repetitorium der darstellenden Geometrie. — *Schönholzer*: Theorie der Gleichungen; Mathematische Uebungen; Algebraische Analysis. — *Graf*: Mechanische Wärmetheorie; Theorie der complexen Zahlen und unendlichen Reihen; Ausgewählte Gebiete der Geometrie. — *Gräfe*: Repetitorium der niedern Mathematik mit Uebungen; Sphärische Trigonometrie als Einleitung in die Theorie der elliptischen Functionen; Anwendung der Differenzial- und Integralrechnung auf Curven und Flächen; Analytische Geometrie des Raumes.

Sommer 1881.

Analytische Mechanik. 3 Stunden.

Differenzialgleichungen. 3 Stunden.

Infinitesimalrechnung. 2 Stunden.

Mathematische Uebungen. 2 Stunden.

Daneben: *Sidler*: Mathematische Geographie; Ausgewählte Kapitel aus der synthetischen Geometrie. — *Blaser*: Vorbereitungskurs für Aspiranten der Artillerie; Ballistik; Ebene Trigonometrie. — *Benteli*: Elemente der darstellenden Geometrie, theoretischer und praktischer Theil; Praktische Geometrie. — *Schönholzer*: Analytische Geometrie; Algebraische Analysis, 2. Theil; Mathematische Uebungen. — *Graf*: Theoretische Mechanik; Mechanische Behandlung der Elektrizität. — *Gräfe*: Theorie der Gleichungen; Ausgewählte Kapitel aus der Differenzial- und Integralrechnung; Wahrscheinlichkeitsrechnung (Methode der kleinsten Quadrate); Geschichte der Mathematik im 17. und 18. Jahrhundert.

Winter 1881/1882.

Infinitesimalrechnung. 2 Stunden.

Mathematische Uebungen. 2 Stunden.

Differenzialgleichungen. 3 Stunden.

Elliptische Functionen. 3 Stunden.

Analytische Mechanik. 3 Stunden.

Daneben: *Sidler*: Theorie und Anwendung der Potentialfunctionen. — *Blaser*: Ballistik mit Berechnung von Schusstafeln; Theorie des Polygonarverfahrens; Ebene Trigonometrie. — *Benteli*: Darstellende Geometrie (Dreikant, Curven, Strahlenflächen, Rotationsflächen); Repetitorium der darstellenden Geometrie; Methodik des technischen Zeichnens; Praktische Geometrie; Repetitorium der praktischen Geometrie. — *Schönholzer*: Integralrechnung; Repetitorium; Geometrie. — *Graf*: Mechanische Wärmetheorie; Mechanische Behandlung der Elektrizität; Mathematische Uebungen. — *Gräfe*: Algebraische Analysis; Ebene und sphärische Trigonometrie; Einleitung in die Differenzial- und Integralrechnung.

Sommer 1882.

Auf den Sommer 1882 ging Dr. *Gräfe* von Bern weg.

Infinitesimalrechnung. 3 Stunden.

Analytische Mechanik. 3 Stunden.

Differenzialgleichungen. 2 Stunden.

Zahlenlehre. 2 Stunden.

Daneben: *Sidler*: Ausgewählte Abschnitte der theoretischen Astronomie. — *Blaser*: Vorbereitungskurs für Offiziersaspiranten der Artillerie und des Genie; Einleitung in die höhere Analysis; Die Probleme der Statik. — *Benteli*: Elemente der darstellenden Geometrie; Praktische Geometrie-Uebungen. — *Schönholzer*: Differenzial- und Integralrechnung; Repetitorium der Algebra; Ausgewählte Kapitel der Geometrie. — *Graf*: Theoretische Mechanik; Mechanische Behandlung der Elektrizität; Mathematische Uebungen.

Winter 1882/1883.

Integralrechnung. 3 Stunden.

Besondere Theile der Mechanik. 3 Stunden.

Elliptische Functionen. 3 Stunden.

Zahlenlehre. 3 Stunden.

Mathematische Uebungen. 2 Stunden.

Daneben: *Sidler*: Theorie der planetarischen Störungen. — *Blaser*: Vorbereitungskurs für Offiziersaspiranten der Artillerie und des Genie: Einleitung in die höhere Analysis; Ebene Trigonometrie; *Benteli*: Darstellende Geometrie, 1. Theil, Elemente; Darstellende Geometrie, 2. Theil, Curven, Strahlenflächen und Rotationsflächen; Repetitorium der darstellenden Geometrie; Methodik des technischen Zeichnens; Praktische Geometrie, 1. Theil; Praktische Geometrie, Ergänzungen und Repetitorium. — *Schönholzer*: Integralrechnung; Algebraische Analysis; Analytische Geometrie der Ebene; Mathematische Uebungen. — *Graf*: Mechanische Behandlung der Elektrizität; Mechanische Wärmetheorie; Mathematische Uebungen.

Sommer 1883.

Elliptische Functionen. 3 Stunden.

Binäre quadratische Formen. 3 Stunden.

Differenzialgleichungen. 3 Stunden.

Analytische Mechanik. 3 Stunden.

Daneben: *Sidler*: Theorie der Mondbewegung; Synthetische Geometrie. — *Blaser*: Theorie des Polygonarverfahrens; Einleitung in die höhere Analysis; Die Probleme der Statik. — *Benteli*: Elemente der darstellenden Geometrie; Praktische Geometrie; Uebungen. — *Schönholzer*: Differenzialrechnung; Elemente der Mechanik; Analytische Geometrie (Fortsetzung); Ueber einige Differenzialgleichungen der Physik. — *Graf*: Theoretische Mechanik; Mechanische Behandlung der Elektrizität; Mathematische Uebungen.

Winter 1883/1884.

Analytische Mechanik. 5 Stunden.

Binäre quadratische Formen. 3 Stunden.

Elliptische Functionen. 3 Stunden.

Differenzialgleichungen. 3 Stunden.

Mathematische Uebungen. 1 Stunde.

Daneben: *Sidler*: Elemente der Astronomie; Anwendung der Infinitesimalrechnung auf Geometrie. — *Blaser*: Vorbereitungskurs für Aspiranten der Artillerie und des Genie; Ballistik; Ebene Trigonometrie. — *Benteli*: Darstellende Geometrie, 2. Theil, Strahlenflächen und Rotationsflächen; Repetitorium der darstellenden Geometrie; Methodik des technischen Zeichnens; Praktische Geometrie, 1. Theil; Praktische Geometrie, Ergänzungen und Repetitorium. — *Schönholzer*: Integralrechnung; Theorie der Gleichungen; Algebraische Analysis; Analytische Geometrie. — *Graf*: Mechanische Behandlung der Elektrizität; Ausgewählte Kapitel aus der theoretischen Optik; Mathematische Uebungen.

Sommer 1884.

Auf den Sommer 1884 traten *A. Leuch* und Dr. *G. Huber* als Docenten ein; es starb aber *Schönholzer* im Januar 1884.

Analytische Mechanik. 3 Stunden.

Elliptische Functionen. 3 Stunden.

Integralrechnung. 3 Stunden.

Behandlung physikalischer Aufgaben. 3 Stunden.

Daneben: *Sidler*: Ausgewählte Partien der Astronomie; Elemente der Infinitesimalrechnung. — *Blaser*: Ballistik; Ebene Trigonometrie; Sphärische Trigonometrie. — *Benteli*: Elemente der darstellenden Geometrie; Praktische Geometrie, Uebungen. — *Graf*: Ausgewählte Kapitel aus der theoretischen Optik; Differenzial- und Integralrechnung; Mathematische Uebungen. — *Leuch*: Algebraische Analysis mit Repetitorium; Analytische Geometrie mit Repetitorium; Höhere Astronomie; Differenzialgleichungen; Geometrie der Lage; Theoretische Mechanik; Methode der kleinsten Quadrate. — *Huber*: Physikalisches Praktikum; Differenzial- und Integralrechnung; Einleitung in die höhere Analysis; Ebene Trigonometrie; Analytische Geometrie des Raumes; Mathematische Uebungen.

Winter 1884/1885.

Kugelfunctionen und *Bessel'sche* Functionen. 3 Stunden.

Elliptische Functionen. 3 Stunden.

Analytische Stereometrie. 3 Stunden.

Mathematische Uebungen. 2 Stunden.

Daneben: *Sidler*: Theorie und Anwendungen der Potentialfunction; Ueber die Einrichtung des Kalenders. — *Blaser*: Theorie des Katasterverfahrens; Ballistik; Ebene Trigonometrie; Stereometrie. — *Benteli*: Darstellende Geometrie, 2. Theil, Curven, Strahlenflächen, Rotationsflächen; Repetitorium der darstellenden Geometrie; Methodik des technischen Zeichnens; Praktische Geometrie, 1. Theil; Praktische Geometrie, Ergänzungen und Repetitorium. — *Graf*: Ausgewählte Kapitel aus der theoretischen Optik; Mechanische Wärmetheorie; Auswerthung bestimmter Integrale mit Hülfe von Veränderung des Integrationsweges; Mathematische Uebungen. — *Leuch*: Algebraische Analysis mit Repetitorium; Analytische Geometrie mit Repetitorium; Höhere Analysis; Geometrie der Lage; Analytische Mechanik; Uebungen im Vortrag. — *Huber*: Physikalisches Praktikum; Differenzial- und Integralrechnung und Uebun-

gen dazu; Sphärische Trigonometrie mit Anwendungen auf mathematische Geographie und Astronomie; Theorie der Functionen einer complexen Variabeln.

Sommer 1885.

Auf den Sommer 1885 trat Dr. *Bigler* als Docent ein.

Kugelfunctionen. 3 Stunden.

Flächen dritten Grades. 3 Stunden.

Elliptische Functionen. 3 Stunden.

Mathematische Uebungen. 2 Stunden.

Daneben: *Sidler*: Mathematische Geographie; Wahrscheinlichkeitsrechnung und Methode der kleinsten Quadrate. — *Blaser*: Mathematischer Vorbereitungskurs für Aspiranten der Artillerie und des Genie; Ebene Trigonometrie; Ballistik. — *Benteli*: Elemente der darstellenden Geometrie; Praktische Geometrie, Uebungen auf dem Terrain. — *Graf*: Auswerthung bestimmter Integrale mittelst Veränderung des Integrationsweges; Ausgewählte Kapitel der theoretischen Optik; Theorie der algebraischen Gleichungen. — *Leuch*: Algebraische Analysis; Analytische Geometrie; Höhere Analysis; Uebungen im Vortragen; Analytische Mechanik; Analytische Geometrie der Linien und Flächen; Projektive Geometrie. — *Huber*: Differenzial- und Integralrechnung mit Uebungen; Ebene Trigonometrie; Algebraische Gleichungen; Determinantentheorie. — *Bigler*: Mathematische Uebungen; Theoretische Optik; Das Potential.

Winter 1885/1886.

Kugelfunctionen und *Bessel'sche* Functionen. 3 Stunden.

Analytische Mechanik. 3 Stunden.

Infinitesimalrechnung. 3 Stunden.

Daneben: *Sidler*: Ausgewählte Kapitel der Geometrie; Ueber die Bewegung der die Sonne in Kegelschnitten umlaufenden Himmelskörper. — *Blaser*: Mathematischer Vorbereitungskurs für Offiziersaspiranten der Artillerie und des Genie; Ebene Trigonometrie; Theorie des Katasterverfahrens; Probleme der Statistik. — *Benteli*: Darstellende Geometrie, 2. Theil, Curven, Strahlenflächen, Rotationsflächen; Darstellende Geometrie, Repetitorium und Vortragsübungen; Methodik des technischen Zeichnens; Praktische Geometrie, 1. Theil; Praktische Geometrie, Ergänzungen und Repetitorium. — *Graf*: Bestimmte Integrale; Repetitorium der Analysis; Die Hauptsätze der mechanischen Wärmetheorie; Theoretische Optik (Polarisation). — *Leuch*: Algebraische Analysis, Fortsetzung; Analytische Geometrie, Fortsetzung; Sphärische Trigonometrie; Differenzial- und Integralrechnung; Methodik des mathematischen Unterrichts; Repetitorium der analytischen Geometrie und der Differenzial- und Integralrechnung; Differenzialgleichungen. — *Huber*: Integralrechnung mit Uebungen; Sphärische Trigonometrie und mathematische Geographie; Analytische Geometrie der höhern ebenen Curven. — *Bigler*: Das Potential; Differenzialgleichungen; Integralrechnung.

Sommer 1886.

Binäre quadratische Formen. 5 Stunden.

Integralrechnung. 2 Stunden.

Hypergeometrische Reihen und Verwandtes. 3 Stunden.

Flächen zweiten Grades. 3 Stunden.

Daneben: *Sidler*: Ueber Ellipsenbogen, deren Differenz algebraisch darstellbar ist. — *Blaser*: Mathematischer Vorbereitungskurs für Aspiranten der Artillerie und des Genie; Ebene Trigonometrie; Ballistik. — *Benteli*: Elemente der darstellenden Geometrie; Praktische Geometrie; Uebungen auf dem Terrain. — *Graf*: Ausgewählte Kapitel aus der theoretischen Optik; Probleme der theoretischen Mechanik; Bestimmte Integrale; Repetitorium der Analysis. — *Leuch*: Ebene Trigonometrie mit Anwendungen; Analytische Geometrie der Ebene, 1. Theil; Algebraische Analysis, incl. Gleichungen; Differenzialrechnung mit Uebungen; Theorie und Anwendung der trimetrischen Punkt- und Liniencoordinaten; Biordinale Transformationen; Ausgewählte Kapitel aus der Astronomie. — *Huber*: Differenzialrechnung mit Uebungen; Ebene Trigonometrie; Determinantentheorie; *Fourier'sche* Reihen und Integrale mit Anwendung auf Physik. — *Bigler*: Theoretische Optik; Analytische Geometrie; Differenzialrechnung.

Winter 1886/1887.

Auf den Winter 1886/1887 starb *Blaser*.

Anwendung des Integrationsweges auf bestimmte Integrale. 2 St

Elliptische Functionen. 3 Stunden.

Differenzialgleichungen. 3 Stunden.

Daneben: *Sidler*: Mathematische Geographie; Synthetische Geometrie. — *Benteli*: Darstellende Geometrie, Curven, Strahlenflächen, Rotationsflächen; Darstellende Geometrie, Repetitionen und Vortragsübungen; Schattenlehre; Methodik des Linearzeichnens; Praktische Geometrie, 1. Theil; Praktische Geometrie, Ergänzungen und Repetitorium. — *Graf*: Geschichte der schweizerischen Kartographie mit Demonstrationen; Die Hauptsätze der mechanischen Wärmetheorie; Bestimmte Integrale; Repetitorium der Analysis. — *Leuch*: Mathematischer Kurs für Lehramtskandidaten; Elemente der synthetischen Geometrie; Geographische Ortsbestimmung; Renten- und Lebensversicherung. — *Huber*: Integralrechnung mit Uebungen; Sphärische Trigonometrie mit Anwendung auf mathematische Geographie; Analysis der Geometrie des Raumes; Repetitorium der Mathematik. — *Bigler*: Mathematische Statistik; Analytische Geometrie; Algebra; Theoretische Optik.

Sommer 1887.

Auf den Sommer 1887 ging Dr. *Bigler* von Bern fort.

Differenzialgleichungen. 2 Stunden.

Analytische Mechanik. 3 Stunden.

Flächen dritten Grades. 3 Stunden.

Elliptische Functionen. 2 Stunden.

Daneben: *Sidler*: Das ebene Dreieck in synthetischer Behandlung; Theoretische Astronomie. — *Benteli*: Elemente der darstellenden Geometrie; Praktische Geometrie, Uebungen auf dem Terrain. — *Graf*: Geschichte der schweizerischen Kartographie; Ausgewählte Kapitel der

theoretischen Elektrizitätslehre; Repetitorium der Analysis; Auswerthung bestimmter Integrale durch Veränderung des Weges. — *Leuch:* Algebraische Analysis, 1. Theil; Ebene Trigonometrie; Analytische Geometrie, 1. Theil; Elemente der Differenzialrechnung; Projektivische Geometrie; Ausgewählte Kapitel aus der Astronomie; Ausgewählte Kapitel aus der Mechanik. — *Huber*: Differenzialrechnung mit Uebungen; Analytische Geometrie der Ebene; Determinantentheorie; *Fourier'sche* Reihen und Integrale mit Anwendungen auf Physik.

Winter 1887/1888.

Differenzialgleichungen. 2 Stunden.

Elliptische Functionen. 3 Stunden.

Flächen zweiten Grades. 3 Stunden.

Flächen dritten Grades. 3 Stunden.

Daneben: *Sidler*: Synthetische Geometrie der Kegelschnitte; Mathematische Geographie. — *Benteli:* Darstellende Geometrie; Praktische Geometrie; Methodik des Zeichnens; Repetitorium der darstellenden Geometrie. — *Graf*: Einleitung in die mechanische Wärmetheorie; Ausgewählte Kapitel der theoretischen Elektrizitätslehre; Repetitorium der Analysis; Kartographie. — *Leuch*: Algebraische Analysis (Fortsetzung); Analytische Geometrie der Ebene (Fortsetzung); Sphärische Trigonometrie und mathematische Geographie; Integralrechnung mit Uebungen; die projectivischen Gebilde 1. Stufe und die Erzeugnisse ihrer Verbindung; Astronomie. — *Huber*: Algebraische Analysis, 2. Theil; Sphärische Trigonometrie mit Anwendung auf die mathematische Geographie; Analytische Geometrie der Ebene der Kegelschnitte; Uebungen zu obigen; Integralrechnung mit Uebungen; Repetitorium der Mathematik.

Sommer 1888.

Dr. Ch. Moser tritt als Docent auf.

Differenzialgleichungen. ? Stunden.

Fonctions de Lamé. ? Stunden.

Flächen dritten Grades. ? Stunden.

Flächen zweiten Grades. ? Stunden.

Daneben: *Sidler*: Ausgewählte Kapitel synthetischer Geometrie; Ueber Ellipsenbogen, deren Differenz rectifizirbar ist. — *Benteli*: Elemente der darstellenden Geometrie; Praktische Geometrie, Uebungen auf dem Felde. — *Graf*: Repetitorium der Analysis; Theorie des Potentials; Ausgewählte Kapitel der theoretischen Elektrizitätslehre; Bestimmte Integrale mit Uebungen; Geschichte der schweizerischen Kartographie seit dem 18. Jahrhundert. — *Leuch:* Allgemeine Analysis; Ebene Trigonometrie; Analytische Geometrie der Ebene; Elemente der Differenzialrechnung, Uebungen dazu; Theorie der Finsternisse und Bedeckungen. — *Huber*: Algebraische Analysis, 1. Theil; Ebene Trigonometrie; Analytische Geometrie der Ebene; Mathematische Uebungen; Functionentheorie. — *Moser*: Ein besonderes System von Curven und Flächen; Ebene Trigonometrie mit Anwendungen auf die praktische Geometrie; Behandlung ausgewählter Stoffe und Aufgaben im mathematisch-naturwissenschaftlichen Seminar.

Winter 1888/1889.

Differenzialgleichungen. 2 Stunden.

Fonctions de Lamé. 3 Stunden.

Flächen zweiten Grades. 2 Stunden.

Daneben: *Sidler*: Theorie und Anwendung von Potentialfunctionen; das ebene Dreieck. — *Benteli*: Darstellende Geometrie und Repetitorium; Methodik des Linearzeichnens; Schatten- und Beleuchtungslehre; Praktische Geometrie. — *Graf*: Geschichte der Kartographie der Schweiz; Repetitorium der analytischen Geometrie der Ebene; Ausgewählte Kapitel der theoretischen Optik; bestimmte Integrale mit Uebungen. — *Leuch*: Mathematik an der Lehramtsschule; Elliptische Integrale; Zeit- und Polhöhebestimmungen; Differenzialgleichungen. — *Huber*: Algebraische Analysis 2. Theil, analytische Geometrie; Sphärische Trigonometrie mit mathematischer Geographie; Mathematische Uebungen; Integralrechnung; Repetitorium der Mathematik. — *Moser*: Einleitung in die Theorie der Potentialfunctionen; Einige höhere ebene Curven etc.; Uebungen.

Sommer 1889.

Elliptische Integrale. 2 Stunden.

Flächen dritten Grades. 2 Stunden.

Differenzialgleichungen. 2 Stunden.

Daneben: *Sidler*: Theorie der Potentialfunctionen; Ellipsenbogen mit rectifizirbarer Differenz. — *Benteli*: Darstellende Geometrie; Praktische Geometrie. — *Graf*: Schweizerische Kartographie seit dem 18. Jahrhundert; Repetitorium der Analysis; Bestimmte Integrale; Theoretische Mechanik. — *Leuch*: Mathematik an der Lehramtsschule; Astronomie; Geometrie der Lage; Mathematische Colloquien; Mechanik. — *Huber*: Algebraische Analysis; Analytische Geometrie; Uebungen; Differenzialrechnung; Determinanten; Mathematische Statistik. — *Moser*: Integration; Mathematische Physik; Uebungen.

Winter 1889/1890.

Fonctions de Laplace. 2 Stunden.

Binäre quadratische Formen. 3 Stunden.

Elimination. 3 Stunden.

Daneben: *Sidler*: Potentialfunctionen; Ueber den Kalender; — *Benteli*: Darstellende Geometrie mit Repetitorium; Methodik des Zeichnens; Praktische Geometrie. — *Graf*: Schweizerische Kartographie; Theoretische Kartographie; Repetitorium der Analysis; Bestimmte Integrale; Theorie des Potential; *Leuch*: Sphärische Trigonometrie mit mathematischer Geographie; Analytische Geometrie der Kegelschnitte; Algebraische Analysis; Integralrechnung; Repetitorium der Mathematik; Astronomie; Methode der kleinsten Quadrate. — *Huber*: Algebraische Analysis; Mathematische Geometrie der Kegelschnitte und des Raumes; Sphärische Trigonometrie etc.; Mathematische Uebungen; Repetitorium; Integralrechnung. — *Moser*: Integrationen; mathematische Physik; Uebungen.

Sommer 1890.

Dr. *E. Ott* wird als ausserordentlicher Professor der Mathematik an der Lehramtsschule und an der philosoph. Fakultät gewählt.

Differenzialgleichungen. 3 Stunden.

Fonctions de Laplace. 2 Stunden.

Zahlenlehre. 2 Stunden.

Daneben: *Sidler*: Das Problem der drei Körper. — *Ott*: Algebra; Geometrie etc.; Ebene Trigonometrie; Uebungen; Elemente der Differenzialrechnung; Analytische Geometrie; Uebungen. — *Benteli*: Elemente der darstellenden Geometrie; Praktische Geometrie. — *Graf*: Repetitorium der Analysis; Bestimmte Integrale; Einleitung in die Kartographie der Schweiz; Anwendung des Potentials auf Elektrizität. — *Leuch*: Ebene Trigonometrie; Algebra; Analysis, 1. Theil; Analytische Geometrie, 1. Theil; Differenzialrechnung; Mathematische Uebungen und Repetitorium; Differenzialgleichungen; Geometrie der Lage; Mechanik des Himmels. — *Huber*: Ebene Trigonometrie; Algebraische Analysis, 1. Theil; Analytische Geometrie; Mathematische Uebungen; Differenzialrechnung; *Fourier*'sche Reihen und Integrale mit Anwendung auf Physik. — *Moser*: Ueber einige Functionen von Differenzialgleichungen zweiter Ordnung; Uebungen.

Dr. *J. H. Graf* und Dr. *G. Huber* werden als ausserordentliche Professoren der Mathematik an die Hochschule gewählt.

Winter 1890/1891.

Lamé'sche Functionen. 2 Stunden.

Elliptische Functionen. 2 Stunden.

Zahlenlehre. 2 Stunden.

Daneben: *Sidler*: Mathematische Geometrie des Dreiecks. — *Ott*: Algebra, 2. Theil; Sphärische Trigonometrie und mathematische Uebungen; Integralrechnung; analytische Geometrie, 2. Theil, Uebungen. — *Graf* Repetitorium der Analysis; Anwendung des Potentials auf Elektrizität; Kartographie der Schweiz; Hauptkapitel theoretischer Mechanik; Bestimmte Integrale; — *Huber*: Integralrechnung: Synthetische Geometrie; Repetitorium; Mechanische Wärmetheorie. — *Benteli*: Darstellende Geometrie und Repetitorium; Praktische Geometrie. — *Leuch*: Geometrie der Bewegung; Astronomische Zeitbestimmung; Anwendung von Differenzial- und Integralrechnung auf Geometrie und Mechanik; Ausgewählte Partien analytischer Mechanik. — *Moser*: Uebungen; Ueber gegenseitige Beziehungen der Wurzelwerthe einer speziellen Function der mathematischen Physik.

Sommer 1891.

Fonctions de Lamé. 2 Stunden.

Zahlenlehre. 3 Stunden.

Fonctions elliptiques. 2 Stunden.

Daneben: *Sidler:* Synthetische Geometrie der Kegelschnitte. — *Ott*: Algebra, 1. Theil; Goniometrie und ebene Trigonometrie; Mathematische Uebungen; Differenzialgleichungen; Analytische Geometrie, 1 Theil.

Graf: Repetitorium der Analysis; Bestimmte Integrale; Differenzialgleichungen; Ausgewählte Kapitel aus der theoretischen Elektrizitätslehre; Geschichte der schweizerischen Kartographie. — *Huber*: Analytische Geometrie des Raumes; Einleitung in die synthetische Geometrie; Determinantentheorie; Elliptische Integrale; Physikalische Optik. — *Benteli*: Elemente der darstellenden Geometrie; Praktische geometrische Uebungen. — *Leuch*: Geometrie der Bewegung; Analytische Mechanik. — *Moser*: Uebungen mathematisch-naturwissenschaftlichen und versicherungstechnischen Inhalts.

Winter 1891/1892.

Schläfli liest nicht mehr.

Sidler: Theoretische Astronomie. — *Ott*: Analysis; Sphärische Trigonometrie; Mathematische Geographie; Integralrechnung; Analytische Geometrie, 2. Theil, und Uebungen. — *Graf*: Repetitorium der Analysis; Bestimmte Integrale; Ausgewählte Kapitel der theoretischen Elektrizitätslehre; Theoretische Mechanik. — *Huber*: Theorie der Formeln und Integrale einer complexen Variablen; Elliptische Integrale; Synthetische Geometrie der Kegelschnitte; Einleitung in die mechanische Wärmetheorie. — *Benteli*: Darstellende Geometrie; Praktische Geometrie. — *Leuch*: Kinematik; Astronomie. — *Moser*: Einleitung in die theoretische Behandlung der Unfall- und Krankenversicherung; Aufgaben der mathematischen Physik.

Sommer 1892.

Sidler: Geometrische Uebungen. — *Huber*: Einleitung in die synthetische Geometrie; Repetitorium der Differenzial- und Integralrechnung; Elliptische Functionen; *Fourier'sche* Reihen; — *Graf*: Repetitorium der Analysis; *Bessel'sche* Functionen; Curven dritten Grades; Ausgewählte Kapitel der theoretischen Elektrizitätslehre; Geschichte der schweizerischen Kartographie. — *Ott*: Algebra; Ebene Trigonometrie; Mathematische Uebungen; Differenzialrechnung; Analytische Geometrie; Uebungen. — *Benteli*: Elemente der darstellenden Geometrie. — Praktische Geometrie. — *Moser*: *Bernoulli's* Theorem und seine Beziehungen zu einer rationellen Statistik; Aufgaben. — *Leuch*: Géometrie analytique; calcul différentiel et intégral.

Winter 1892/1893.

Prof. Dr. *Graf* wird als ordentlicher Professor und Nachfolger *Schläfli's* gewählt.

Inhalts-Verzeichniss.

	Seite der Sitzungsberichte	Seite der Abhandlungen
Jahresbericht pro 1894/95	III	
Jahresrechnung pro 1894	XVIII	
Mitgliederverzeichniss pro 31. XII 1895	XIII	
Baltzer A., Dr. phil. und Professor,		
Sinterbildungen von Hammam Meskoutine	VII	
Der Aaregletscher in der Diluvialzeit	XII	
Vom Rande der Wüste (mit 3 Tafeln)		13
Brückner Ed., Prof. Dr.,		
Hydrometrische Untersuchungen an der Rhone	VI	
Demonstrationen mit dem Projectionsapparat des Hochschulvereins	VII	
Der Gletscherbruch an der Altels	XI	
Coaz J., Eidg. Oberforstinspector,		
Die Gletscherbewegung im Jahr 1894	VI	
Eggenberger J., Dr. phil.,		
Ueber eine Eigenschaft einer Gammafunction mit einer Potenz als Argument		8
Enz, Professor in Solothurn,		
Die neuen Theorien der Hagelbildung	XI	
Epstein S., Dr. phil.,		
Erkenntnisstheorie und exakte Wissenschaft	VI	
v. Fellenberg E., Dr. phil. und Bergingenieur,		
Vorweisung einiger neuer Acquisitionen des naturhistorischen Museums	IX	
Fischer E., Prof. Dr.,		
Ueber die Pilzgruppe der Phalloideen	VIII	
Neuere Untersuchungen über die Rostpilze	IX	
Vorweisung von Photographien einer Anzahl von Phalloideen	XII	
Tuberaceen aus dem Jura	XII	
Fischer L., Prof. Dr.,		
Demonstration einer Sammlung ausländischer Moose	IX	
Frey H., Dr. phil., Gymnasiallehrer und Docent,		
Vorweisung von Calcitkrystallen aus dem Lötschenthal und Baltschiederthal	VIII	
Graf J. H., Prof. Dr.,		
Ludwig Schläfli (1814-1895) (mit Bild und Facsimile)		120
Huber G., Prof. Dr.,		
Ueber die Erweiterung des infrarothen Sonnenspektrums und über die Photographie der Strahlen kleinster Wellenlängen	VII	

	Seite der Sitzungsberichte	Seite der Abhandlungen
Kissling E., Dr. phil., Sekundarlehrer und Docent,		
Ueber neue Arten, die in der marinen Molasse des Belpberges gefunden worden sind	IX	
Klippen, Chablaiszone und bunte Nagelfluh . .	IX	
Die Herkunft der bunten Nagelfluh	XI	
Rossel A., Prof. Dr.,		
Demonstration des Calciumcarbidlichtes . . .	XI	
Herstellung von neuen chemischen Verbindungen bei Anwendung hoher Temperaturen	XII	
Les parasites végétaux de la vigne provenant de l'introduction de la vigne américaine et les moyens de les combattre. Epidémie de Mildew 1894 . .		38
Schaffer F., Dr. phil., Kantonschemiker,		
Vorweisung eines Petrolprüfungsapparates und eines Viscosimeters von Engler	XII	
Steck Th., Dr. phil., Conservator,		
Systematik und Biologie der Schlupfwespen . .	XII	
Studer B., junior,		
Beiträge zur Kenntniss der schweiz. Pilze (Wallis).		1
Studer Th., Dr. phil., Professor,		
Hirschformen und schweineartige Thiere unserer Molasse	VI	
Tertiäre Hirsche	XI	
Ueber Pithecanthropus erectus Dubois . . .	XII	
Zwei Krebsreste der marinen Molasse . . .	XII	
Tscherich A., Prof. Dr.,		
Vegetationsbilder aus den Tropen	VII	
Photographie des ultravioletten Spektrums . .	VII	
Ueber die Anwendung der Photographie zur Lösung moderner wissenschaftlicher und praktischer Streitfragen	XI	
Wagner C., Dr. phil.,		
Ueber die Darstellung einiger bestimmter Integrale durch Bessel'sche Functionen.		115
Zeller J. R., Dr. phil. und Lehrer an der Töchterschule,		
Ein geologisches Querprofil durch die Centralalpen (mit Tafel und vielen Abbildungen im Text). .	VI	45

Verlag von K. J. WYSS in Bern.

Graf, J. H., Prof., Dr. *Einleitung in die Theorie der Gammafunktion und der Euler'schen Integrale* . Fr. 2.—

— — *Geschichte der Mathematik und der Naturwissenschaften in bernischen Landen* vom Wiederaufblühen der Wissenschaften bis in die neuere Zeit. Heft 1—3 Fr. 7.20

— — *Das Leben und Wirken des Physikers und Geodäten Jacques Barthélmy Micheli du Crest* aus Genf, Staatsgefangener des alten Bern 1746—1766. Mit dem Portrait Micheli's, einer Ansicht seines Gefängnisses in Aarburg und dem Facsimile seines Panorama der Alpen . . . . . Fr. 3.—

— — *Das Leben und Wirken des Physikers und Astronomen Johann Jac. Huber* aus Basel, 1739—1798. Mit dem Bildnisse Huber's und einer Tafel, seine freie Uebersiedlung darstellend . . . . Fr. 1.—

— — *Professor Dr. Rudolf Wolf, 1816—1893* Fr. 1.—

Huber, G., Prof., Dr. *Sternschnuppen, Feuerkugeln, Meteorite und Meteorschwärme* . . . . Fr. 1.—

— — *Forschungen auf dem Gebiete der Spektralanalyse* . — 80

Kissling, Dr., E. *Die versteinerten Thier- und Pflanzenreste in der Umgebung von Bern.* Excursions-Büchlein für Studirende . . . . . Fr. 4.—

Baumberger, E. *Ueber die geologischen Verhältnisse am linken Ufer des Bielersees* . . . . Fr. 2.—

Baltzer, A., Prof. *Vom Rande der Wüste.* Populärer Vortrag, gehalten im November 1894 in der Bernischen Naturforschenden Gesellschaft. Mit drei Lichtdrucktafeln. Fr. 1.50

Bützberger, F., Dr. *Kurzer Lehrgang der ebenen Trigonometrie* mit vielen Aufgaben und Anwendungen, cart. Fr. 1.60

Zu beziehen durch jede Buchhandlung.

Mittheilungen

der

Naturforschenden Gesellschaft

in Bern

aus dem Jahre 1896.

Nr. 1399-1435.

Redaktion: J. H. Graf.

BERN.
Druck und Verlag von K. J. Wyss
1897.

Verlag von K. J. WYSS in Bern.

BIBLIOGRAPHIE
der
Schweizerischen Landeskunde.

Unter Mitwirkung
der
hohen Bundesbehörden, eidgen. und kant. Amtsstellen
und zahlreicher Gelehrter
herausgegeben von der
Centralkommission für schweizerische Landeskunde.

In deutscher und französischer Ausgabe.

Bis jetzt erschienen:

Fascikel I a: *Bibliographische Vorarbeiten der landeskundlichen Litteratur und Kataloge der Bibliotheken der Schweiz.* Zusammengestellt von Prof. Dr. J. H. Graf. Bern 1894. 69 Seiten 8°. Preis Fr. 1.—

Fascikel I b, enthaltend: *Bibliographie der Gesellschaftsschriften, Zeitungen und Kalender der Schweiz,* von Prof. J. L. Brandstetter in Luzern. 380 Seiten. Preis Fr. 3.—

Fascikel II a: *Landesvermessung und Karten der Schweiz, ihrer Landstriche und Kantone.* Herausgegeben vom eidgen. topographischen Bureau. Redigirt von Prof. Dr. J. H. Graf. Bern 1892. 193 Seiten 8°. Preis Fr. 3.—

Fascikel II b: *Karten kleinerer Gebiete der Schweiz.* Herausgegeben vom eidg. topograph. Bureau. Redigirt von Prof. Dr. J. H. Graf, Bern 1892. 164 Seiten 8°. Preis Fr. 3.—

Fascikel II c: *Stadt- und Ortschaftspläne, Reliefs und Panoramen der Schweiz.* Herausgegeben vom eidg. topograph. Bureau. Redigirt von Prof. Dr. J. H. Graf. Bern 1893. 173 Seiten 8°. Preis Fr. 3.—

Fascikel II d, enthaltend: *Generalregister, Ergänzungen und Nachträge zu den Fascikeln II a—c* (Landesvermessung, Kataloge der Kartensammlungen, Karten, Reliefs und Panoramen). Im Auftrage des eidgen. topograph. Büreaus redigirt von Prof. Dr. J. H. Graf. 220 Seiten 8°. Preis Fr. 3.—

Fascikel IV b: *Die Fauna der italienischen Schweiz.* Redigirt von Prof. Dr. A. Lenticchia. Como 1894. 19 Seiten 8°. Preis 50 Cts.

Fascikel IV 6: *Fauna helvetica.* Heft 4: Vögel. Zusammengestellt von Prof. Dr. Theophil Studer. Bern 1895. 57 Seiten 8°. Preis Fr. 1.—

(Fortsetzung auf Seite 3 des Umschlages.)

Durch jede Buchhandlung zu beziehen.

Mittheilungen

der

Naturforschenden Gesellschaft

in Bern

aus dem Jahre 1896.

Nr. 1399-1435.

Redaktion: J. H. Graf.

BERN.
Druck und Verlag von K. J. Wyss
1897.

Soc
N 283

Jahresbericht

über die

Thätigkeit der bernischen Naturforschenden Gesellschaft

in der Zeit vom 1. Mai 1895 bis 2. Mai 1896.

Hochgeehrte Herren!

Im abgelaufenen Vereinsjahr hielt unsere Gesellschaft die normale Zahl von 13 Sitzungen ab, 10 davon im Saale des Hotels Storchen, je eine im zoologischen und pharmaceutischen Institut und eine in Langnau. An diesen Sitzungen betheiligten sich mit Vorträgen, kleineren Mittheilungen oder Demonstrationen die folgenden 16 Herren:

Herr Baltzer	1 Vortrag	1 Demonstration
„ E. Baumberger	1 „	
„ Brückner	1 „	
„ Coaz		1 „
„ E. Fischer	2 Vorträge	1 „
„ J. H. Graf	1 Vortrag	
„ P. Gruner	1 „	
„ G. Huber	2 Vorträge	
„ A. Kaufmann		1 „
„ Kissling	1 Vortrag	1 „
„ A. Rossel	1 „	1 „
„ Schaffer		1 „
„ Th. Steck		2 Demonstrationen
„ Th. Studer	2 Vorträge	3 „
„ Thiessing		2 „
„ Tschirch	2 „	

Allen Vortragenden sei an dieser Stelle der Dank der Gesellschaft ausgesprochen.

Am 15. Mai fand eine botanisch-geologische Exkursion statt in die Moränenlandschaft von Amsoldingen und Thierachern, zum erratischen Block bei Gurzelen, zum Geistsee und Dittingersee nach Thun. Die Betheiligung war wegen ungünstiger Witterung eine schwache.

Die auswärtige Sitzung wurde am 16. Juni gemeinsam mit der Naturforschenden Gesellschaft Solothurn unter zahlreicher Betheiligung im Löwen in Langnau abgehalten. Herr Pfarrer Müller daselbst hatte in verdankenswerther Weise die Vorbereitungen übernommen. Wir Berner

stiegen in Emmenmatt aus, von wo wir, von einigen Herren aus Langnau abgeholt, einen prächtigen Spaziergang über das aussichtreiche „Bagenschwand“ nach Langnau machten. An der Sitzung, die sich auch von Seite der Langnauer einer regen Theilnahme erfreute, sprach Herr Dr. Kissling „Ueber die Herkunft der bunten Nagelfluh“; Herr Tschirch „Ueber die Anwendung der Photographie zur Lösung moderner wissenschaftlicher Streitfragen“ und Herr Enz aus Solothurn „Ueber die neueren Theorien der Hagelbildung“. Nach dem wohlgelungenen Banket im Löwen demonstrirte Hr. Prof. Rossel das neue Calciumcarbidlicht. Nachmittags fand nach einem kleinen Spaziergang noch eine gemüthliche Vereinigung im Hirschen statt. Auch diese Zusammenkunft mit unsern Solothurner Freunden, die unter Anführung des Hr. Prof. Lang zahlreich erschienen waren, verlief äusserst schön, und es ist nur zu wünschen, dass noch öfters solche gemeinsame Sitzungen stattfinden mögen.

Im verflossenen Jahr erhielt unsere Gesellschafts-Bibliothek einen werthvollen Zuwachs durch die Schenkung des Herrn Hofrath Brunner in Wien, welcher derselben einen Theil seiner Bibliothek übermachte. Das Geschenk wurde bestens verdankt.

Nach 6-jähriger Thätigkeit hat Herr Prof. Graf seine Stelle als Oberbibliothekar der schweizerischen naturforschenden Gesellschaft niedergelegt; die bernische naturforschende Gesellschaft sprach ihm den besten Dank aus für die geleisteten Dienste. Als Nachfolger wurde Herr Dr. Steck gewählt. Im letzten Sommer fand der Umzug der ganzen Bibliothek in grössere und bequemere Räume im ehemaligen historischen Museum statt.

Ueber den Lesezirkel berichtet Herr Dr. Steck:

„Der nunmehr im 7. Jahre seines Bestehens stehende Lesezirkel der naturforschenden Gesellschaft wird gegenwärtig noch von 25 Mitgliedern benützt, zeigt also einen stetigen Rückgang an Theilnehmern, der hauptsächlich bedingt wird durch die häufig auftretenden Störungen in der Cirkulation der Mappen. Unter den Austretenden befindet sich auch Herr Dr. Schlachter, einer der bisherigen Kontrolleure, der mit grosser Sorgfalt seines Amtes gewaltet hat, wofür wir ihm hier den verbindlichsten Dank abstatten. Seine Stelle wurde nicht wieder besetzt; der nachfolgende Kontrolleur, Herr Dr. von Steiger, übernahm in freundlicher Weise das Einlegen der bisher von Herrn Dr. Schlachter in Cirkulation gesetzten Zeitschriften.

Leider sah sich die Gesellschaft genöthigt, gegen einen frühern Theilnehmer am Lesezirkel, der sich geweigert hatte, die ihm vom Vorstande auferlegte sehr geringe Busse zu bezahlen, den Rechtsweg zu betreten. Infolge dessen erwachsen dem Betreffenden Kosten im Betrage von 360 Franken, die zwar die Höhe der für vorliegenden Fall nach Reglement rechtskräftig zustehenden Busse noch nicht erreichen.

Trotzdem die Zahl der Theilnehmer fast um die Hälfte geringer als die der vorhandenen Mappen, war es dem Vorstand nicht möglich jede Woche neue Mappen in Cirkulation zu setzen, da dieselben höchst unregelmässig bei ihm einliefen. Im Interesse einer regelmässigen Cirkulation ergeht daher wieder an alle Theilnehmer die dringende Bitte, die Mappen genau an dem vorgesehenen Absendungsdatum dem Nachfolger zu übermitteln und im Falle von Abwesenheit oder Erkrankung dem Vorgänger Mittheilung zu machen, mit der Bitte, ihn bei der Zu-

sendung von Mappen vorläufig zu übergehen. Die Rücksicht auf die übrigen Theilnehmer am Lesezirkel erfordert, jedes Liegenbleiben der Mappen und daraus hervorgehende Stauungen zu vermeiden.»

Der Mitgliederbestand hat sich im Berichtsjahre nicht wesentlich geändert. Ausgetreten sind 7 Mitglieder; durch den Tod verloren wir leider Herrn Bundesrath Schenk, der seit 1872 Mitglied unserer Gesellschaft gewesen war, und Herrn Prof. Rütimeyer in Basel, seit 1853 korrespondirendes Mitglied. Eingetreten sind 6 neue Mitglieder. Die Zahl der Mitglieder hat also in diesem Zeitraum um 3 abgenommen.

Für das Vereinsjahr 1896/97 wurde zum Präsidenten gewählt, Herr Prof. Dr. Th. Studer, zum Vicepräsidenten Herr Prof. Dr. Drechsel.

Der abtretende Präsident:

G. Huber.

Sitzungs-Berichte.

897. Sitzung vom 11. Januar 1896.

Abends 7½ Uhr im Storchen.

Vorsitzender: Herr G. Huber. Anwesend: 16 Mitglieder und 4 Gäste.

1. Herr J. H. Graf: **L. Schläfli** (siehe die Abhandlungen für das Jal 1895).
2. Es wird mitgetheilt, dass ein Mitglied des Lesezirkels, das sich ar Nachlässigkeiten in der Spedition der Mappen zu Schulden komm liess, sich aber weigerte, eine ausgesprochene, kleine Busse zu bezahl dem Richter verzeigt und von diesem zu 250 Fr. Busse und 100 F Entschädigung verurtheilt wurde.

898. Sitzung vom 25. Januar 1896.

Abends 7½ Uhr im Storchen.

Vorsitzender: Herr G. Huber. Anwesend: 17 Mitglieder und 4 Gäste.

1. Herr G. Huber spricht über **die Planetoiden.**
2. Herr Th. Steck legt die neueste Nummer der „Nature" vor, welc einige Reproduktionen von Photographien, durch X-Strahlen erzeug enthält.

899. Sitzung vom 8. Februar 1896.

Abends 7½ Uhr im Storchen.

Vorsitzender: Herr G. Huber. Anwesend: 31 Mitglieder und Gäste.

1. P. Gruner: **Kathodenstrahlen und X-Strahlen.** Der Vortragen gibt zunächst einen summarischen Ueberblick über die ältern Untersuchung der elektrischen Entladungen in verdünnten Gasen. Daran schliesst si eine kurze Betrachtung der theoretischen Erklärungen, insbesondere d Convectionstheorie, der Dissociationstheorie und der Aethertheorie v E. Wiedemann, welch' letztere als die einzige noch haltbare Theo hingestellt wird. Sodann bespricht der Vortragende eingehend die Unte suchungen von Lénard über Kathodenstrahlen. Eine Zusammenstellu der Eigenschaften dieser Strahlen zeigt eine grosse Analogie mit d gewöhnlichen Lichtstrahlen — nur das Verhalten im magnetischen F ist verschieden.

Ebenso werden die Kathodenstrahlen mit den in neuester Zeit v Röntgen in Würzburg entdeckten X-Strahlen verglichen. Diese V gleichung ergibt nur zwei wesentliche Unterschiede: die verschiede Absorptionsfähigkeit und das verschiedene Verhalten im magnetisch Feld. — Es wird aber darauf hingewiesen, dass diese Differenzen qua titativer Natur sind. Lénard hat sehr verschiedene Kathodenstrahl gefunden; die neuen Versuche zeigen, dass es auch sehr verschiedenarti

X-Strahlen gibt, so dass noch ein Uebergang von den einen zu den andern gefunden werden könnte. Zudem ist die magnetische Ablenkbarkeit der Kathodenstrahlen nur in verdünnten Gasen, nicht aber in gewöhnlicher Luft nachgewiesen worden. Endlich hebt der Vortragende hervor, dass jedenfalls bei allen diesen Versuchen das Entstehen sekundärer Kathoden an dem Apparat von Wichtigkeit sei, und dass diese sekundären Kathoden sich bei Lénard jedenfalls ganz anders bilden als bei Röntgen.

Der Vortragende sieht in den Kathodenstrahlen sowohl wie auch in den X-Strahlen eine ausserordentlich feine transversale Aetherschwingung, welche wegen ihrer Feinheit von den Molekülen der umgebenden Gase nicht modificirt und desshalb weder reflektirt, noch gebrochen, noch polarisirt werden kann.

2. Herr A. Tschirch berichtet über seine neuen chemischen und spektralanalytischen **Untersuchungen über das Chlorophyll und andere Pflanzenfarbstoffe, sowie über die Beziehungen des Chlorophylls zum Blutfarbstoff.** Die Untersuchungen wurden, soweit sie spektralanalytische sind, mit dem Quarzspektrographen ausgeführt und haben zu folgenden Resultaten geführt.

1. Der gelbe Farbstoff der Blätter (Xanthophyll der Autoren) und wahrscheinlich auch der der Blüthen (Anthoxanthin der Autoren) ist ein Mischfarbstoff; er besteht aus Xanthocoratin, einem Farbstoffe, dessen Lösungen 3 Absorptions-Bänder im Violet zeigen und dem Xanthophyll (im engeren Sinne), dessen Lösungen keine Bänder zeigen und nur Ultraviolet absorbieren (Endabsorption). Beide Farbstoffe wurden krystallinisch erhalten. Sie sind stickstofffrei.

2. Das grüne Chlorophyll der lebenden Blätter ist sehr wahrscheinlich eine gepaarte Verbindung von der Phyllocyaninsäure, die der Vortragende zuerst dargestellt und beschrieben (1884), und einem noch unbekannten aber farblosen Paarling. Die krystallisierte Phyllocyaninsäure enthält Stickstoff und zwar den Pyrrolring, denn sie liefert mit Zinkstaub erhitzt Pyrrol. Sie entspricht der Formel $C_{34}H_{38}N_2O_4$. Da die Pflanze sehr haushälterisch mit ihrem Stickstoffmateriale umgeht, so schafft sie im Herbst vor dem Blattfall zunächst das Chorophyll aus den Blättern. Das stickstofffreie Xanthophyll und Xanthocarotin bleiben im Blatte (Grund der herbstlichen Gelbfärbung).

3. Die Phyllocyaninsäure sowohl wie ihre Verbindungen, von denen der Vortragende bereits früher die Zink- und Kupferverbindung beschrieben hat, geben ein Absorptions-Spektrum (vgl. Tschirch, Wiedemann's Annalen der Physik 1884), das im sichtbaren Teile des Spektrums nur in 2 Bändern (von 5) mit dem Sauerstoff-Hämoglobin des Blutes übereinstimmt. Bei Untersuchungen mit dem Quarzspektrographen aber lassen sie im Violet ein neues Band erkennen, welches vollständig mit dem von Soret entdeckten Hauptblutbande übereinstimmt.

4. Das neue Chlorophyllband ist vom Vortragenden in allen daraufhin untersuchten Chlorophyllkörpern aufgefunden worden. Es teilt mit dem Blutbande, welches, wie besonders Gamgee zeigte, gleichfalls keinem der Blutfarbstoffe (Hämoglobin, Oxyhämoglobin, Hämin, Hämatin, Methämoglobin) fehlt, die Eigenschaft, in seiner Lage eine viel grössere Beständigkeit zu zeigen als alle andern Bänder, gleichviel welchen chemischen Eingriffen die Substanzen unterworfen werden. Seine Lage schwankt (wie beim Blutbande) nur zwischen G und M Fraunhofer.

5. Während, abgesehen von diesem Bande, zwischen den Blutfarbstoffen einerseits und den Chlorophyllfarbstoffen andererseits eine ziemlich grosse spektralanalytische Verschiedenheit herrscht, besitzt ein Derivat des Chlorophylls, die von dem Vortragenden aus Chlorophyll dargestellte in rotgelben Kristallen kristallisirende rote Phyllopurpurinsäure (Phylloporphyrin Schunck's) und das von Nencki aus Blut dargestellte rote Hämatoporphyrin im Wesentlichen dasselbe Spektrum, auch im sichtbaren Spektralbezirk. Beide zeigen ferner auch das Soret'sche Blutband. Die roten Lösungen beider fluoreszieren rot.

6. Da wir nun annehmen, dass die Absorptionen durch Schwingungen von bestimmten Atomkomplexen hervorgerufen werden, müssen wir schliessen, dass Körper mit gleichen Absorptionserscheinungen den gleichen oder die gleichen Atomkomplexe enthalten. Wir sind demnach vollständig berechtigt, anzunehmen, dass in den Körpern der Chlorophyllgruppe und den Blutfarbstoffen ein und derselbe Atomkomplex steckt, und dass dieser Atomkomplex eine viel grössere Beständigkeit besitzt als jene Komplexe, die die Absorptionen im Gelb und Grün hervorrufen, also wohl dem Kern angehört. Was für ein Atomkomplex ist das aber?

7. Da alle daraufhin untersuchten Körper beider Gruppen bei der Zinkstaubdestillation Pyrrol lieferten (vom Vortragenden für Phyllocyaninsäure, Chlorophyllinsäure und Verbindungen, sowie für das krist. Hämin, Hämatin, krist. Hämoglobin, Methämoglobin [und auch das Bilirubin], von Schunck und Marchlewski für andere Derivate des Chlorophylls nachgewiesen), so steckt offenbar sowohl im Blute wie im Chlorophyll der Pyrrolring. Ob dies aber die Atomgruppe ist, deren Schwingungen die beiden gemeinsamen Absorptionen zwischen G und M Fraunhofer hervorrufen, müssen weitere Untersuchungen lehren.

8. Immerhin bleibt schon allein der Nachweis interessant, dass Blut und Chlorophyll so nahe verwandt mit einander sind, — die beiden für die Biologie wichtigsten Farbstoffe: das Chlorophyll, welches die Kohlensäurezersetzung und Sauerstoffabspaltung bei den Pflanzen vermittelt, und das Blut, welches den Sauerstoff aufnimmt und Kohlensäure wenigstens abzuspalten vermag.

9. Die obigen Resultate sind in wesentlichen Teilen erzielt worden durch Kombination chemischer und spektralanalytischer Untersuchungsmethoden mit der Photographie. Die Spektren der reinen Körper wurden mit dem Quarzspektrographen photographiert.

Der Vortrag wurde durch Vorlage der photographischen Spektralaufnahmen, sowie der besprochenen Substanzen illustriert.

Zum Schluss dankt der Vortragende Herrn Buss für die freundliche Unterstützung bei der Aufnahme der Photographien.

900. Sitzung vom 29. Februar 1896.

Abends 7½ Uhr im Storchen.

Vorsitzender: Herr G. Huber. Anwesend: 12 Mitglieder und 1 Gast.

1. Herr Ed. Fischer spricht **über die Trüffeln, mit Berücksichtigung schweizerischer Vorkommnisse:**

Der Vortragende gibt zunächst eine kurze historische Uebersicht der Ansichten, welche im Laufe der Zeit über die Trüffeln geäussert worden sind, von den z. Th. sehr sonderbaren Vorstellungen des Alterthums und des Mittelalters bis zu den klassischen Untersuchungen von Vittadini und Tulasne. Nach einigen Bemerkungen über die Entwicklung und Lebensweise der Tuberaceen werden sodann ihre wichtigsten Repräsentanten und ihre Verwandtschaftsverhältnisse besprochen. Mit diesem letzteren Punkte hatte sich der Vortragende eingehend beschäftigt bei Gelegenheit der Bearbeitung der Tuberaceen für die zweite Auflage von Rabenhorst's Kryptogamenflora Deutschlands, Oesterreichs und der Schweiz. Die Tuberaceen sind eine Convergenzgruppe, in der sich besonders zwei von verschiedenen Ausgangspunkten abgehende Reihen auseinanderhalten lassen. Die erste derselben leitet von gymnocarpen Ascomyceten durch Genea und Hydnotrya, zu Pachyphloeus und Tuber über; die zweite umfasst unter Anderem die Gattungen Terfezia, Choiromyces, Elaphomyces und schliesst sich den Perisporiaceen an, zu denen der Uebergang u. a. durch Onygena und die merkwürdige, von Massee seinerzeit fäschlich als Gastrolichen beschriebene Trichocoma vermittelt wird. Eine dritte Reihe, mit Balsamia als Vertreter, wurde im Vortrage übergangen.

In der Schweiz sind bisher folgende Gattungen nachgewiesen: Tuber, nach Jaczewski mit 8—9 Arten, darunter wohl am wichtigsten T. æstivum, das besonders im Jura häufig scheint, Choiromyces mit C. maeandriformis, im Jura z. B. bei Locle, auch bei Bern beobachtet, Elaphomyces und Onygena. Von letzterer kennen wir aus der Schweiz O. equina auf faulenden Pferdehufen, O. corvina vom Vortragenden kürzlich auf Vogelfedern im Dählhölzli gefunden und O. arietina Ed. Fischer nova spec. von Herrn J. Amann bei Davos auf den Hörnern eines alten Widders gesammelt.

2. Herr Thiessing macht einige Bemerkungen **über die Entdeckung eines neolitischen Gräberfeldes bei Worms.**

901. Sitzung vom 14. März 1896.

Abends 7½ Uhr im Storchen.

Vorsitzender: Herr G. Huber. Anwesend: 13 Mitglieder.

1. Herr E. Baumberger in Twann spricht **über die Entstehung der Hauterivientaschen:**

An der Hand grösserer Profile werden zuerst die tektonischen Verhältnisse von oberem Jura und unterer Kreide zwischen St. Immerthal und Bielersee vorgeführt und wird besonders auf die für die Südflanke der Seekette so charakteristische Erscheinung der Fauteuilbildung (épaulement) aufmerksam gemacht. Die Jura- und Kreideschichten steigen steil aus der schmalen Alluvialzone längs des Sees auf (60—70°), bilden dann ein stark gebogenes Knie, um in eine schwache Depression oder ein wenig geneigtes Plateau überzugehen (30—40°) und dann in der Seekette wieder steil sich aufzurichten (scharf zu beobachten auf der Strecke Kleintwann bis Pulverstampfe in der Twannbachschlucht). Nach einem stratigraphischen Ueberblick über die Kreidebildungen am Bielersee (Valangien, Hauterivien) wird auf die interessante Erscheinung der Hauterivientaschen hingewiesen, darin bestehend, dass die jüngern, normal höher gelegenen Hauterivien-

mergel mit Knollen aus dem darüber gelegenen Mergelkalk und eckigen Blöcken des obern Valangien (Calc. roux, Limonit) Höhlungen im untern Valangien, den Schichtflächen folgend, ausfüllen. Es wird hierauf, durch ein detaillirtes stratigraphisches Profil erläutert, im untern Valangien folgende Schichtenreihe nachgewiesen (von unten nach oben):

1. Alternirende Kalk- und Mergelschichten mit Fossilien, direkt über dem Purbeck 4 m.
2. Untere Kalkzone (Marbre bâtard) 8 m.
3. Körnige Mergel und Mergelkalk mit reicher Fauna 4 m.
4. Obere Kalkzone (Marbre bâtard) mit 4 konstant auftretenden Niveaux.
   a. Weisslicher, kompakter, wenig geschichteter Kalk 8 m.
   b. Gut geschichteter, kompakter, rostgelb gefärbter Kalk 12 m.
   c. Mergelkalk und Mergel mit Fossilien (Bipschal) 1 m.
   d. Weissliche, kompakte, ungeschichtete Kalke 4 m.

Die meisten Hauterivientaschen finden sich in der obern Kalkzone, Niveau b.

Die Hauterivienmergel bilden die Hauptmasse des Füllungsmaterials. Es wird betont, dass dieselben ganz normal aussehen, keine Spur von Wassertransport aufweisen, dass an vielen Stellen Keilstruktur (Harnische) sich konstatiren lässt und dass sie am Kontakt mit der Decke (Marbre bâtard) und rings um die in den Mergeln zertreut liegenden Blöcke des obern Valangien blättrig bis schieferig auftreten. Sie scheinen in alle Unebenheiten des einschliessenden Gesteins hineingepresst, indess der Marbre bâtard hie und da zackenartig in die Mergel eindringt. Letztere enthalten die charakteristischen Fossilien der Hauterivestufe.

Der Vortragende bespricht nun die verschiedenen Hypothesen früherer Beobachter, die Entstehung der Hauterivientaschen betreffend, und er kommt in Uebereinstimmung mit Schardt zu dem Schlusse, dass deren Bildung als das Resultat der Faltenbildung zu betrachten sei und dass sie von oben her auf mechanischem Wege durch Abrutschen der höher gelegenen Hauterivienmergel sich gefüllt haben. Hergang:

1. In den Partien intensiver Biegung der Schichten (nur in der Region der knieförmigen Umbiegung sind die Taschen zu beobachten) entstehen bei der Faltenbildung Risse in der Richtung des Streichens; die unter dem Bruch liegenden Schichten klaffen infolge der im Gewölbe herrschenden Spannung nach aussen.

2. Schollen der Hauterivienmergel und mancherorts auch Gesteine des untern, aber namentlich des obern Valangien rutschen zwischen die klaffenden Kalkschichten.

3. Für die Taschen, in denen das Füllungsmaterial rings von Marbre bâtard eingeschlossen, ist nachgewiesen, dass die als Decke bezeichneten Schichten sich nach der Füllung der Taschen über die Mergel geschoben, und letztere zusammengepresst, gestaut haben. Diese Bewegung der Decke ist nachgewiesen durch deutliche Rutschflächen und Breccienbildung in der Verlängerung der Taschen. Interessante Dislokationserscheinungen, die sich indes nicht über Hauterivientaschen zu erstrecken scheinen, sind zu beobachten westlich von Tüscherz und an der „Hohen Fluh" bei Bipschal.

2. Herr Thiessing macht aufmerksam auf **neue Gräberfunde auf dem „Wyler" bei Bern.**

902. Sitzung vom 2. Mai 1896.

Abends 7½ Uhr im Storchen.

Vorsitzender: Herr G. Huber. Anwesend: 19 Mitglieder.

1. Wahlen: Zum Präsidenten für das Vereinsjahr 1896/97 wird gewählt: Herr Prof. Dr. Th. Studer, zum Vicepräsidenten: Herr Prof. Dr. Drechsel.

2. Herr A. Baltzer macht Mittheilung über ein von ihm als **interglacial erwiesenes Profil bei Pianico** in der Nähe des Iseosees. Die interglacialen Schichten sind von Grundmoräne über- und unterlagert. In ihnen kommt eine von Prof. Ed. Fischer untersuchte Flora vor, die auf ein etwas wärmeres Klima hinweist und durch pontische Formen (Rhododendron ponticum, Buxus sempervirens etc.) ausgezeichnet ist. Denselben pontischen Charakter trägt aber auch die Flora von Innsbruck und die früher vom Vortragenden in den Blättermergeln von Lugano aufgefundene Flora. Dadurch wird die von Wettstein'sche Ansicht bestätigt, wonach ein zusammenhängender Florengürtel mit pontischem Gepräge vom schwarzen Meer durch Mitteleuropa bis Spanien sich erstreckte. Nur lässt der Vortragende diese Verhältnisse schon in der jüngeren Interglacialzeit und nicht erst in der Postglacialzeit beginnen.

Die Arbeit erscheint im Neuen Jahrbuch für Mineralogie, Geologie etc., Jahrgang 1896, Bd. I.

3. Herr Th. Studer weist **einen Zahn von Hyæmoschus** aus dem Muschelsandstein von Madiswyl vor.

4. Herr E. Kissling demonstrirt von der gleichen Lokalität einige gut erhaltene Exemplare der **Scutella helvetica**.

Ferner macht derselbe wieder aufmerksam auf den schönen **Fundort von fossilen Pflanzen an der Losenegg** im Eriz.

5. Herr Th. Studer spricht **über Hörner einer Antilope aus dem Ober-Miocän** von Locle.

903. Sitzung vom 30. Mai 1896.

Abends 7½ Uhr im Storchen.

Vorsitzender: Herr Th. Studer. Anwesend: 18 Mitglieder und 2 Gäste.

1. Uebernahme des Jahresfestes der schweiz. naturf. Gesellschaft.

Es wird beschlossen, für das Jahr 1897 auf eine Bewerbung zu verzichten, dagegen für 1898 das Fest nach Bern zu verlangen.

2. Auf den 6. Juni wird eine Exkursion nach Maikirch und über den Schüpberg nach Schüpfen angeordnet.

3. Herr J. H. Graf spricht **über die schweizerische Landesvermessung von 1832—1864.**

904. Sitzung, Sonntag den 28. Juni 1896 in Kirchberg,

gemeinsam mit der naturforschenden Gesellschaft von Solothurn.

Vorsitzender: Herr F. Lang.

1. Herr Ed. Drechsel: **Ueber das Jod und seine Bedeutung für den thierischen Organismus.**

2. Herr Walker, Spitalarzt in Solothurn: **Louis Pasteur und seine Forschungen.**

3. Herr A. Rossel: **Ueber die Wirkung der Phosphorsäure als Düngmittel.**
4. Herr J. H. Graf: **Ueber die Ueberschwemmungen der Emme und alte und neue Flusskorrektionen.**

905. Sitzung vom 31. Oktober 1896.

Abends 7½ Uhr im Storchen.

Vorsitzender: Herr Th. Studer. Anwesend: 24 Mitglieder und 3 Gäste.

1. Herr Professor Lang in Solothurn dankt für die Gratulation zu seinem 50-jährigen Amtsjubiläum von Seiten der bernischen naturforschenden Gesellschaft.
2. Herr St. von Kostanecki spricht **über gelbe Pflanzenfarbstoffe.**
3. Herr Ed. Fischer weist **ein Stück eines Psaronius** vor.

906. Sitzung vom 14. November 1896.

Abends 8 Uhr im Storchen.

Vorsitzender: Herr Th. Studer. Anwesend: 20 Mitglieder und 2 Gäste.

1. Herr A. Tschirch: **Die chemische Industrie auf den Ausstellungen in Genf und Berlin.**

907. Sitzung vom 28. November 1896.

Abends 8 Uhr im Storchen.

Vorsitzender: Herr Th. Studer. Anwesend: 23 Mitglieder und 3 Gäste.

1. Herr A. Baltzer: **Der alte Rhonegletscher und sein Verhältniss zum Aargletscher.**

908. Sitzung vom 12. Dezember 1896.

Abends 8 Uhr im zoolog. Institut.

Vorsitzender: Herr Th. Studer. Anwesend: 27 Mitglieder und 3 Gäste.

1. Herr Ed. Brückner: **Projektionen von Bildern** von Brandungswirkungen an der Küste der Insel Wight, von den Veränderungen des Rhonegletschers und von Gipfelformen in den kristallinen Schiefern.

2. Herr Ed. Fischer übergibt der Gesellschaft **für ihre Bibliothek** seine Bearbeitung der **Tuberaceen in Rabenhorst's Kryptogamenflora** Deutschlands, Oesterreichs und der Schweiz. Anschliessend daran hebt er den Parallelismus hervor, welcher zwischen den Tuberaceen und Gastromyceten besteht; wir haben es hier zu thun mit zwei Reihen, welche von getrennten Ausgangspunkten ausgehend sich unter dem Einflusse gleicher Bildungsgesetze in gleicher Richtung weiter entwickelt haben. (Näheres hierüber siehe Ed. Fischer: Ueber den Parallelismus der Tuberaceen und Gastromyceten, Bericht der deutschen botanischen Gesellschaft, 1896, p. 301 ff.)

3. Herr Oberfeldarzt Ziegler erwähnt **hufartige Spuren auf Sandsteinplatten** aus dem Rheinthal.
4. Herr Steck demonstrirt **Neuropteren** aus der entomologischen Sammlung des naturhistorischen Museums.
5. Herr E. Kissling weist **eigenthümliche Lehmkugeln** aus dem Sammelkanal des Lammbachs vor.

Verzeichnis der Mitglieder

der

Bernischen Naturforschenden Gesellschaft.

(Am 31. Dezember 1896.)

Die mit * bezeichneten Mitglieder wurden im Jahre 1896 neu aufgenommen.

Vorstand.

Prof. Dr. *Th. Studer,* Präsident vom 1. Mai 1896 bis 30. April 1897.
Prof. Dr. *Drechsel,* Vice-Präsident.
A. Studer, jun., Apotheker, Kassier seit 1875.
Dr. *E. Kissling,* Sekretär seit 1892, Unterbibliothekar seit 1888.
Prof. Dr. *J. H. Graf,* Redaktor der Mitteilungen seit 1883.
Dr. *Th. Steck,* Oberbibliothekar und Geschäftsführer des Lesezirkels.

Mitglieder.

1.	*Anderegg,* Ernst, Dr. phil. und Gymnasiallehrer, Bern	1891
2.	*Andreæ,* Philipp, Apotheker, Bern	1883
3.	*Badertscher,* Dr. A., Sekundarlehrer, Bern	1888
4.	*Balmer,* Dr. Hans, Bern	1886
5.	*Baltzer,* Dr. A., Professor der Mineralogie und Geologie, Bern	1884
6.	*Baumberger,* Ernst, Sekundarlehrer in Basel	1890
7.	*Beck,* Dr. Gottl., Lehrer des Freien Gymnasiums, Bern	1876
8.	*v. Benoit,* Dr. jur. G., Bern	1872
9.	*Benteli,* A., Rektor und Docent, Bern	1869
10.	*Benteli,* A., V. D. M., Bern	1891
11.	*Berdez,* H., Professor an der Tierarzneischule, Bern	1879
12.	*Berlinerblau,* Dr. J., Fabrikdirekt. in Sosnowice (Russ.-Polen)	1887
13.	*Bourgeois,* Dr. med. E., Arzt, Bern	1872
14.	*Brückner,* Dr. Ed., Prof. der Geographie, Bern	1888
15.	*Brunner,* C., Dr. phil., Trautsohngasse 6, Wien	1846
16.	*Büchi,* Fr., Optiker, Bern	1874
17.	*Burri,* Dr. phil., Prosektor	1895
18.	*v. Büren,* Eug., allié von Salis, Sachwalter, Bern	1877
19.	*Cherbuliez,* Dr. Direktor, Mülhausen	1861
20.	*Coaz,* eidgenössischer Oberforstinspektor, Bern	1875
21.	*Conrad,* Dr. Fr., Arzt in Bern	1872
22.	*Cramer,* Gottl., Arzt in Biel	1854

23. **Crelier*, Dr., Sekundarlehrer in St. Immer 1896
24. *Dick*, Dr. Rud., Arzt in Bern 1876
25. *Drechsel*, Prof. Dr., Bern 1892
26. *Droz*, Arnold, Kantonsschullehrer in Pruntrut . . . 1890
27. *Dubois*, Dr. med., Arzt, Privatdocent, Bern . . . 1884
28. *Dumont*, Dr. med. F., Arzt, Privatdocent, Bern . . . 1890
29. *Dutoit*, Dr. med., Arzt in Bern 1867
30. *Eggenberger*, J., Dr. phil., eidg. Beamter, Könitzstr. 32, Bern 1892
31. *Engelmann*, Dr., Apotheker in Basel 1874
32. *v. Fellenberg*, Dr. phil. E., Bergingenieur, Bern . . . 1861
33. *Fischer*, Dr. phil. Ed., Professor der Botanik, Bern . . 1885
34. *Fischer*, Dr. L., Professor der Botanik, Bern . . . 1852
35. *Frank*, L., Assistent am chem. Laboratorium, Bern . . 1895
36. *v. Freudenreich*, Dr. E., Bern 1885
37. *Fueter-Schnell*, Apotheker, Obstberg, Bern 1894
38. *de Giacomi*, J., Dr. med., Arzt und Privatdocent, Bern . 1889
39. *Girard*, Prof. Dr. med., Arzt in Bern 1876
40. *Gosset*, Philipp, Ingenieur, Wabern bei Bern . . . 1865
41. *Graf*, Dr. J. H., Professor der Mathematik, Bern . . 1874
42. *Gressly*, Alb., Oberst, Maschinen-Ingenieur, Bern . . 1872
43. *Grimm*, J., Präparator, Bern 1876
44. *Gruner*, Dr. Paul, Gymnasiallehrer und Docent, Bern . 1892
45. *Guillebeau*, Professor Dr., Bern 1878
46. *Haaf*, C., Droguist, Bern 1857
47. *Haas*, Dr. med. Sigismund, Arzt in Muri b. Bern . . 1890
48. *Hafner*, René, Apotheker in Biel 1891
49. *Hasler*, Dr. phil. G., Dir. d. Telegraphen-Werkstätte, Bern 1861
50. *Held*, Leon, Ingenieur, Bern 1879
51. *Hess*, E., Professor an der Tierarzneischule, Bern . . 1883
52. *Holzer*, Ferd., Lehrer in Oberwyl bei Büren . . . 1890
53. *Huber*, Dr. G., Professor der Mathematik, Bern . . . 1888
54. *Huber*, Rud., Dr. phil., Gymnasiallehrer, Bern . . . 1891
55. *Jenner*, E. Entomolog, hist. Museum, Bern 1870
56. *Jonquière*, Dr., Professor der Medicin, Bern . . . 1853
57. *Jonquière*, Dr. med. Georg, Arzt in Bern 1884
58. *Käch*, P., Sekundarlehrer in Bern 1880
59. *Kaufmann*, Alfr., Dr. phil. und Gymnasiallehrer, Bern . 1886
60. *Kesselring*, H., Lehrer an der Sekundarschule in Bern . 1870
61. *Kissling*, Dr. E., Sekundarlehrer und Privatdocent, Bern . 1888
62. *Kobi*, Dr., Rektor der Kantonsschule Pruntrut . . . 1878
63. *Kocher*, Dr., Professor der Chirurgie, Bern . . . 1872
64. *Koller*, G., Ingenieur, Bern 1872
65. **von Kostanecki*, Dr., Prof. der Chemie, Bern . . . 1896
66. *König*, Emil, Dr. phil., Gymnasiallehrer, Bern . . . 1893
67. *Körber*, H., Buchhändler in Bern 1872
68. *Kraft*, Alex., Besitzer des Bernerhofs, Bern . . . 1872
69. *Krebs*, A., Seminarlehrer in Bern 1888
70. *Kronecker*, Dr. H., Professor der Physiologie, Bern . . 1884
71. *Kummer*, Dr. med. J., Arzt in Bern 1890
72. *Kürsteiner*, Dr. med., Bern 1895
73. *Lanz*, Dr. Em., Arzt in Biel 1876
74. *Leist*, Dr. K., Lehrer an der Sekundarschule, Bern . . 1888

indt, Dr. med. Wilh., Arzt in Bern	1854
indt, Dr. med., W. jun., Arzt und Docent, Bern	1888
Lochbrunner, Th., Uhrenmacher in Bern	1896
ory, C. L., Rentier, Münsingen	1894
üscher, E., Dr. med., Bern	1895
ütschg, J., Waisenvater, Bern	1872
larckwald, Dr. Max, Bonn a. Rh.	1889
larti, Christian, Sekundarlehrer in Nidau	1889
larti, Lehrer a. d. N. Mädchenschule, Bern	1892
loser, Dr. phil. Ch., Privatdocent, Bern	1884
lüller, Emil, Apotheker in Bern	1882
lüller, Professor Dr., P., in Bern	1888
lüller, Max, Dr. med., Bern	1893
lünger, F., Dr. phil., Sekundarlehrer, Basel	1892
Mutach, Alfr., von Riedburg, Bern	1865
lützenberg, Dr. med. Ernst, Spiez	1885
anni, Dr. Wilh., Arzt in Mühleberg	1890
icolet, L., Pharmacien, St. Imier	1892
fister, J. H., Mechaniker in Bern	1871
flüger, Dr. Professor, Bern	1889
ulrer, E., Apotheker in Interlaken	1890
ulrer, G., Vorsteher in Hindelbank	1891
's, F., Lehrer der Physik am städt. Gymnasium	1869
ssel, A. Dr., Professor der Chemie, Luterbach	1893
othen, Dr. phil., internationaler Telegraphendirektor, Bern	1872
othenbach, Alfr., Gasdirektor in Bern	1872
Rothenbühler, Sekundarlehrer, Bern	1896
ubeli, Dr. O., Professor an der Tierarzneischule, Bern	1892
uhli, Professor Dr. H., in Bern	1875
chällibaum, Dr. H., Arzt in Sils-Maria	1889
chaffer, Dr., Kantonschemiker und Docent, Bern	1878
chlachter, Dr., Lehrer an der Lerberschule, Bern	1884
chmid, Dr. W., Major im Generalstab, Bern	1891
chmidt, F. W., Dr. phil., Assistent am chem. Laboratorium, Bern	1893
chönenberger, eidgen. Forstadjunkt, Bern	1894
chuppli, M., Direktor der N. Mädchenschule, Hilterfingen	1870
chütz, Assistent des Kantonschemikers, Bern	1896
hcab, Alfr., Banquier in Bern	1873
hcab, Sam., Dr. med., Bern	1885
dler, Dr., Professor der Astronomie, Bern	1872
ähli, F., Dr. phil., Gymnasiallehrer in Burgdorf	1893
eck, Th., Dr. phil., Conservator am Naturhist. Museum, Bern	1878
oss, Dr. med. Max, Arzt in Bern	1883
rasser, Dr. Hans, Professor der Anatomie, Bern	1872
uder, Bernhard, sen., Bern	1844
uder, Bernhard, Apotheker, Bern	1871
uder, Dr. Theophil, Professor der Zoologie, Bern	1868
uder, Wilhelm, Apotheker in Bern	1877
mbor, J., Dr. phil., Chem. Laboratorium, Bern	1894
nner, G. H., Apotheker in Bern	1882
rel, Professor Dr. E., Bern	1892

126. *Thiessing,* Dr., Redaktor, Bern . . . . . .
127. *v. Tscharner,* Dr. phil. L., Oberstlt., Bern . . .
128. *v. Tscharner-de Lessert,* Oberstlieutenant, Bern . .
129. *Tschirch,* Dr. A., Professor der Pharmakognosie in Bern .
130. *Valentin,* Professor Dr. med. Ad., Arzt in Bern . .
131. *Volz,* Wilhelm, Apotheker in Bern . . . . . .
132. *Wäber-Lindt,* A., Bern . . . . . .
133. *Wagner,* Karl, Dr. phil., Enge-Zürich . . . . .
134. *Walthard,* Max, Dr. med., Arzt in Bern . . . . .
135. *Wander,* Dr. phil., Chemiker, Bern . . . . . .
136. *Wanzenried,* Sekundarlehrer in Grosshöchstetten . .
137. *v. Wattenwyl-v. Wattenwyl,* Jean, Grossrat, Bern . .
138. *Weingart,* J., Schuldirektor in Bern . . . . . .
139. *Wüthrich,* Dr. phil. E., Direktor der Molkereischule Rütti .
140. *Wyss,* Dr. G., Buchdrucker in Bern . . . . . .
141. *Wyttenbach-v. Fischer,* Dr., Arzt in Bern . . . . .
142. *de Zehender,* Marq., Ingenieur, Bern . . . . . .
143. *Zeller,* R., Dr. phil., Geolog, Bern . . . . . .
144. *Ziegler,* Dr. med. A., eidgen. Oberfeldarzt, Bern . .
145. *Zumstein,* Dr. med. J. J., in Marburg . . . . .
146. *Zwicky,* Lehrer am städt. Gymnasium, Bern . . . .

Im Jahre 1896 ausgetreten:

v. Bonstetten, Aug., Dr. phil., Bern . . . . . .
Frey, Rob., Dr., Arzt in Rubigen . . . . . .
Gerber, Paul, Dr., Apotheker, Bern . . . . . .
Guillaume, Dr. L., Direkt. des eidgen. statist. Bureaus, Bern .
Jonquière, Alf., Dr. phil. Bern . . . . . .
König, Emil, Dr., Arzt, Bern . . . . . .
Langhans, Fr., Lehrer am städt. Progymnasium, Bern . .
Lesser, Ed., Dr. Prof. der Dermatologie, Bern . . . .
Prêtre, Henri, Progymnasiallehrer in Biel . . . . .
Tschumi, Dr., Lebensmittel-Inspektor, Bern . . . . .
Walser, H., Gymnasiallehrer, Bern . . . . . .

Im Jahre 1896 verstorben:

Niehans-Boret, Dr. med., Arzt in Bern . . . . . .
Pulver, Fried., Apotheker in Bern . . . . . .
Schärer, Dr. med. Ernst, Bern . . . . . .

Korrespondierende Mitglieder:

1. *Biermer,* Dr. Professor in Breslau 1861
2. *Flesch,* Dr. M., Arzt in Frankfurt 1882
3. *Gasser,* Dr. E., Professor der Anatomie in Marburg . . 1884
4. *Graf,* Lehrer, in St. Gallen 1858
5. *Grützner,* Dr. A., Prof. in Tübingen 1881
6. *Hiepe,* Dr. Wilhelm, in Birmingham 1874
7. *Imfeld,* Xaver, Topograph in Hottingen 1880
8. *Krebs,* Gymnasiallehrer in Winterthur. 1864
9. *Landolf,* Dr., in Chili 1881
10. *Lang,* Dr. A., Professor in Zürich 1876
11. *Leonhard,* Dr., Veterinär in Frankfurt 1870
12. *Lichtheim,* Professor in Königsberg 1881
13. *Metzdorf,* Dr. Professor der Vet.-Sch. in Proskau, Schlesien 1870
14. *Petri,* Dr. Ed., Prof. der Geographie in St. Petersburg . 1883
15. *Pütz,* Dr. H., Professor der Vet.-Med., Halle a. S. . . 1870
16. *Regelsperger,* Gust., Dr., rue la Boétie 85, Paris . . 1883
17. *Rothenbach,* Lehrer am Lehrerseminar in Küssnacht . . 1871
18. *Wälchli,* Dr. med. D. J., Buenos Ayres 1873
19. *Wild,* Dr. Professor, in St. Petersburg 1859

Auszug

aus der

Jahres-Rechnung der bernischen Naturforschenden Gesellschaft.

1895.

Einnahmen.

Saldo letzter Rechnung	Fr.	274. 95
An Jahresbeiträgen	„	1288. —
An Eintrittsgeldern	„	30. —
An Zinsen	„	122. 50
An ausserordentlichen Beiträgen	„	250. —
	Fr.	1965. 45

Ausgaben.

Mittheilungen	Fr.	1537. 32
Sitzungen	„	42. 40
Bibliothek	„	202. 65
Lesezirkel	„	206. 07
Verschiedenes	„	119. 25
	Fr.	2107. 69

Bilanz.

Ausgaben	Fr.	2107. 69
Einnahmen	„	1965. 45
Es ergibt sich demnach ein Passiv-Saldo von	Fr.	142. 24

Reservefonds.

Derselbe ist im Rechnungsjahre unverändert geblieben . Fr. 2528. 55

Vermögensetat.

Das Vermögen der bernischen naturforschenden Gesellschaft besteht auf 31. Dezember 1895 in dem Reservefonds wie oben	Fr.	2528. 55
weniger dem Passiv-Saldo obiger Rechnung	„	142. 24
	Fr.	2386. 31
Auf 31. Dezember 1894 betrug das Vermögen	Fr.	2803. 50
„ „ „ 1895 beträgt dasselbe	„	2386. 31
Es ergibt sich demnach eine Verminderung von	Fr.	417. 19

Bern, 22. Mai 1895.

Der Kassier: **B. Studer, Apoth.**

R. Zeller.

Nachträge zu meinem geologischen Querprofil durch die Centralalpen.

I. Ueber die Tektonik und das Alter der Glanzschieferzone im Oberwallis.

Im Sommer des Jahres 1895 hatte ich Gelegenheit, gemeinsam mit Herrn Prof. C. Schmidt aus Basel denjenigen Theil der Lepontischen Alpen, welcher zwischen dem Griespass und dem Simplon liegt, während vier Wochen zu durchstreifen um die Lagerungsverhältnisse festzustellen. Da mein Profil [1]) dieses Gebiet durchquert, so lag der Gedanke nahe, meine im Sommer 1893 gemachten Aufnahmen einer Revision zu unterwerfen. Wir untersuchten aus meinem Profil die Strecke vom Oberwallis bis zum Formazzathal und begiengen z. T. die Profillinie selbst. Es ergab sich dabei die volle Richtigkeit meiner Aufnahmen im Gotthardmassiv und im Gebiete der Deveroschiefer und des Ofenhorngneisses der Lebendunalpen und der Cima Rossa. Dagegen erwiesen sich als falsch die Bruchlinien, welche ich Anno 1893 am Nord- und Südrand der Glanzschieferzone zu beobachten vermeinte, und auf Grund welcher ich die Glanzschieferzone nach dem Vorgange von Diener und Bonney als eine Grabenversenkung auffasste. Ferner gelang es uns diesmal, über das Alter der Glanzschiefer in meinem Querschnitt neues Material beizubringen.

C. Schmidt hat bereits die Resultate der neuen Begehungen kurz erwähnt [2]) und es erübrigt mir noch näher darauf einzutreten.

[1]) R. Zeller, Ein geolog. Querprofil durch die Centralalpen. Inaug. Diss. Mittheilungen der Berner naturf. Gesellschaft. 1895.

[2]) C. Schmidt, Géologie du Massif du Simplon. Arch. scien. phys. et nat. Genève. Tome XXXIII. Nov. 1895.

Wie schon bemerkt stützte sich meine Anschauung, die Glanzschieferzone entspreche als Ganzes einem Graben, auf Discordanzen, die ich am Nord- und Südrand gefunden zu haben glaubte. In Bezug auf den Nordrand verweise ich auf den Text zu meinem Querprofil (pag. 22 und ff.) und die Fig. 16 und 17 ebendaselbst. Ich konstatirte damals zwischen den senkrecht stehenden Gneissen des Gotthardmassives und der Hauptmasse der Glanzschiefer eine schmale Contactzone ganz unregelmässig einfallender Gneisse und Glanzschiefer.

Die Profile durch das Hohlauibachtobel, welche diese Grenzzone und ihre Discordanzen darstellen (Fig. 17) sind faktisch richtig, nur ist das nördliche Einfallen der Gneisse und Glimmerschiefer des Gotthardmassives wie das Südfallen der Glanzschiefer nicht ursprüngliche Lagerung sondern durch Gehängerutschung verursacht.

Diese Erscheinung, welche ich in der Folge diesen Sommer in der Glanzschieferzone noch da und dort beobachten konnte, ist hier in so grossartiger Weise entwickelt und die Aufblätterung der Schichten an der ganzen Bergflanke geht so tief, dass ich damals glaubte, diese Lagerung nicht als sekundär deuten zu dürfen. Unsere neuen Beobachtungen aber geben Beweise dafür, dass diese Unregelmässigkeiten der Lagerung nicht ursprünglich, sondern wirklich als Gehängerutschung zu deuten sind.

Ungefähr in der Mitte des Hohlauibachtobels findet man steilstehende Rauchwacke und Zoisitschiefer, auf denen discordant wieder Zoisitschiefer liegen (vgl. Profile Fig. 17). Weiter oben aber im Tobel steht eine kleine Partie Gneiss ebenfalls fast senkrecht, also concordant obgenannter Rauchwacke. Diese Gneisspartie war zur Zeit meiner Aufnahmen nicht entblösst, darum fehlt sie in meinen Profilen, sie ist aber entscheidend, den sie stellt, verbunden mit der Rauchwacke weiter unten den normalen, concordanten Contact dar. Die scheinbar auf die steilstehenden Zoisitschiefer und Rauchwacke überschobenen, nach S einfallenden Glanzschiefer aber, ebenso wie die Gotthardmassivgesteine der anderen Bachseite sind am steilen Abhang aus der fast saigeren Stellung überkippt und beiderseits gegen das tief und steil eingeschnittene Hohlauibachtobel abgerutscht. Dabei sind die Schichten paketweise noch zusammengeblieben; die einzelnen Schichtschollen aber liegen nicht mehr einander parallel, sind sogar häufig übereinander geschoben. Diese Erscheinung ist um so leichter erklärlich, als das Hohlauibachtobel, wie häufig die Längstäler in diesem Gebiet, mit einer Rauchwackezone zusammenfällt. Auslaugungen

mögen deshalb auch hier die besprochenen Abrutschungen begünstigt haben.

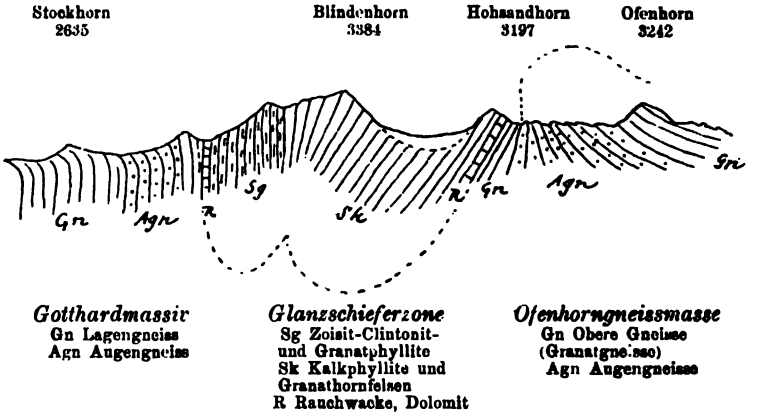
Die Discordanz zwischen Gotthardmassiv und Glanzschieferzone in unserem Querprofil besteht also nicht, wie man sich übrigens im Streichen östlich an der Ritzfurgge und westlich im Rappenthal überzeugen kann. Am Nordrand der Zone herrscht überall, vom Griespass bis gegen Brieg die schönste Concordanz.

Was die Bruchlinie am Südrand der Glanzschieferzone anbetrifft, so hatte ich hier gewisse, sehr jung aussehende Gneisse, die sich von den Augengneissen des Ofenhorns scharf abheben, noch zu den Glanzschiefern gerechnet und eine Knickung der Straten führte zu einer scheinbaren Discordanz. Dadurch kam der Dolomitstreifen am Südabhang des Hohsandhorns in die Glanzschieferzone hinein, während der Dolomit auch am Südrand die Grenzschicht bildet, wie überall soweit ich mich überzeugen konnte. Der Contact zwischen den Glanzschiefern und den Gneissen liegt also nicht in der Lücke südlich des Hohsandhorns sondern etwa in halber Höhe am Südabhang desselben. Daraus ergibt sich nun von selbst aus meinem Detailprofil Fig. 18. die völlige Concordanz. Die Granatgneisse, Granatglimmerschiefer, Lagengneisse und Sericitquarzite im Liegenden des Dolomites gehören also bereits der Ofenhorn-Monte Leone-Gneissmasse an und sie sind als oberstes Niveau der Gneisse nach den Beobachtungen von C Schmidt[1]) im Tessin sehr verbreitet. Mit der Feststellung des richtigen Alters dieser Gneisse ist aber die Discordanz noch nicht gehoben, sie wäre nur verlegt zwischen die jüngeren Glimmerschiefer und die älteren Augengneisse. Eine genaue Untersuchung der Gehänge gegen den Thäligletscher zeigt aber, dass wir es nur mit einer scharfen Knickung der Augengneisse zu thun haben.

Hiermit wäre auch diese Bruchlinie beseitigt und es steht nun nichts im Wege, die ganze beidseitig von Rauchwacke bezw. Dolomit eingefasste Schieferzone als eine Mulde sich zu denken oder vielmehr als eine Doppelmulde nach Analogie der Verhältnisse weiter östlich im Streichen am Griespass und im Bedrettothal. Der mittlere Rauchwackezug, welcher in Val Corno (Bedretto) die Schieferzone theilt, taucht zwar am Griespass unter, aber die petrographische Verschiedenheit der beiden Schieferzüge erhält sich noch weit gegen W. indem, wie man auch aus meinem Querprofil ersieht, der nördliche Zug vor-

[1]) C. Schmidt, Geolog. Excursion durch die centralen Schweizeralpen. Livret guide géol. VIII.

zugsweise aus schwarzen Zoisit-, Clintonit- und Granatphylliten, der südliche Zug aber aus einförmigen Kalkphylliten und Granathornfelsen besteht, ohne dass aber hier, wo die trennende Rauchwacke fehlt, eine scharfe Grenze zwischen beiden Facies gefunden werden könnte. Der Durchschnitt der Glanzschieferzone auf unserer Profillinie gestaltet sich nun infolge dieser neuen Untersuchungen etwa folgendermassen:



Ob wir es hier wirklich mit einer Doppelmulde oder mit mehreren Falten zu thun haben oder ob wegen der petrographischen Verschiedenheit der Zone im Norden und Süden die Lagerungsverhältnisse noch anders zu deuten sind, lässt sich heute noch nicht mit Sicherheit sagen.

Was endlich das Alter der Glanzschieferzone in unserem Querschnitt anbetrifft, so lässt sich jetzt etwas Bestimmtes darüber sagen. Ich hatte Anno 1893 gehofft in den grossen Schutthalden der schwarzen Glanzschiefer am Nordabhang des Merzenbachschien Versteinerungen zu finden, da die Zone im Streichen der fossilführenden Nufenenschiefer liegt. Ich fand damals nichts und schrieb desshalb, die Schiefer seien hier *anscheinend* petrefaktenleer. Diesmal aber, als wir unsere Aufmerksamkeit nur denjenigen Gesteinsvarietäten zuwandten, welche nach Analogie mit andern Fundstellen Petrefakten enthalten konnten, gelang es uns bald in den Zoisitschiefern unzweifelhafte Belemniten zu finden, und zum Ueberfluss entdeckten wir noch einen von Cardinienschalen vollsteckenden Block. Damit war das Alter dieser Schieferzone gegeben. Die Verbindung mit den Nufenenvorkommnissen wurde einige Tage später hergestellt durch die Entdeckung der ausgiebigen Belemnitenfundstelle am Ritzengletscher ob Ulrichen, und auch gege-

Westen ergaben Petrefaktenfunde, über welche C. Schmidt ebenfalls berichtet hat [1]), dass jedenfalls die nördliche Grenzzone der Glanzschiefer vom Bedrettothal bis Brieg sicher jurassischen Alters ist.

II. Zum Amphibolitzug vom Ivrea.

Bei den Aufnahmen zu meinem Alpenprofil durchquerte ich auch meiner Profillinie entlang den Amphibolitzug von Ivrea im Gebiete der Val Cannobina, ohne zu wissen, dass zu dieser Zeit bereits ein italienischer Geologe, Herr Cesare Porro, mit einer kartographischen Aufnahme des Amphibolitzuges in eben jener Gegend beschäftigt war. Ich untersuchte die Lagerungsverhältnisse auf und in der Nähe meiner Profillinie soweit meine kurzbemessene Zeit es zuliess, und als petrographische Grundlage diente mir eine beschränkte Zahl von Gesteinstypen in Handstück und Dünnschliff.

Herr C. Porro, der im Sommer 1895 von meinem Profil Kenntniss erhielt, fühlte sich darauf veranlasst, in einer kurzen Notiz [2]) darzulegen, worin die Resultate seiner weit vollständigeren Untersuchungen von den meinigen abweichen. Indem er anfangs zugibt, dass meine Beobachtungen in vielen Stücken mit den seinigen übereinstimmen, erörtert er im Weitern, auf Grund seines ausgedehnten Materiales, die abweichenden Punkte.

Dass eine systematische Bearbeitung jener Gegend meinen Beobachtungen manches Ergänzende beifügen und dieselben auch in mannigfacher Hinsicht modifiziren würden, war von vornherein zu erwarten. Es scheinen mir denn auch in vielen Punkten die auf umfassenderen Vorarbeiten beruhenden Schlussfolgerungen des Herrn Porro die richtigen zu sein, während ich in andern meine Beobachtungen und deren Deutung aufrecht erhalten muss.

Was zunächst meine etwas abweichenden petrographischen Bezeichnungen anbetrifft, so hatte ich dieselbe auf Grund von Dünnschliffen aufgestellt. Herr Porro ist durch das Studium seines umfangreichen Materials hierin zu andern Benennungen gekommen, es bleibt eben in der petrographischen Namengebung stets der Willkür ein Spielraum, welcher durch den Reichthum an Varietäten in den Gesteinstypen noch gefördert wird. So hatte ich für meine Pyroxengesteine den rhombischen Pyroxen als den charakteristischen Gemengtheil zur Be-

[1]) C. Schmidt, loc. cit.

[2]) Separatum ohne Titel, Strassburg, Juli 1895.

zeichnung der betreffenden Gesteinsgruppe gewählt. Da nach den Untersuchungen von Porro der Olivin vorzuherrschen scheint, so mögen diese Gesteine nach dem Vorgang von Traverso [1]) zu den Peridotiten gezählt werden.

Meine Behauptung, die Peridotite und die Serpentine herrschten am Nordabhang des Monte Gridone gegen Val Vigezzo nicht so sehr vor, wie die Karte von Traverso vermuthen lasse, stützt sich auf die Beobachtungen in dem an der Schweizergrenze gelegenen Rio dei confini, der gerade in meiner Profillinie liegt; es mag allerdings in den von Porro untersuchten weiter westlich gelegenen Bachbetten der R. Motto, Molino und Coana sich anders verhalten.

Ob man die grobkörnigen Feldspatamphibolite der Testa di Misello als massig (Zeller) oder als grobkörnig gebändert (Porro) bezeichnen will, darüber lässt sich streiten. Ich habe diese Bänderung im Anstehenden ebenfalls beobachtet, aber da das betreffende Gestein in der Anordnung seiner Gemengtheile auch nicht die geringste Parallelstructur zeigt, so glaube ich solches sehr wohl als massig bezeichnen zu dürfen.

Ebenso halte ich daran fest, dass nach dem geologischen Verband die Gesteine der Amphibolitzone sich sondern in die deutlich parallelstruirten Hornblendeschiefer, und Diorite und die mehr massigen Feldspathamphibolite, Pyroxengesteine, Peridotite und Serpentine. Dass Gesteine der ersten Abtheilung hin und wieder ganz massig und umgekehrt solche der zweiten Reihe da und dort schiefrig sein können, und dass der Wechsel des Gebirgsdruckes hiebei mitspielt, weiss ich sehr wohl, aber es kommt auf den Hauptcharakter an und der ist mit aller nur wünschbaren Deutlichkeit der oben angegebene. Die beiden Abtheilungen bilden scharf geschiedene, mehrfach in einander auskeilende Zonen.

Was endlich die Wechsellagerung der Amphibolite mit den Sericitschiefern und Gneissen anbetrifft, so vermisste ich eine solche völlig am Nordrand der Zone. Herr Porro weist darauf hin, dass dieselbe weiter westlich im Gebiete des Cima della Laurasca und Valle Loana nachzuweisen sei und dass sie an den Abhängen des Gridone gegen Val Vigezzo unter Quartär verborgen liegt. An der Schweizergrenze aber liegt nicht soviel Quartär und reicht dasselbe nicht so hoch hinauf, dass man die Wechsellagerung nicht sehen könnte, wenn sie eben dort vorhanden wäre.

[1]) St. Traverso, Geologia dell'Ossola. Genova 1895.

Der Amphibolitzug wird überhaupt auch in Zukunft noch eine Menge von Widersprüchen und Räthseln darbieten, und man möchte nur hoffen, dass Herr Porro seine verdienstvollen Untersuchungen in dieser Zone noch weiter ausdehnen würde.

Bern, Januar 1896.

A. Rossel.

Neue chemische Verbindungen[1])

hergestellt bei hohen Temperaturen und ihr Zusammenhang mit den modernen Anschauungen.

I.

Die Grundsätze der modernen Chemie wurden am Ende des letzten Jahrhunderts festgestellt. Nachdem Priestley zum ersten Mal am 1. August 1774 den Sauerstoff aus Metalloxyden rein darstellte, ein Gas, das durch die Arbeiten von Lavoisier als einfacher Körper erkannt wurde als Ursache des Verbrennungsprozesses, zeigte im Jahr 1781 Cavendish, dass das Wasser aus einer chemischen Verbindung von Sauerstoff und Wasserstoff besteht; er leistete den Beweis, dass der Stickstoff als indifferenter Körper in der Luft den Sauerstoff begleitet. Damit verschwand die Theorie von Aristoteles, dass Wasser, Erde, Feuer und Luft Elemente seien.

Im Jahre 1782 zeigte ein sächsischer Chemiker, Wenzel, dass bestimmte Mengen von Säuren immer die gleiche Menge von Basen binden zur Erzeugung von Salzen.

Richter befestigte diese Anschauung und im Jahr 1802 wurde von Fischer die erste Aequivalenttafel aufgestellt. Der bekannte Streit zwischen Berthollet und Proust hatte zur Folge, dass eine grössere Anzahl von Verbindungsgewichten der Elemente genau bestimmt und die Grenze zwischen chemischen Verbindungen und Mischungen genau festgestellt wurde.

Gestützt auf die eroberten Thatsachen entdeckte Dalton 1808 das Gesetz der multiplen Proportionen. Dalton bestimmte das relative Gewicht, mit welchem ein Element mit einem zweiten Element verschiedene Verbindungen eingehen kann; er vereinfachte die chemischen Formeln und Gleichungen durch Einführung der Symbole.

[1]) Calciumcarbid, Phosphoraluminium, Magnesiumstickstoff, Künstliche Diamanten. Ursachen vulkanischer Eruptionen.

Berzelius vervollständigte die Arbeiten Daltons, indem er die Electrochemie gründete, und durch Einführung der chemischen Zeichen, die gegenwärtig noch gebräuchlich sind. Humboldt und Gay-Lussac, dann Avogadro haben die Verhältnisse zwischen Volumen und Gewichten der Elemente eingehend studirt, und die noch geltende Ansicht über Atom und Molecül festgestellt. Es entstanden die allgemein bekannten Gleichungen, nach welchen sowohl nach Volumen, wie nach Gewicht die chemischen Prozesse übersetzt werden. Vor 20 Jahren hat Stass durch äusserst genaue Messungen die bestehenden Theorien bestätigt und befestigt.

Alle diese genialen Arbeiten hatten nun zur Folge:

1° Die Entdeckung der Elemente oder einfachen Körper, die Feststellung der relativen Gewichte und Volumen, mit denen sie Verbindungen eingehen, und die moderne Schreibweise der Formeln und Gleichungen.

2° Das Gesetz der einfachen und das Gesetz der multiplen Proportionen.

In der nächsten Periode sind in der *rein theoretischen* Chemie keine Fortschritte von grosser Bedeutung gemacht worden; die Chemie ist eine *experimentale Wissenschaft* geblieben, deren bedeutende Resultate sich auf die genannten Gesetze stützen. Eine genügende Erklärung für die Bildung sämmtlicher chemischer Verbindungen existirt nicht, und wir erwarten noch den genialen Mathematiker, der die errungenen Thatsachen in endgültige, chemische Gesetze einreihen wird. — Die ausserordentlich grosse Anzahl von Thatsachen hat zu ganz besondern Ansichten geführt, die wir nicht als *Gesetze*, sondern als *Hypothesen* bezeichnen müssen.

Gerhardt hat die «*Typentheorie*» aufgestellt, die, bald als ungenügend erkannt, Kékulé, den Grossmeister der organischen Chemie, veranlasste, die *Valenz-Hypothese* anzunehmen. Es wurde den Elementen ein bestimmter Werth, unabhängig vom Atomgewicht, zugeschrieben, mit welchem sie in Verbindung gehen. Der Kohlenstoff wurde als vierwerthig erkannt und angenommen, dass die Kohlenstoffatome unter sich in offenen und geschlossenen Ketten Verbindung eingehen können, unter der Bedingung, dass die freien Valenzen durch den einwerthigen Wasserstoff, den zweiwerthigen Sauerstoff oder den drei- und fünfwerthigen Stickstoff gesättigt seien. Das Resultat dieser Spekulation war die Gründung der Constitutionsformen der Kohlenstoffverbindungen, welche *endgültig* die Bildung komplizirter Atomgruppen

zu erklären zwar nicht genügt, doch dazu beitrug, die Entwicklung der organischen Chemie mächtig zu fördern. Die Valenztheorie ist eine Hypothese und nicht eine Theorie im wahren Sinne des Wortes, da, sobald man die Wasserstoffverbindung des Kohlenstoffs verlässt, keine genügende Erklärung für eine Anzahl chemischer Verbindungen gegeben werden kann. Schon die einfache Verbindung Kohlenoxid kann durch die Valenztheorie nicht erklärt werden. Ganz unerklärt bleiben die fünf Verbindungen des Stickstoffs mit Sauerstoff, wenn auch hier spekulative Forscher versucht haben, diese in eine annehmbare Theorie einzureihen. — Gewisse moderne chemische Formeln, ebenso bestechend in ihrer Entwicklung wie unerwiesen, wurden zur Genüge und zum Ueberfluss aufgestellt.

An der Entwicklung der Werthigkeitstheorie und der rationellen Formel (Strukturlehre) betheiligten sich dagegen eine grosse Anzahl genialer Forscher, die dem Ausbau der organischen Chemie grosse Dienste leisteten. Berthelot ging vom Acetylen aus, um durch Synthese organische Verbindungen herzustellen. Græbe und Liebermann sind unsterblich geworden durch die synthetische Herstellung des Alizarins aus Anthraceen, Bæyer folgte mit der Synthese des Indigos, Ladenburg des Coniins, und Fischer des Traubenzuckers.

Grosses Aufsehen erregte die van't Hoff'sche Annahme der räumlichen Atomgruppirung, welche Arbeit von Wislicenus ausgedehnt wurde und wodurch versucht wird, die »räumliche Lagerung der Atome in Molecüle« anzugeben.

Für die Entwicklung der allgemeinen Chemie war die analytische Chemie von grosser Bedeutung. Die chemischen Reactionen der qualitativen Analyse, die Anwendung derselben in der quantitativen Analyse, die Electrolyse, namentlich aber die Spectral-Analyse leisteten unserer Wissenschaft unschätzbare Dienste, immer aber wieder im Bereich der *Experimentalchemie*.

Der Experimentalchemie sind die grossen Entdeckungen der chemischen Industrie, die der Menschheit so ausserordentliche Dienste leisten, zu verdanken. Die Vervollkommnung derselben wurde durch sorgfältig ausgeführte analytische Arbeiten (wir erinnern hier an die Fabrikation von Soda, an die Fabrikation des Stahls, Entphosphorung des Eisens nach der Methode von Thomas, die Regeneration der Chlorrückstände nach Weldon, u. s. w.) unterstützt. Auf dem Wege des Experimentes und der chemischen Analyse sind auf dem Gebiete der Landwirthschaft grossartige Errungenschaften zu verzeichnen, die nament-

lich in der Schweiz in hohem Grade gewürdigt werden. Die Wirkung von Phosphorsäure, Kali und Stickstoff ist der grössten Mehrzahl unserer Landwirthe bekannt, die Ernährungsfrage ist eine einfachere und der allgemeine Wohlstand erhöht worden.

II.

Gewisse Zahlenverhältnisse zwischen den Atomgewichten verschiedener Grundstoffe, die in chemischer Beziehung Aehnlichkeit haben, erweckten das Studium genialer Forscher; so hat man gefunden, dass 16 Einheiten sehr häufig die Atomgewichte von Elementen mit ähnlichem chemischen Charakter trennen.

Das Atomgewicht des Fluors	ist	19,	das Atomgewicht des Chlors	35,4;
» » » Sauerstoffs	»	16,	» » » Schwefels	32 ;
» » » Stickstoffs	»	14,	» » » Phosphors	21 ;
» » » Kohlenstoffs	»	12,	» » » Siliciums	28 ;
» » » Bors	»	11,	» » » Aluminiums	27 ;
» » » Berrylliums	»	9,	» » » Magnesiums	24 ;
» » » Lithiums	»	7,	» » » Natriums	23 ;

Die hier angeführten Elemente, deren Atomgewichte durch die Zahl 16 oder annähernd 16 getrennt sind, besitzen bekanntlich unter sich eine nicht verkennbare chemische Verwandtschaft.

Es wurden auch auffallende Analogien zwischen gewissen Gruppen von Elementen, die von Dœbereiner 1829 Triaden genannt wurden, gefunden. Beim Addiren der Atomgewichte zweier Elemente solcher Triaden ergibt das arithmetische Mittel annähernd das Atomgewicht des dritten Elementes der Triade,

z. B. für Lithium, Kalium und Natrium:

$$7 \text{ (Atomgewicht des Lithiums)} + 39 \text{ (A. G. des Kaliums)} = 46$$

$$\frac{46}{2} = 23 \text{ Atomgewicht des Natriums.}$$

Dann für Kalium, Cæsium und Rubidium:

$$39 \text{ A. G. des Kaliums} + 133 \text{ A. G. des Cæsiums} = 172$$

$$\frac{172}{2} = 86 \text{ A. G. des Rubidiums.}$$

Dann für Calcium, Baryum und Strontium:

$$40 \text{ A. G. des Calciums} + 137 \text{ A. G. des Baryums} = 177$$

$$\frac{177}{2} = 88{,}5 \text{ A. G. des Strontiums.}$$

Auffallend ähnliche Verbindungen weisen nach: Chlor, Brom und Jod; Schwefel, Selen und Tellur; Phosphor, Arsen und Antimon u. s. w. Solche Gruppen von Elementen zeigen eine enge Beziehung der Atomgewichte zu ihren Eigenschaften, die zu einer neuen Eintheilung der Elemente nach ihren Atomgewichten führte.

Wenn man die Elemente nach aufsteigenden Atomgewichten ordnet, wird eine periodische Funktion derselben wahrgenommen. Zuerst war es Chancourtois (1862), der diese interessante Beobachtung gemacht hatte, dann davon unabhängig Newlands (1862—1864). Jahrelang schenkte man denselben wenig Aufmerksamkeit, bis Lothar Meyer und Mendeléjeff die neue Gruppirung allgemein bekannt machten. Dieses in den Sitzungen der naturforschenden Gesellschaft in Bern wiederholt besprochene sogenannte periodische Gesetz (Eintheilung der Elemente nach Mendeléjeff) erweist sich ebenfalls als unzulänglich, um sämmtliche chemische Verbindungen zu erklären; es kann nicht als endgültiges Gesetz angenommen werden, indem auch hier Ausnahmen nicht selten vorkommen, es hat aber doch diese Eintheilung den Werth gehabt, im Wesen der Elemente mehr Klarheit zu verschaffen, und die Eigenschaft noch nicht entdeckter Elemente konnte im voraus festgestellt werden.

Solche von Mendeléjeff im voraus beschriebene Elemente wurden wirklich später auch aufgefunden; namentlich waren es Scandium, Gallium und Germanium, deren Atomgewichte und Eigenschaften ihrer Verbindungen mit den berechneten Angaben übereinstimmten. Der französische Forscher Lecoq du Boisbaudran entdeckte das Gallium, Nilson das Scandium und Cl. Winkler in Freiberg das Germanium. Aehnlich wie der Astronom den Lauf von Himmelskörpern beschrieb, bevor diese im Firmamente gesehen wurden, war es nun dem Chemiker möglich, nicht bekannte Elemente durch ihre Eigenschaften zu charakterisiren; der geniale Chemiker stützte sich aber nicht auf ein mathematisch eruirtes Gesetz, sondern auf eine muthig aufgestellte Hypothese.

Die sich daran knüpfenden «Theorien» mussten in Folge dieser Thatsache sehr bestechend sein, aber sie entbehren der genauen, mathematischen Grundlage. Es wurde wiederholt die Ansicht ausgesprochen, dass sehr wahrscheinlich die Elemente keine einfachen Körper sein können, dass diese möglicherweise aus einem einzigen Körper entstanden sind, durch Condensation, in Folge einer Form der Energie, die noch unbekannt war.

Schon hatte Proust im Jahre 1815 die Ansicht ausgesprochen, die Elemente seien Modifikationen des Wasserstoffes, entstanden unter Verhältnissen, die auf der Erde nicht mehr vorkommen. Die genauen Beobachtungen von Stass, der die Atomgewichte einer Revision unterstellte, haben gezeigt, dass an der Möglichkeit einer solchen Condensation gezweifelt werden darf, indem die oben angeführten Atomgewichte sich nicht als absolut genau erwiesen, so dass für die erwähnten Triaden das arithmetische Mittel zweier Elemente in Wirklichkeit nicht zum Atomgewicht des dritten Elementes führt.[1]) Auch hat bis jetzt kein einziger praktischer Versuch zu Resultaten geführt, die zur Annahme der Permutation der Elemente (oder Umwandlung eines Elementes in ein anderes Element) berechtigen würden. Die Ansicht, dass zum Beispiel ein Metall in das andere umgewandelt werden könnte, entbehrt, trotz aller Spekulation, jeder demonstrativen Thatsache.

Sorgfältige Untersuchungen haben gezeigt, dass der Spruch der Jünger Mendelejeff's: »*Sämmtliche Eigenschaften der chemischen Verbindungen sind periodische Funktionen der Atomgewichte*« absolut unrichtig ist; so lange man die Annahme Mendelejeff's als eine neue Art der Eintheilung der Elemente betrachtete, die nicht ohne praktische Folgen war, aber an die man sich nicht unbedingt zu halten hat, konnte man der Entwicklung der neuen Schreibweise mit Interesse folgen; ganz anders verhält es sich, wenn die wissenschaftliche Welt mit der kühnen und doktrinären Behauptung überrascht wird, mit welcher die neue Schule rationelle Untersuchungen hemmt.

Es ist am Platze, wenn nun dagegen energisch protestirt wird, und es ist geschehen in einer denkwürdigen Rede, die M. Wyronboff im Hörsaal von Prof. Friedel in der Sorbonne in Paris jüngsthin gehalten hat.

Um sich zu überzeugen, wie unhaltbar der allgemeine Grundsatz von Mendelejeff sein muss, genügt es, die Eintheilung der Elemente, wie er sie vorgeschlagen hat, genau zu studiren.

Wenn man in Ordinaten und Abscissen die Elemente in einer Tabelle aufträgt und zwar so, dass man willkürliche gewisse chemische

[1]) Die genauen Messungen von Stass ergeben, dass, wenn man von der Zahl 16 als Atomgewicht für den Sauerstoff ausgeht, folgende Zahlen für die Atomgewichte einiger Elemente erhalten werden:

S = 32,0626 statt 32; Cl = 34,4529 statt 35,5;
Na = 23,0575 » 23; H = 1,007 » 1,0.

Verbindungen der Elemente mit Sauerstoff berücksichtigt, so erhält man eine Curve, die durch ihre Regelmässigkeit bestechend ist.

Es ist aber bekannt, dass die Elemente ausser Fluor, eine grosse Anzahl von Sauerstoffverbindungen bilden und dass, wenn man von diesen Verbindungen je eine auswählt, man alles beweisen kann, was man für gut findet.

Mendeléjeff hat nun die Sauerstoffverbindung, die er für seine Theorie bedarf, willkürlich gewählt. Für die Alkalimetalle sind es die Oxyde der allgemeinen Formel R_2O, obschon man weiss, dass die höheren Oxyde K_2O_4 und Na_2O_2 vorkommen. Für Kupfer wird das Oxyd Cu_2O allein berücksichtigt, obschon das Oxyd CuO viel wichtigere Verbindungen bildet und CuO_2 bekannt ist. Für die Erdalkalimetalle wählte Mendeléjeff das Oxyd RO und verschweigt die Existenz der Oxyde CaO_2, BaO_2 und SrO_2, die eine sehr wichtige Rolle bei der Darstellung des Sauerstoffs spielen.

Wenn behauptet werden sollte, dass man für die Herstellung der Curve die beständigsten Oxyde berücksichtigt hat, so wäre auch hier die Willkürlichkeit erwiesen, indem für die Zeichnung der Curve als beständiges Oxyd des Eisens die Verbindung FeO_3 angenommen würde, während wenige Chemiker diese Verbindung kennen, und für Kobalt das Oxyd CoO_2, welches gar nicht vorkommt. Für Didyme wird die Formel eines Oxyds Di_2O_5 angenommen, während die höchste Oxidationsstufe dieses Elementes die Formel Di_4O_9 besitzt. Ausserdem sind eine ganze Anzahl Oxyde neuerdings entdeckt worden, die die Annahme Mendeléjeff's illusorisch machen, wie Zn_2O_3, Cd_2O_3, TiO_3, UO_6, Th_2O_7, CeO_3 so wie auch die Ueberschwefelsäure und die Uebermolybdänsäure.

Wenn man auf die Ordinaten der Tabelle wirklich die höheren Oxyde der Elemente, die bekannt sind, aufträgt, wie Mendeléjeff es verlangt, so erhält man statt seiner regelmässigen, aber willkürlichen Curve eine gebrochene Linie ohne Regelmässigkeit.

H. Wyronboff findet noch wichtigere Anhaltspunkte gegen die neue Schreibweise, die als endgültige Theorie aufgestellt werden soll. Das Atomgewicht des Tellur ist 128 und trotz den Arbeiten von Brauner, der nach den verschiedensten Methoden einen Fehler in dieser Zahl finden wollte, ist das Atomgewicht des Tellurs 128 geblieben, während das Element, um seine Stellung in der Curve behaupten zu können, das Atomgewicht 125 haben sollte.

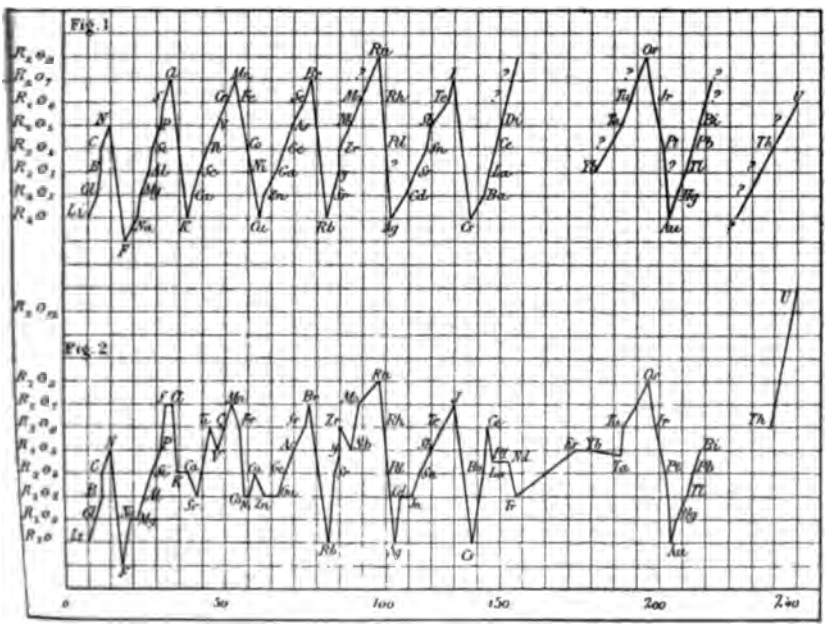
Noch bezeichnender ist folgende Thatsache. Mendeléjeff nimmt folgende Atomgewichte an: La = 138; Ce = 140; Di = 142. Diese

Zahlen waren ihm nothwendig, für die Regelmässigkeit der Curve. Es haben aber Marignoc, Bunzen, Jegel, Ramelsberg und Wolf das Atomgewicht des Ceriums bestimmt und 138 gefunden, während das Element Lantan das Atomgewicht 138,5 besitzt. Eine ähnliche Unregelmässigkeit findet für Didym statt, indem das theoretisch angenommene Atomgewicht nicht mit dem direkt bestimmten Atomgewicht zusammen fällt.

Zur Gewinnung der regelmässigen Curve, die die «Periodicität» der Elemente beweisen muss, sind daher ganz willkürlich Sauerstoffverbindungen gewählt worden und in ganz willkürlicher Weise Atomgewichte geändert worden.

Um die Täuschung klar darzulegen, genügt es, beide Curven zu vergleichen; die eine von staunenswerther Regelmässigkeit, aber absolut willkürlich, ohne gewissenhafte Berücksichtigung der Eigenschaften der Sauerstoffverbindungen und der Atomgewichte, daher streng theoretisch werthlos und die zweite, die wahre Curve, die die höheren Oxyde berücksichtigt und die richtigen Atomgewichte und daher absolut unregelmässig sich gestaltet, wie es auch in Wirklichkeit für die Eigenschaften der Sauerstoffverbindungen der Elemente der Fall ist.

Fig. 1.



Die geniale Schreibweise von Mendeléjeff entbehrt daher jeder Berechtigung, eine neue endgültige Theorie gründen zu wollen.

III.

Die ausserordentlich grosse Anzahl chemischer Verbindungen der Experimental-Chemie veranlassten die Forscher sich zu spezialisieren.

Raoul Pictet hat sich mit der Frage befasst, bei tiefer Temperatur chemische Reactionen zu studiren und hat sämmtliche Gase verflüssigt; der Sauerstoff, der Wasserstoff und der Stickstoff, wie auch sämmtliche bekannten Gase sind nicht permanent; es wurden die kritischen Temperaturen festgestellt, neue, grosse Entdeckungen für die Entwicklung der chemischen Theorie sind aber dadurch keine erfolgt.

Bei Anwendung höherer Temperatur hat man insofern mehr erreicht, indem die chemische Wissenschaft mit einer neuen Anzahl von Verbindungen bereichert worden ist, die zu neuen Ansichten führen müssen. Es wurde festgestellt, dass bei hoher Temperatur und hohem Druck einige Elemente eine andere physikalische Gestaltung annehmen können, und bis dahin unbekannte oder wenig studirte Verbindungen wurden hergestellt.

Wenn auch die allotropischen Modifikationen des Sauerstoffes, des Schwefels, des Phosphors, des Kohlenstoffs bekannt waren, so sind doch Arbeiten wie diejenigen von Moissan über die künstliche Herstellung der Diamanten und neuen chemischen Verbindungen bei hohem Druck und hoher Temperatur epochemachend, indem die erlangten Resultate den Gedanken bestärken müssen, dass für die Entwicklung der Wissenschaft noch wichtige Thatsachen festgestellt werden müssen. Am 6. Februar 1892 theilte Moissan in der französischen Akademie der Wissenschaften mit, dass es ihm gelungen sei, bei sehr hoher Temperatur und starkem Druck kristallisirten Kohlenstoff von den Eigenschaften der Diamanten herzustellen. Wöhler, Bunsen (1836—1889) und andere hervorragende Meister haben bei Anwendung des galvanischen Stroms die Wissenschaft mit einer grössern Anzahl von Entdeckungen bereichert; man bediente sich aber vor der Construction der vervollkommneten Dynamos zum Erzielen von hohen Temperaturen mehr allgemein der Brennmaterialien. Bei seinem Versuche benützte Moissan starke galvanische Ströme, er verwendete 300—350 Amp. und 50—70 Volt, die einer Temperatur von 3000° bis 3500° entsprechen.

Wir wollen kurz den mit durchschlagendem Erfolg ausgeführten Versuch der Darstellung des reinen Kohlenstoffes mittheilen.

Fig. 2. Elektrischer Ofen von Moissan.

A und B Elektroden aus Kohle.
M Steinblock aus weichem Kalkstein.
N Steinplatte » » »
T Vertiefung für den Kohlentiegel.

Der elektrische Ofen von Moissan besteht aus einem Block M von weichem Kalkstein; in der Mitte desselben befindet sich eine Vertiefung T zum Einlegen des Tiegels. Ueber den im Tiegel im Steinblock angebrachten Rinnen befinden sich horizontal die Kohlenstäbe A und B zur Leitung des Stromes; das Ganze wird mit einer Steinplatte N bedeckt. In diesem Ofen erhitzte Moissan in einem Kohlentiegel 200 Gramm Eisen zwischen 3000 und 3500 °. Dem geschmolzenen Metall wurde soviel Kohle gegeben, als dasselbe aufnehmen konnte; der Tiegel wird dann durch Werfen desselben in Wasser abgekühlt. Da das spezifische Gewicht des festen Eisens geringer ist, als dasjenige des flüssigen Metalls, so entsteht durch die Abkühlung in der Masse ein ausserordentlich starker Druck; unter diesen Verhältnisse krystallisirt ein Theil des geschmolzenen Kohlenstoffs des Eisens. Am 6. Februar theilte Moissan der französischen Akademie mit, dass es ihm gelungen sei, nach diesem Verfahren krystallisirten Kohlenstoff zu erhalten, der sich bei ausserordentlich genauer Untersuchung als *Diamant* zeigte[1]); die Krystallisation, die Härte, das spezifische Gewicht, die optischen Verhältnisse, die Bildung von Kohlensäure beim Verbrennen der Krystalle, bewiesen die Identität des künstlichen Diamantes mit demjenigen, der in der Natur vorkommt. Der grösste auf diese Weise erhaltene künstliche Diamant besitzt allerdings bloss einen Durchmesser von 0,5 Millimeter (siehe Fig. 7), es handelt sich daher nicht um ein industrielles Produkt, aber das Volumen desselben war genügend, um dessen Eigenschaften festzustellen.

[1]) Comptes rendus, 6 et 12 fév. 1892. Die Trennung nach der Methode von Berthelot gehört zu den schwierigsten Arbeiten der analytischen Chemie.

In Bestätigung der Ansicht, dass auch grössere Diamanten der Natur vulkanischen Ursprungs sind und sich bei sehr hohem Druck und Temperatur gebildet haben, hat Moissan den blauen Sand der Diamantlager des Kaps untersucht. Die Untersuchung fand nach der Methode der Analyse des geschmolzenen Eisens des elektrischen Ofens statt. Die Masse (das Eisen des im elektrischen Ofens geschmolzenen oder der zu untersuchende Sand) wird mit konzentrirter Salzsäure behandelt, dann mit ganz konzentrirter Salpetersäure der Rückstand oxydirt, das Zurückgebliebene wiederholt mit Kaliumchlorat geschmolzen und endlich der unlösliche Rückstand mit Fluorwasserstoffsäure und konzentrirter Schwefelsäure erhitzt. Nach diesen zahlreichen Operationen, von Berthelot angegeben und die wiederholt angeführt werden, wurde der krystallisirte Kohlenstoff oder Diamant von Graphit und anderen Verunreinigungen, namentlich Silicium, getrennt und es erhielt Moissan aus dem Sand der Diamantenlager des Kaps Diamantenstaub von gleicher Form und gleichen Eigenschaften, wie der künstlich hergestellte Diamantenstaub des geschmolzenen Eisens. Wenn nun in jenem Sand Diamanten von grösseren Dimensionen gefunden wurden, so muss angenommen werden, dass die Temperatur und die Druckverhältnisse, über die wir gegenwärtig verfügen, nicht genügen, um den werthvollen Stein in grössern Dimensionen künstlich herzustellen, oder dass ein anderes, noch unbekanntes Schmelzmittel den flüssigen Kohlenstoff aufnahm.

Diese Thatsachen haben mich dazu geführt, im harten Stahl die Anwesenheit von in Oktaeder krystallisirtem Kohlenstoff zu suchen. Die Methode der Analyse war die von Berthelot und Moissan beschriebene. [1]) Am 26. Januar 1896 fanden wir (bei dieser Arbeit war mein Privatassistent H. L. Franck mit Erfolg thätig) die ersten kleinen Oktaeder im Stahl. Diese durchsichtigen Kryställchen, durch ihre ausgezeichnete Härte charakterisirt, sind aber sehr spröde, ähnlich wie viele Diamantkrystalle, die in der Natur vorkommen; sie verbrennen im Sauerstoff bei 1000° C und liefern Kohlensäure, ohne namhafte Mengen Asche zurück zu lassen. Der Stahl, aus welchem die Gewehrläufe unseres neuen Infanteriegewehres hergestellt sind, lieferte Krystalle, die bei einer Vergrösserung von 300 linear regelmässige Oktaeder erkennen lassen; die Untersuchung im polarisirten Licht erga

[1]) Recherches sur les états du carbone. Ann. de chimie et de physique 4ème série, t. XIX p. 392.

die Identität der von uns hergestellten Diamanten mit dem natürlichen Diamantstaub. (Fig. 3.)

Fig. 3.

Vergrösserung 1060 Linear.

Die Analyse des Stahls nach der neuen Methode zeigt nun, dass bei metallurgischen Operationen der Kohlenstoff in Form von mikroskopischen Diamanten ausgeschieden werden kann. Die Dimensionen der Krystalle waren sehr klein, 3 bis 15 Mikro-Millimeter.

Später, bei der Untersuchung des Eisens des Herdes, eines seit 30 Jahren in Thätigkeit sich befindenden Hochofens, fanden wir Diamanten von grösseren Dimensionen, leider sehr spröde, so dass zuerst nur Splitter von sehr charakteristischer Form photographirt werden konnten. Diese Diamanten sind durchsichtig, scharfkantig, absorbiren das Licht und haben das seifige Aussehen der natürlichen Diamanten. Die übrigen Eigenschaften stim-

Fig. 4.

Fig. 5.

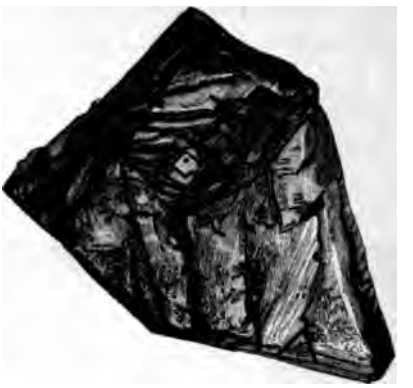
Diamantsplitter aus hartem Eisen auf chem. Wege getrennt von Prof. Dr. A. Rossel und L. Franck.
Holzschnitt nach einer Mikrophotographie von Prof. Dr. L. Tavel in Bern.
Vergrösserung: 180 linear.

Fig. 6.

Diamant von Moissan. Vergrösserung: 500 linear.

men mit den angegebenen überein. Zum Vergleich ist in Fig. 6 der von Moissan im elektrischen Ofen hergestellte Diamant in einer Vergrösserung von 500 linear abgebildet, der in der Sitzung der französischen Akademie vom 12. Februar 1894 beschrieben wurde, und zugleich ein Diamant, von uns aus dem harten Eisen des oben erwähnten Hochofens von Herrn Metz & Cie. in Esch s. a. Luxemburg extrahirt. Unser Diamant besitzt die Form eines regelmässigen Oktaeders (Fig. 7); er hat einen Durchmesser von über 0,5 Millimeter, das Maximum, das wohl nach der angeführten Methode erreichbar ist.

Fig. 7.



IV.

Bei dem erwähnten geglückten Versuch zeigten sich Nebenerscheinungen, welche uns veranlassten, die Untersuchungen mit dem elektrischen Ofen in andern Richtungen auszudehnen. So wurde nämlich beobachtet, dass nicht nur das Eisen, sondern auch der Kalk des Ofens bei der Temperatur von 3000° flüchtig wird und Dämpfe abgibt: verschiedene Substanzen, die man früher als feuerfest betrachtete, zeigten die gleichen Erscheinungen: Kieselsäure, Thon, Kalk; sämmtliche Mineralien, welche die geologischen Schichten der Erdoberfläche bilden, sowie auch sämmtliche Metalle, Platin nicht ausgenommen, verlieren daher über 3000° C. an Gewicht, sie bilden Dämpfe, die sich an den kalten Stellen des Ofens absetzen.

Bei Anwendung einer Stromstärke von 350 Amp. und 70 Volt ben Kupfer, Silber, Platin, Aluminium, Zinn, Gold, Magnesium, Eisen, anium, Silicium, Kalk, Magnesia u. s. w. Dämpfe ab.

Mit einem Worte: sämmtliche Substanzen der Mineralchemie, die r früher als feuerfest betrachteten, sind bei der Temperatur des ktrischen Ofens destillirbar.

Diese Resultate führen zu der Frage, welche Substanzen nun *rklich feuerfest* sind, und in welchem Zustande nach ihrer chemischen tur die Erdoberfläche sich bei der ersten geologischen Periode fand?

Feuerfeste Mineralien.

Im Conservatoire des arts et métiers in Paris, unter Direktion n Herrn Lausseda, dann in der grossartigen Installation der Avenue rudaine der Compagnie Edison wurde die nöthige Kraft (bis zu 1000 mp.) für Versuche dem Gelehrten Moissan zur Verfügung gestellt; es igte sich, dass eine grössere Anzahl beständiger Substanzen bei hoher emperatur erhältlich sind. Diese haben eine ganz andere Zusammen-tzung als die Mineralien, die an der Oberfläche der Erde vorkommen; nz besonders zeichnen sich aus die Kohlenstoffverbindungen der etalle, oder *Carbide*.

Bei Anlass eines Besuches bei Herrn Moissan, Professor der hemie in Paris, im Dezember 1895, habe ich Gelegenheit gehabt iese höchst interessanten Verbindungen, die zum Theil bereits prak-sche Anwendung gefunden haben, kennen zu lernen, da dieser un-müdliche Forscher mit grosser Zuvorkommenheit mir seine reiche mmlung selbsterzeugter Verbindungen zur Verfügung stellte.

Eine grössere Anzahl Carbide zersetzten sich mit Wasser, unter ldung eines Kohlenwasserstoffes und eines Metallhydroxyds.

Das *Aluminiumcarbid* $C_3 Al_4$ krystallisirt in gelben Krystallen ompt. rend. 119, p. 16) und wird im elektrischen Ofen aus Kaolin d Kohle und auch aus Aluminium und Kohle hergestellt. Mit Wasser ldet das Carbid Methan und Thonerdehydrat:

$$C_3 Al_4 + 12 H_2O = 3 CH_4 + 2 Al_2 (OH)_6.$$

r angewendete Strom betrug 300 Amp. und 65 Volt. —

Das *Siliciumcarbid* $Si C$, entstanden unter gleichen Verhältnissen s Kohle und Kieselsäure, bildet ausserordentlich harte Krystalle, die n Namen Carborundum erhalten haben. Die Leistung des Carborun-m als Schleifmittel ist 4mal grösser als diejenige des Corunds, so

dass wir es hier mit einem Produkt zu thun haben, das unter den Schleif- und Polirmitteln eine sehr wichtige Rolle spielen wird. Durch Wasser wird das Siliciumcarbid nicht zersetzt. Gegenüber von Lösungsmitteln ist es fast so widerstandsfähig als Diamant und wird von Flusssäure nur sehr schwer angegriffen. Das spec. Gewicht beträgt 3,22.

Durch geschmolzene Alkalien wird das Carbid angegriffen und zersetzt. Beim Verbrennen im Sauerstoffstrom bei hoher Temperatur bilden sich Kohlensäure und Kieselsäure, so dass durch quantitative Analyse das Carbid von reinem Kohlenstoff unterschieden werden kann. Moissan hat festgestellt, dass der nach seiner Methode hergestellte Kohlenstoff auch Kieselsäure enthält und zwar bis auf 16 %. Der Unterschied zwischen dem krystallisirten Kohlenstoff und Siliciumcarbid ist daher schwer zu ermitteln; möglicherweise enthalten die Moissan-Diamanten, aufgelöst, Siliciumcarbid.[1])

Das *Baryumcarbid* $Ba\ C_2$ wurde aus Baryumcarbonat und Kohle hergestellt, es zersetzt sich mit Wasser unter Bildung von Acetylen und Baryumhydroxyd:

$$Ba\ C_2 + H_2O = Ba\ (OH)_2 + C_2\ H_2\ .$$

Das Strontiumcarbid $S_2\ C_2$ verhält sich ähnlich wie Baryumcarbid. (Compt. rend. *118*, pages 501, 556, 683.)

Das Borcarbid $B_6\ C$ erweckt Aufsehen durch seine Eigenschaft eine noch grössere Härte als Siliciumcarbid zu besitzen und wird bereits in der Stahlfabrikation angewendet. Durch Wasser wird es nicht zersetzt. (Compt. rend. *118*, p. 556.)

Das Molybdäncarbid $Mo_2\ C$ wird von Moissan eingehend studirt; die Eigenschaften sind denjenigen des Siliciumcarbids ähnlich (Compt. rend. 1895, pag. 1320); ebenso werden mehrere Chromcarbide untersucht (Compt. rend. *119*, pag. 145).

Gegenwärtig ist weitaus am wichtigsten wegen seiner industriellen Bedeutung zur Herstellung von Acetylengas das

Calciumcarbid $Ca\ C_2$.

Am 5. März 1894 beschrieb Moissan vor der französischen Akademie die Methode der Herstellung in grösserer Menge dieser Verbindung im elektrischen Ofen (Compt. rend. 1894, pag. 501), nachdem am 12. Dezember 1892 von ihm die Reaction angegeben wurde.

Das Calciumcarbid war schon im Jahre 1862 im kleinen Maassstab von Wöhler hergestellt, aber von anderen Forschern unbeachtet geblieben.

[1]) Compt. rend. *115*. p. 1273; *116* p. 1222; *117* p. 425. 679.

(Wöhler, der als genialer Chemiker bereits die erste organische Synthese ausgeführt, indem er im Jahre 1828 den künstlichen Harnstoff herstellte.) — Annalen der Chemie und Pharmacie 124, Seite 220. (1862.)

Moissan mengt 120 Th. Kalk auf 70 Th. Kohle im Kohlentiegel des elektrischen Ofens und erhitzt mit einem Strome von 350 Amp. und 70 Volt. Es bildet sich im Tiegel, nach 5 bis 6 Minuten eine schwarze, krystallinische Masse, nicht mehr flüchtig, von konstanter chemischer Zusammensetzung von der Formel $Ca\ C_2$; nach der Werthigkeitshypothese handelt es sich um eine ungesättigte Verbindung, wo zwei vierwerthige Kohlenstoffatome *ein* zweiwerthiges Calciumatom binden. Die wichtigste Reaktion auf Calciumcarbid, die bis jetzt bekannt war, besteht in der Einwirkung von Wasser auf diese Substanz. Befeuchtet man $Ca\ C_2$ mit Wasser, so findet eine vollständige Zersetzung der feuerbeständigen Mineralsubstanz statt, und zwar unter Bildung von Kalk und Acetylen.

$$Ca\ C_2 + H_2O = Ca\ O + C_2\ H_2$$

Calciumcarbid, Wasser, Kalk, Acetylen.

Diese Reaktion ist für die Praxis von sehr grosser Bedeutung und es ist mit Bestimmtheit anzunehmen, dass bei der wunderbaren Leuchtkraft dieses Gases, welches mehr als um das fünfzehnfache die Leuchtkraft des Steinkohlengases übersteigt, das Acetylen in allerkürzester Zeit praktische Anwendung finden wird.

Die Herstellung des Acetylens ist sehr einfach, man entwickelt das Gas aus einem Blechgefäss durch regelmässige Zersetzung des Calciumcarbid mit Wasser und führt das Gas direkt zum Brenner.

Die Entwicklung des Acetylens kann auch dadurch regulirt werden, dass man dem Wasser, das als Entwicklungsflüssigkeit dient, irgend eine indifferente Substanz beimengt. Ich habe mittelst einer 50%igen Essigsäurelösung eine sehr regelmässige Entwicklung erhalten. Ein ähnliches Resultat erhält man durch Salzlösungen, Mischungen von Wasser mit Fettkörpern u. s. w.

Das Acetylen ist bereits flüssig erhalten worden und wird in dieser Form bedeutende Anwendung finden.

Wir haben Gelegenheit gehabt, eingehend über Herstellungskosten und Zukunft des neuen Gases Auskunft zu geben und verweisen auf die Spezialarbeiten, die gegenwärtig rasch aufeinander folgen.

Dank dem freundlichen Entgegenkommen der Finanzdirektion der Stadt Bern ist es mir gestattet worden, im elektrischen Werk einen elektrischen Ofen aufzustellen. Zu diesem Zweck habe ich im Jura (St. Ursanne) ein sehr geeignetes Material im weichen Kalkstein, der

dort vorkommt, zur Herstellung des Ofens gefunden. Zur Beschaffung des Materials war mir in sehr verdankenswerther Weise Herr E. Schmieder in Pruntrut behülflich.

Es zeigte sich dieser Stein ebenso brauchbar als der Kalkstein der Kreideformation der Umgebung von Paris, so dass, wenn man über eine genügende Kraft verfügt, der Ausführung der wichtigen Versuche in Bern nichts im Wege steht.

Mit Beihilfe des Herrn Léon Franck habe ich nun eine Reihe von feuerfesten Verbindungen hergestellt, es sind dies die Verbindungen des Phosphors mit den Metallen, namentlich des Phosphor-Aluminiums, welche wir gegenwärtig einer nähern Untersuchung unterwerfen. Diese Verbindungen verhalten sich ähnlich wie die Carbide, widerstehen sehr hohen Temperaturen und entwickeln mit Wasser Phosphorwasserstoffe.

Eine dieser Verbindungen zersetzt sich wahrscheinlich nach der Gleichung

$$2\,(P\,Al) + 3\,H_2O = 2\,(P\,H_3) + Al_2\,O_3.$$

Je nach der Temperatur bilden sich aber Verbindungen von Phosphor und Aluminium in sehr verschiedenen Verhältnissen, die später beschrieben werden sollen.

Nicht unwichtig ist, festzustellen, dass in Folge der Publikationen von Wöhler und Moissan die von Willson in Amerika für die Herstellung des Calciumcarbids verlangten Patente, indem er Moissan seine wichtige Entdeckung streitig machen wollte, ungültig sind. Man darf hier auch nicht unterlassen zu erwähnen, dass Bullier auf die Entdeckung Moissan's ein deutsches Reichspatent erhalten hat (1894).

Bevor wir das Calciumcarbid verlassen, will ich noch erwähnen, dass es uns möglich war, mit Hülfe dieser Verbindung eine bedeutende Menge Luftstickstoff zu binden.

Die Reaktion wurde am 16. Dezember 1895 der französischen Akademie vorgelegt. Wenn man nämlich Calciumcarbid mit Magnesium in dem kleinen Tiegel mit der Flamme des Bunsenbrenners erwärmt, so verbrennt der Kohlenstoff zu Kohlensäure, das gebildete Calcium-magnesium verbrennt dann unter Bildung von Kalk und Magnesium-stickstoff.

$$Mg_3\,N_2$$

Wird die Masse nach dem Erkalten mit Wasser behandelt, so entsteht Ammoniak.

$$Mg_3\,N_2 + 3\,H_2\,O = 3\,Mg\,O + 2\,NH_3.$$

Diese Reaktion ist insofern von Bedeutung, als dadurch bewiesen wurde, dass der Sauerstoff und der Stickstoff der Luft zu gleicher Zeit gebunden werden können.

Seither zeigte Maqueen, dass Kalk und Magnesium, an der Luft erhitzt, Magnesiumstickstoff bilden. Die Absorption des Sauerstoffes und des Stickstoffes ist bei dieser Reaktion so vollständig, dass sie gestattet, Argon aus der Luft rein darzustellen.

V.

Diese überraschenden Resultate der Versuche bei hoher Temperatur zeigen deutlich, dass Stickstoff, Kohlenstoff, Silicium, Bor, Phosphor bei der Bildung der ersten geologischen Schichten ursprünglich ohne Sauerstoff direkt mit den Metallen gebunden waren.

Die Reaktionen im elektrischen Ofen entsprechen den Verhältnissen, die bei der Bildung der ältesten geologischen Formationen vorkommen mussten. Organische Substanzen existirten nicht, der Kohlenstoff war ausschliesslich als Carbid vorhanden. Es ist anzunehmen, dass diese schwer flüchtigen Verbindungen von gleicher Zusammensetzung auch jetzt in den im glühenden Zustand sich befindenden Himmelskörpern vorkommen; der Stickstoff war ebenfalls gebunden, ähnlich wie im künstlich hergestellten Magnesiumstickstoff $Mg_3 N_2$.

Ich glaube, gestützt auf diese Thatsachen und auf die ausgeführten Versuche, die Ansicht aussprechen zu können, dass der Grund der Erdbeben und der vulkanischen Erscheinungen zum Theil auf die chemische Zersetzung feuerfester Materialien der untern geologischen Schichten zurückzuführen ist. Alle Vulkane liegen mit wenigen Ausnahmen auf Inseln oder in der Nähe der Küste, was sehr wahrscheinlich erscheinen lässt, dass das Wasser bei Eruptionen eine wichtige Rolle spielen muss. Ob man nun nach der Laplace-Kant'schen Theorie die Existenz des «Centralfeuers» annimmt oder nicht, so erscheint doch sehr wahrscheinlich, dass über der Grenzebene zwischen Erdkruste und flüssigem Erdinnern feuerfeste Massen von der oben angegebenen Zusammensetzung vorkommen müssen. Es sind das die Massen, die erstarrten ohne mit Wasser vorher in Berührung gekommen zu sein.

Die neuern Beobachtungen der Erdbeben scheinen festzustellen, dass diese unabhängig von den Eigenschaften des sehr tiefliegenden Erdinnern sein müssen; man ist immer mehr geneigt an chemische Prozesse zu denken, welche die Erderschütterungen und Eruptionen verursachen. Die nähere Erklärung dieser Prozesse und namentlich

die Erklärung der Ursachen des Herausschleuderns von Mineralmassen aus dem Innern sind bis jetzt aber unerklärt geblieben.

Als eine der Ursachen ist nun die Einwirkung von Wasser auf die feuerfesten Materialien, die unter der uns bekannten geologischen Schicht sich befinden müssen, namentlich auf Carbide annehmbar. Die ungeheure Gasmasse, die bei der chemischen Reaktion entstehen muss, erklärt sowohl die Erderschütterung wie das Heben des Materials im geschmolzenen und halbgeschmolzenen Zustande der Vulcane. Dieses Material besteht aus aufgeschlossenen Silicaten, die den geschmolzenen Zustand ihrem Kalkgehalt verdanken ; die durch den chemischen Prozess gebildete Kohlensäure und der Wasserdampf entweichen, um später an dem Verwitterungsprozess der Lava Theil zu nehmen, während die brennbaren Gase den sichern Beweis ihrer Anwesenheit durch die Erzeugung leuchtender Flammen darbringen. Die brennbaren Gase entzünden sich an der Luft, da sie stets von selbstentzündlichem Phosphorwasserstoff begleitet sind. Das Material der geologischen Schichten, welche die Oberfläche der Erde bilden, ist das Resultat derselben Reaktion ; Kalk, Kalkstein, Magnesia haben sich in Folge der Zersetzung der feuerfesten Materialien durch Wasser gebildet, die Gase, die aus Silicium, Kohlenstoff, Bor und Phosphorverbindungen bestanden, haben als Verbrennungsprodukte Kieselsäure, Kohlensäure, Borsäure und Phosphorsäure geliefert.[1])

Die obern geologischen Schichten sind aus der Asche gebildet worden, die in Form der Carbonate und Silicate sich ablagerte, und in Folge des später eintretenden Verwitterungsprozesses hat die Erdoberfläche die heutige Gestalt angenommen.

An der Oberfläche der Erde finden wir einige Mineralien, die, von beständigerer Natur als die Carbide, vorkommen können. Es sind dieses die zahlreichen Schwefelverbindungen oder Sulfide, die an die Carbide erinnern, sich aber weniger leicht durch Wasser zersetzen und daher in den oberen geologischen Schichten sich befinden können.

VI.

Am Schluss dieser Arbeit angelangt, möchte ich vor Allem auf den wissenschaftlichen Werth der genannten Reaktionen aufmerksam machen, sodann auf deren Bedeutung für die Praxis, wo sie ebenfalls von grossem Einfluss werden können. Wir wissen nicht, ob in aller-

[1]) Es käme hier die angefochtene Hypothese von Mendeléjeff über die Bildung des Petroleums wieder zur Geltung.

nächster Zeit solche Verbindungen berufen sind, eine bedeutende Rolle zu spielen, und diejenigen, die über eine genügende Kraft verfügen, werden auch die Ersten sein, die davon Nutzen ziehen.

Diese Thatsache sollte uns in Bern ermuntern, die nothwendige, verhältnissmässig kleine Anstrengung zu machen, Wasserkraft zu gewinnen, und nicht länger zu zögern, unsern mächtigen Fluss, die Aare, zu zwingen nicht mehr vorbeizufliessen, ohne uns seinen Tribut an Kraft voll zu bezahlen. Die Anwendung der Wasserkräfte, in Verbindung mit der erzeugten elektromotorischen Kraft, wird sicher zu der rationellen Verwerthung der Energie führen. Wir besitzen gegenwärtig als praktischen Krafttransport die Accumulatoren ; es ist aber nicht unmöglich, dass die Energie in einer chemischen Verbindung billig aufgespeichert werden kann, die für die Uebertragung der Kraft von unschätzbarem Werthe sein müsste, wie es schon für das Calciumcarbid der Fall ist.

Damit habe ich endlich zeigen wollen,

1. dass die Chemie trotz ihrer grossen Entdeckungen, namentlich an neuen chemischen Verbindungen, immer noch eine reine Experimental-Wissenschaft geblieben ist, und

2. dass für die Zukunft die neuen bei hoher Temperatur gewonnenen chemischen Verbindungen die Aufmerksamkeit der Gelehrten und der Praxis auf sich ziehen müssen, indem durch dieselben ein neues Feld der Thätigkeit für die Forschung eröffnet wird.

G. Huber.

Die Planetoiden.

(Vorgetragen in der Sitzung vom 25. Jan. 1896.)

Die *Planetoiden* oder *Asteroiden* sind sehr kleine Planeten, welche zwischen der Mars- und Jupiterbahn in meist sehr lang gestreckten Ellipsen um die Sonne kreisen.

Schon dem frühesten Alterthum waren fünf Planeten bekannt: *Merkur*, *Venus*, *Mars*, *Jupiter* und *Saturn*, welch letzerer in einer mittleren Entfernung von 190 Millionen geographischen Meilen um die Sonne kreist. Die *Erde* selbst wurde bis auf *Kopernikus* Zeiten, bis gegen die Mitte des 16ten Jahrhunderts und zum grossen Theil noch viel später, nicht als Planet, sondern als Mittelpunkt des Weltalls betrachtet, um welche sich Sonne, Mond und die sämmtlichen übrigen Gestirne bewegten. Allerdings kann in gewissem Sinne die Erde noch jetzt als Mittelpunkt des Weltalls angesehen werden, wie jeder Punkt des Weltraumes. Denn weil unser Auge nach allen Seiten unbegrenzt, also *gleichweit* in den Weltraum vordringt, so erscheint uns das Himmelsgewölbe als eine ungeheure Hohlkugel von unbestimmtem Radius, in deren Mittelpunkt wir stehen, und an deren Innenseite die Gestirne sich zu befinden scheinen. Weil dieselbe Erscheinung in jedem Punkt des Weltraumes stattfindet, so kann jeder Punkt als Mittelpunkt des Weltalls angesehen werden, also auch der Mittelpunkt der Erde oder der der Sonne, wie dies in der mathematischen Geographie und sphärischen Astronomie auch in der That geschieht. Der grosse französische Gelehrte *Pascal* sagt hierüber treffend: «Das Weltall ist eine Kugel, deren Mittelpunkt überall und deren Peripherie nirgends ist.»

Schon im Alterthum wurde, allerdings ganz unbestimmt, die Ansicht geäussert, dass es ausser diesen 5 noch andere Planeten gebe.

Diese Vermuthung tritt aber erst bestimmter auf bei *Kepler*, der in seinem *Mysterium Cosmographicum* die bestimmte Ansicht äussert, dass zwischen Mars und Jupiter noch ein Planet vorhanden sei. Diese Vermuthung Kepler's wurde aber erst in der zweiten Hälfte des 18ten Jahrhunderts wieder aufgenommen, zuerst von *Lalande*, dem Direktor der Pariser Sternwarte, und nachher von *Joh. Dan. Titius* in Wittenberg, von *Bode* in Berlin und *Wurm*. Diese machten auf die Lücke aufmerksam, die sich in der sonst ununterbrochenen Reihe der übrigen Planeten zwischen Mars und Jupiter befand; sie waren umsomehr davon überzeugt, dass sich in dieser Lücke ein Planet befinden müsse, als Titius im Jahre 1766 eine empirsche Formel fand, nach welcher sich die Abstände der Planeten von der Sonne in eine *geometrische Progression* ordnen lassen. Diese Formel, welche später im Jahre 1782, von Bode wieder in Erinnerung gebracht wurde, ist bekannt unter dem Namen des *Gesetzes von Titius-Bode*, später auch *Wurm'sche Reihe* genannt.

Setzt man den *mittleren Abstand der Erde von der Sonne*, 20 Millionen Meilen, den *Erdbahn-Halbmesser*, gleich der Einheit, oder die Entfernung des äussersten damals bekannten Planeten Saturn von rund 200 Millionen Meilen gleich 10, so werden die mittleren Entfernungen der Planeten von der Sonne annähernd durch die Formel ausgedrückt, welche die genannte geometrische Reihe darstellt:

$$d = 0{,}4 + 2^n . 0{,}3$$

Vermittelst derselben ergibt sich für

$$n = -\infty,\ 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4$$

die folgende Tabelle:

Planet	*Berechnete Entfernung*	*Wirkliche mittl. Entfernung*	*Abweichung von der Formel*
Merkur	$0{,}4 = 0{,}4$	0.387	— 0,013
Venus	$0{,}4 + 0{,}3 = 0.7$	0,723	+ 0,023
Erde	$0{,}4 + 2 . 0{,}3 = 1$	1	
Mars	$0{,}4 + 4 . 0{,}3 = 1{,}6$	1,524	— 0.076
—	$0{,}4 + 8 . 0{,}3 = 2{,}8$	—	—
Jupiter	$0{,}4 + 16 . 0{,}3 = 5{,}2$	5,203	+ 0.003
Saturn	$0{,}4 + 32 . 0{,}3 = 10{,}0$	9,539	— 0.461

Es musste also, um jene Lücke auszufüllen, ein Planet vorhanden sein, in der mittleren Entfernung von 2,8 Erdbahnradien oder 56 Millionen Meilen.

Unterdessen hatte der grosse englische Astronom *Herschel* ebenfalls den Gedanken gefasst und ausgeführt, mit seinem lichtstarken Spiegelteleskopen den Himmel nach neuen Planeten zu durchsuchen, und eine der ersten Früchte seiner Durchmusterung des Himmels war, am 13. März 1781, die Entdeckung eines neuen grossen Planeten, des *Uranus*, der in einer mittleren Entfernung von 19,182 Erdbahnhalbmessern oder 384 Millionen Meilen um die Sonne kreist, wodurch der Durchmesser des Sonnensystems auf das Doppelte erweitert wurde.

Der neu gefundene Planet, dem nach der Titius'schen Formel die Entfernung:

$$0{,}4 + 2^6 \cdot 0{,}3 = 0{,}4 + 64 \cdot 0{,}3 = 19{,}6$$

zukam, während seine wirkliche Entfernung 19,182 Erdbahnradien ist, passte so gut in die Reihe, dass man das Gesetz als richtig annahm.

Zach, 1787—1806 Direktor der von ihm gegründeten Sternwarte auf dem Seeberg bei Gotha, unternahm infolge dieser Uebereinstimmung, gestützt auf gewisse hypothetische Voraussetzungen, die Berechnung der Bahnelemente des fehlenden Planeten. Er begann im Jahre 1787 eine Durchmusterung der Sterne des Thierkreisgürtels, in der Hoffnung dabei auf den fehlenden Planeten zu stossen. *Zach* sah aber bald ein, dass die Aufgabe diesen Planeten zu finden ähnlich sei derjenigen, «eine Stecknadel in einem Heubündel zu suchen» und die Kräfte eines Einzelnen übersteige.[1]) Es wurde daher auf dem von *Lalande* im Jahre 1796 in *Gotha* und auf dem von *Zach* im Herbst 1800 zu *Lilienthal* bei Bremen veranstalteten *astronomischen Congress* eine Arbeitstheilung in Vorschlag gebracht. Es sollte eine eigene Gesellschaft gegründet und 24 Astronomen gewonnen werden, von denen je zwei eines der 12 Zeichen des Thierkreises zu durchmustern, genaue Karten zu bearbeiten und diese immer wieder mit dem Himmel zu vergleichen hätten, um auf diese Weise den fehlenden Planeten zu finden.

An der Conferenz zu Lilienthal betheiligte sich auch *Joh. Hieron. Schröter*, ein Jurist von Beruf, Justizrath und Oberamtmann zu Lilienthal, der sich für die Astronomie interessirte und um sie praktisch

[1]) Dr. R. Wolf. Handbuch der Astronomie 1893.

betreiben zu können, daselbst eine mit guten Instrumenten ausgerüstete Sternwarte errichtete, die 1813 von den Franzosen niedergebrannt wurde. Schröter's wichtigste Arbeiten beziehen sich auf Untersuchungen des Mondes und der Planetenoberflächen.

An der genannten Conferenz nahm ferner *Wilh. Olbers* Theil, der sich als Arzt in Bremen niedergelassen hatte und welcher die Astronomie nur aus Liebhaberei trieb, diese aber doch in allen Theilen beherrschte und wesentlich förderte. Mit Vorliebe beschäftigte er sich mit den Kometen.

Zu den von dem Lilienthaler Congress auserwählten 24 Astronomen gehörte auch *Joseph Piazzi*, Direktor der Sternwarte in Palermo. Bevor er aber die Anzeige hiervon erhielt, hatte er nicht nur den ihm zugedachten Theil, sondern die ganze Aufgabe auf eigene Faust gelöst. Piazzi war schon seit mehreren Jahren beschäftigt, an der Hand des sehr unvollkommenen *Wollaston'schen Catalogs*, ein genaues Fixsternverzeichniss aus der Gegend des Thierkreisgürtels herzustellen. Wegen einer falschen Notiz in diesem Catalog untersuchte er die Gegend im Sternbilde des Stiers, wo der betreffende Stern stehen sollte, genauer, zu welchem Zwecke er alle Sterne aufzeichnete. Auf diese Weise hatte er in der Nacht vom 1. Januar 1801, also gerade am Neujahrhundertstage, einen kleinen Stern beobachtet und verzeichnet, der am folgenden Abend nicht mehr an derselben Stelle stand, während in einiger Entfernung ein vorher dort nicht gesehener Stern sich vorfand, und am nächst folgenden Abend zeigte sich eine abermalige Ortsveränderung. Piazzi hielt sich daher überzeugt, einen Wandelstern gefunden zu haben, und zwar dachte er zuerst an einen Kometen. Er setzte seine Beobachtungen fort, bis am 11. Februar ungünstige Witterung und bald darauf eine Krankheit seine Beobachtungen unterbrachen. [1])

Piazzi hatte sofort mehreren Astronomen, so *Oriani* in Mailand und *Bode* in Berlin, seine Entdeckung mitgetheilt, aber in Folge der damaligen Kriegszustände trafen diese Briefe in Berlin erst am 20. März, in Mailand erst am 5. April ein, wo der neu entdeckte Himmelskörper wegen seines Standes zur Sonne nicht mehr zu beobachten war. Jedoch gelangten Bode und Zach, nach genauer Vergleichung seiner Bewegung sofort zu der Ueberzeugung, dass der neue Wandelstern kein Komet, sondern höchst wahrscheinlich der gesuchte, der

[1]) Mädler. Der Wunderbau des Weltalls.

Lücke angehörige Planet sei, welcher Ansicht nach einigem Zögern auch Piazzi beitrat. Er nannte den neuen Planeten, kraft seines Entdeckerrechtes, *Ceres*.

Die bis zum 11. Februar reichenden Beobachtungen Piazzi's waren aber die einzigen, die man erhalten hatte. Es handelte sich nun darum, aus diesen 6 wöchentlichen Beobachtungsresultaten die Bahn der Ceres so genau abzuleiten, um sie im nächsten Winter wieder aufzufinden, wenn sie in hinreichender Entfernung von der Sonne wieder gesehen werden konnte. Diese Bahn aber aus einer so kurzen Beobachtungsreihe abzuleiten, schien nach den bis dahin bekannten Methoden unausführbar. Viele versuchten sich an dieser Aufgabe, aber man erhielt so viele verschiedene Resultate, dass die Hoffnung, die Ceres wieder zu finden, je länger je mehr schwand.

Da entdeckte ein noch wenig bekannter, junger Mathematiker, *Dr. Gauss* in Göttingen, eine neue Methode, mit der man leichter und genauer als bis dahin aus Beobachtungen eines so kleinen Bogens der Bahn eines Planeten die *ganze Bahn* bestimmen kann. Er berechnete nach dieser seiner Methode, an der Hand der sehr genauen Beobachtungen Piazzi's, die Bahn der Ceres und gab an, wo sie im Januar 1802 erscheinen musste.

Die Arbeit von Gauss fand aber wenig Beachtung, nur *Olbers* in Bremen prüfte sie genauer, fand ihren grossen Werth und legte sie seinen Beobachtungen zu Grunde. Und so gelang es ihm, am Jahrestage der Entdeckung, am 1. Januar 1802 die fast verloren geglaubte Ceres wieder zu finden. Die Entdeckung war nun gesichert, denn vermittelst dieser zweiten Erscheinung war es nun möglich, die Bahn der Ceres so genau zu berechnen, dass sie zu jeder Zeit sofort aufgefunden werden kann.

Die Helligkeit der Ceres ist so gering, dass dieser Planet auch für das schärfste unbewaffnete Auge unsichtbar bleibt. Man musste hieraus auf eine sehr geringe Grösse, oder auf eine geringe Reflexionsfähigkeit für das Licht an seiner Oberfläche schliessen. In der That ist eine genaue Messung des Durchmessers dieses *Planetoiden* erst im Jahre 1894 gelungen, wovon später die Rede sein wird.

Die *mittlere Entfernung* der Ceres von der Sonne ergab sich zu 2,7672 Erdbahnhalbmessern oder nahezu 56 Millionen Meilen und dieser Werth passte so gut in die Titius'sche Reihe, dass man allgemein die Lücke zwischen Mars und Jupiter als ausgefüllt betrachtete, und sich mit dem gefundenenen kleinen Planeten zufrieden gab.

Olbers hatte an der Stelle, an welcher er die Ceres entdeckt hatte, die umliegenden Sterne besonders genau beobachtet und verzeichnet, um nach einem Umlauf der Ceres diese um so leichter wieder zu finden. Da entdeckte er schon am 28. März 1802 fast an derselben Stelle wie vorher die Ceres, einen zweiten kleinen Planeten, den er *Pallas* nannte, dessen mittlerer Sonnenabstand von 2,768 Erdbahnradien nur sehr wenig von dem der Ceres verschieden ist. Dieser Planet war erst 3 Wochen beobachtet worden, als *Gauss* schon mit grosser Genauigkeit seine Bahn bestimmte. Diese Entdeckung, dass man aus einem so kleinen beobachteten Bogen, die ganze Bahn eines Planeten bestimmen könne, setzte die Mathematiker und Astronomen fast noch mehr in Erstaunen, als die Entdeckung der neuen Planetoiden selbst und man erkannte es mit Bewunderung, dass Deutschland in Gauss einen Mathematiker besitze, der mit den Franzosen *Laplace* und *Lagrange* einen gleichen Rang einnehme.[1])

Die ganz unerwartete Entdeckung des zweiten Planetoiden, Pallas, verursachte vielen Zweifel. Einige hielten Pallas gar nicht für einen Planeten; die starke Neigung seiner Bahnebene gegen die Ebene der Erdbahn, die *Ekliptik*, welche Neigung beinahe 35° beträgt, seine lang gestreckte elliptische Bahn, und eine starke Nebelhülle die *H. Schröter* gesehen hatte, schienen auf einen Kometen zu deuten. Allein die späteren Beobachtungen und sein ganzes Verhalten sprachen für einen Planeten.

Einige Astronomen, in erster Linie *Olbers* nahmen daher eine *Theilung* eines früheren grösseren Planeten in zwei oder mehrere Planeten an. Diese Annahme hatte den günstigen Umstand für sich, dass die Bahnen der Ceres und Pallas an einem Orte des Thierkreises sehr nahe zusammen kamen. Man beobachtete desshalb jene gemeinsame Region, in welcher die Theilung vor sich gegangen sein sollte, genauer und wirklich fanden *Harding* in Göttingen am 1. September 1804 in den Fischen einen 3. Planetoiden, die *Juno*, im mittleren Sonnenabstand 2,67 und *Olbers* am 29. März 1807 in der Jungfrau einen 4., die *Vesta*, im mittleren Abstand 2,362 Erddistanzen.

Die mittleren Abstände der 4 neu entdeckten Planetoiden weichen nur wenig von einander und von dem, der Reihe des Titius entsprechenden Abstand 2,8 ab. *Bode* äussert sich desshalb folgenderweise hierüber:[2])

[1]) Brandes. Vorlesungen über die Astronomie 1827.

[2]) Dr. Joh. Elert. Bode. Betrachtungen der Gestirne und des Weltgebäudes. Berlin 1816.

«Jene harmonische, nun auf's neue vollständiger bestätigte Progression in den Abständen der Planetenbahnen, wird auch keineswegs dadurch umgestossen, dass statt dem erwarteten einen Planeten bis jetzt deren 4 entdeckt worden sind, da diese fast in der nämlichen Entfernung von der Sonne sich aufhalten. Dass alle 4 in eigenen Bahnen nach eben der Richtung wie die übrigen um die Sonne laufen, macht sie zu Hauptplaneten. Ceres erscheint nur als Stern 7. Grösse und ist daher wirklich nur ein kleiner Weltkörper, oder er hat, wie es viel glaublicher ist, eine starke Atmosphäre um sich, so dass er das Sonnenlicht nur schwach von seiner Oberfläche zurückwirft und erscheint desshalb so klein und lichtschwach.»

Die ersten eingehenderen Beobachtungen der Oberflächen der 4 neuen Planeten gleich nach ihrer Entdeckung sind von *Schröter* ausgeführt worden. Er fand, dass diese Himmelskörper von ungeheuren Atmosphären umgeben seien, so dass sie als Zwischenglieder angesehen wurden, welche die Kette der Planeten mit den Kometen verbinden.

Nach Schröter's Messungen beträgt der Halbmesser der *Ceres* 176 Meilen, die Höhe ihrer Atmosphäre, Nebelhülle, zu verschiedenen Zeiten 65—147 Meilen, also fast gleich dem Halbmesser des Planeten. Oft, sagt Schröter, war der Kern der Ceres scharf begrenzt und liess sich, sowie die umgebende Lichtatmosphäre messen, zuweilen sah man bloss den Lichtnebel in dem der Planet schwimmt.

Den Halbmesser der *Pallas* fand er zu 227 Meilen, die Höhe ihrer Atmosphäre 102 Meilen. Bedenkt man, dass die Höhe der irdischen Atmosphäre etwa 10 Meilen beträgt, so kann man sich eine ungefähre Vorstellung machen von der Mächtigkeit dieser Gashüllen,

Dabei ist nicht zu vergessen, sagt Schröter, dass dies nur der untere Theil der Atmosphäre ist, der stark genug ist, das Sonnenlicht bis zur Erde zu reflektiren, so dass sein Durchschnitt gemessen werden kann. Wie weit mag sich also die feinere Atmosphäre ausdehnen! Welch ungeheure Revolutionen, müssen in diesem Dunstkreis vor sich gehen, der den unsrigen 10 bis 14mal übertrifft und der sich bald auf die Hälfte zusammenzieht, bald auf das Doppelte ausdehnt! und der sich uns, wie die Ceres, bald in einem röthlichen. bald in bläulichem, bald in weisslichem Lichte zeigt.

An *Juno* bemerkt man zwar nichts von einem kometenartigen Nebel, indes sieht man aus ihrem bald stärkeren bald schwächeren Licht, dass ihre Atmosphäre verhältnissmässig weit grösser ist und beträchtliche Veränderungen erleidet.

Vesta fällt durch ihr ausserordentlich starkes Licht auf woraus man schliessen möchte, dass sie ein sehr harter, felsiger und gebirgigter Körper ist, von nur einer schwachen Atmosphäre umgeben.

Soweit die Beobachtungen Schröter's.

Spätere, mit vollkommeneren und lichtstärkeren Fernrohren ausgeführte Beobachtungen zeigten keine Spur von einer Atmosphäre, die von Schröter gesehenen Nebelhüllen erwiesen sich als optische Täuschungen in seinen unvollkommenen Teleskopen, es besitzen diese Himmelskörper entsprechend ihrer Kleinheit nur äusserst geringe Atmosphären. Also keine Nebelhüllen, nichts kometenartiges, ihr ganzes Verhalten charakterisirte die 4 neu entdeckten Himmelskörper als Planeten, wegen ihrer Kleinheit erhielten sie den Namen *Planetoiten* oder *Asteroiden.*

Olbers hat die früher erwähnten Nachsuchungen nach neuen Planeten noch bis zum Jahre 1817 fortgesetzt; dabei behielt er hauptsächlich die beiden Stellen in den Sternbildern der Jungfrau und Fische im Auge, in welchen die scheinbaren Durchkreuzungspunkte der Ceres- und Pallasbahn liegen, welche Stellen somit muthmasslich auch von allfälligen andern Bruchstücken des als zertrümmert angenommenen grossen Planeten, von Zeit zu Zeit passirt werden mussten. Eine weitere Planetenentdeckung gelang ihm aber nicht und es blieb bis Ende 1845 also 39 Jahre lang, bei *7 grossen und 4 kleinen Planeten.*

Da fand am 8. Dezember des Jahres 1845 ein eifriger Liebhaber der Astronomie, der Postmeister *Karl Ludw. Hencke* zu Driesen in der Neumark, auf Grund von ihm selbst entworfener Spezialkarten, einen neuen fünften Himmelskörper aus der Familie der Planetoiden, der *Asträa* genannt wurde. Im Jahre 1847 entdeckte Hencke noch einen sechsten Asteroiden und eröffnete damit eine neue Periode von Planetoidenentdeckungen deren Ausdehnung alle Erwartungen übertraf und die noch heute nicht abgeschlossen ist.

Von dieser Zeit an ist kein Jahr, ja in neuester Zeit sogar fast kein Monat vergangen, in dem nicht neue Planetoiden entdeckt wurden: von 1845—1850 wuchs ihre Zahl um 6.

Aber erst von 1854 an wurde die Anzahl der entdeckten Asteroiden grösser, auf Grund der genauen vom Pariser Observatorium herausgegebenen Himmelskarte aus der Gegend des Thierkreisgürtels. Einzelne Astronomen widmeten sich mehr oder weniger speziell der Aufsuchung von Planetoiden, so *Hind* und *Pogson* in Nottingham, *de*

Gasparis in Italien, *Rob. Luther* und *Wilh. Tempel* in Deutschland, *Palisa* in Wien, *Coggia* und *Charlois* in Nizza, *Peters* und *Watson* in Nordamerika u. s. w.

Von 1850—1860 wuchs die Anzahl der Asteroiden um 47, von diesen haben Hind 10, Goldschmidt 12, Gasparis 7, Luther 8 u. s. w. entdeckt.

Von 1860—1870 wurden 55 Planetoiden entdeckt,
» 1870—1880 » 99 » »
» 1880—1890 » 82 » »
und im Jahr 1891 » 21 » »

Bis zum Dezember 1891 wurden alle Planetoiden, im Ganzen 322, vermittelst genauer Sternkarten entdeckt, und der Grund, warum von 1807—1845 kein neuer Planetoid entdeckt wurde, liegt nicht, wie man vielleicht meinen könnte, in dem Fehlen lichtstarker Fernrohre, sondern in dem *Mangel genauer Sternkarten.*

Der hellste Planetoid ist nämlich der 4. der zuerst entdeckten, die *Vesta;* er ist der einzige, der gerade noch mit blossem Auge gesehen werden kann, an den Grenzen der Sichtbarkeit als ein schwacher Stern 6. Grösse. Ceres ist von der 7. Grösse.

Ferner sind von den bis jetzt gefundenen:

7 Planetoiden von der 8. Grösse
25 » » » 9. »
69 » » » 10. »
157 » » » 11. » u. s. w.

bis hinunter zur 15. Grösse.

Es stehen nun schon gegen 30,000 Fixsterne der 7. und 8. Grösse am Himmel und geht man unter diese Grössenklassen hinab, so hat man mit Hunderttausenden und Millionen von teleskopischen, dem freien Auge unsichtbaren Sternen zu thun. Zu Anfang dieses Jahrhunderts waren aber noch nicht einmal alle Sterne 6. Grösse, geschweige denn die darunter liegenden Klassen in den Sternkarten eingetragen, da war es eben unmöglich, aus diesen lichtschwachen Sternen einen neuen Planeten herauszufinden, der sich von einem schwachen Fixsterne in gar nichts unterscheidet. Nur vermittelst sehr ausführlicher Sternkarten und Katalogen war auf neue Entdeckungen zu hoffen. Auf die Herstellung genauer Sternkarten waren dahier lange Zeit hindurch die vereinigten Bemühungen der Astronomen gerichtet[1]).

[1]) Mädler, Der Wunderbau des Weltalls.

Gegenwärtig sind schon mehrere Hunderttausend Sterne katalogisirt und in Karten eingetragen und an den internationalen Kongressen von 1887, 1889 und 1891, an denen 16 Nationen mit 56 Astronomen vertreten waren, wurde beschlossen, den ganzen Himmel photographisch auf 12,000 Platten aufzunehmen, deren jede von 16 cm^2. Fläche etwa 2° im Quadrat am Himmel umfasst. An der Arbeit betheiligen sich 20 Sternwarten, sie soll bis zum Jahre 1900 beendigt sein. Alle Aufnahmen in eine ganze Karte vereinigt, überdecken eine Kugel vom Radius 3,43 m. Es werden 2 Serien hergestellt; die erste enthält, bei kurzer Expositionszeit der Platten, alle Sterne bis zur 11. Grösse, im Ganzen etwa $1^1/_2$ Millionen Sterne; die zweite Serie enthält, bei längerer Expositionszeit, alle Sterne bis zur 14. Grösse, ihre Zahl beträgt etwa 15—20 Millionen.

Vermittelst der neuen, genauen Sternkarten gelang es dann vom Jahr 1845 bis Ende 1891 im Ganzen 318 Planetoiden durch planmässiges Aufsuchen zu entdecken.

Da trat Ende 1891 eine neue Phase in der Geschichte der Planetoiden-Entdeckungen ein, durch die *Heranziehung der Photographie*. Der erste, auf photographischem Wege entdeckte Planetoid, der 323., wurde am 20. Dezember 1891 von *Max Wolf* in Heidelberg gefunden, welcher auch diese Methode Ende November 1891 in die Planetenastronomie eingeführt hat.

Durch die Einführung der photographischen Methode hat nebst anderm auch die Art der Auffindung der Asteroiden eine andere Gestalt angenommen. Früher wurde zu diesem Zwecke eine mühsame, zeitraubende Vergleichung des Himmels mit einer sehr genauen Sternkarte der betreffenden Gegend vorgenommen, wobei sich ein Planet dadurch verrieth, dass an einer leeren Stelle der Karte ein Stern angetroffen wurde. Um sich von der planetarischen Natur desselben vollständig zu überzeugen, wurde wenn möglich noch in derselben Nacht eine Ortsveränderung konstatirt. Jetzt aber ist die Auffindung eines Planetoiden in gewissem Sinne in das Studirzimmer verlegt worden. Auf einer 2—3 Stunden hindurch ausgesetzten photographischen Platte hinterlässt ein Planet, wegen seiner Bewegung eine kleine Linie als Spur zurück, während die Fixsterne als kleine Scheibchen erscheinen. Es sind aus diesem Grunde die Platten nach ihrer Entwickelung sehr sorgfältig nach den auf ihnen enthaltenen Strichen zu untersuchen, was besonders in sternreichen Gegenden eine mühsame und zeitraubende Arbeit ist. Aber man bedarf jetzt

nur drei Stunden heiteren Himmels, um beim Forschen nach einem Planetoiden mittelst Photographie ebensoviel zu erreichen, als früher bei achtzigstündiger Arbeit. Wird nun während einer längere Zeit andauernden Periode heiteren Wetters eine grössere Zahl Platten gewonnen, so kann der Beobachter mit dem Untersuchen derselben nicht gleichen Schritt halten. Manche gelangen daher erst nach mehreren Tagen, selbst Wochen nach ihrer Aufnahme zur Untersuchung, wodurch das Auffinden der auf ihnen enthaltenen Planeten ebenso lange verzögert wird.[1])

Anfangs wählte man für die Asteroiden, wie für die grossen Planeten besondere *Zeichen,* so erhielt z. B. die zuerst entdeckte Ceres, als Göttin der Ernte das Zeichen einer Sichel, nämlich:

Ceres ⚳, Pallas ⚴, Juno ⚵, Vesta ⚶,

u. s. w. Weil sich aber ihre Zahl sehr vermehrte, wurden ihnen einfach im Kreise eingeschlossene, fortlaufende Nummern gegeben, welche die Reihenfolge ihrer Entdeckung angeben, z. B.:

Ceres ①, Pallas ②, Urania ㉚, Ismene ⑱⑨ u. s. w.

Früher hat man allen neu entdeckten Planetoiden gleich die definitive fortlaufende Nummer nach der Zeit ihrer Entdeckung gegeben; daraus entstanden aber Irrungen, weil unter denselben sich hie und da ein älterer, verlorener, der schon früher eine Nummer erhalten hatte, befand. Nun bezeichnet man die neu aufgefundenen Asteroiden *provisorisch* nach der Zeitfolge ihrer Entdeckung durch die grossen lateinischen Buchstaben des Alphabets und fährt damit ununterbrochen fort und greift nach Erschöpfung des Alphabets auf die Doppelbezeichnung AA, AB, AC, ... BA, BB, BC . . . . Diese Bezeichnung wird seit Ende August 1892 in Anwendung gebracht, Ende 1895 war man bereits bei CC und CD angelangt.

Die definitive Numerirung erfolgt erst dann, und zwar in Gruppen von je 10, wenn die Beobachtungen bereits längere Zeit geschlossen sind und eine genaue Untersuchung erfolgt ist. Alle Planetoiden, welche nicht genügend genau beobachtet sind, um eine einigermassen sichere Bahnbestimmung zu gestatten, erhalten keine Nummer mehr, nur die lateinischen Buchstaben der Reihenfolge.

Bis zur Einführung der Photographie, bis zum 20. Dezember 1891 waren 322 Planetoiden entdeckt, von 1 bis 322 numerirt; seither wurden bis Ende 1895 entdeckt und ihre Bahn berechnet:

[1]) Astronomischer Kalender 1894 der Sternwarte in Wien.

Im Jahr 1892 = 27 Asteroiden,
» » 1893 = 27 »
» » 1894 = 20 »
» » 1895 = 11 »

Von den letzteren sind aber (Anfangs Januar 1896) fünf noch nicht berechnet. Im Ganzen sind in den letzten 4 Jahren 1892—1896 nicht weniger als *85 Planetoiden* entdeckt und berechnet worden, wovon 80 durch die Photographie und zwar 24 davon von *Max Wolf* in Heidelberg, 54 von *Charlois* in Nizza und nur 8 von anderen.

Ausserdem wurde in diesem Zeitraum noch eine grosse Anzahl anderer Planetoiden entdeckt; aus Mangel einer genügenden Anzahl von Beobachtungen konnten aber für dieselben die Bahnelemente nicht gefunden werden, so dass diese nicht als bleibende Erweiterung des Asteroidenringes betrachtet werden können und vorläufig weggelassen werden.

Charlois hat ausserdem vorher schon 26 Asteroiden vermittelst der alten Methode entdeckt, bis jetzt zusammen allein deren 80. Ebenso viele, nämlich 81, und zwar alle nach der alten Methode, hat *Palisa* in Wien entdeckt, *Peters* in Clinton (Nordamerika) 45 Planetoiden ebenfalls nach der alten Methode.

Mehrfache Auffindungun ein und desselben Asteroiden kamen nur wenige vor. Es rührt dies daher, dass sich bisher nur zwei Astronomen, Wolf und Charlois, der Photographie zur Aufsuchung dieser Himmelskörper bedienten, und dass sie zudem nicht zu derselben Zeit thätig waren.

Die Gesammtzahl der bis Ende 1895 bekannten Asteroiden beträgt 410, von diesen sind 404 vollständig berechnet und mit fortlaufenden Nummern versehen.

Die Bahnberechnung der weitaus grössten Zahl der in den letzten Jahren entdeckten Planetoiden rührt her von *A. Berberich*, einem Astronomen am Recheninstitute der königlichen Sternwarte in Berlin, der mit aussergewöhnlichem Geschick und Scharfblick diese mühsamen und zeitraubenden Berechnungen ausgeführt hat.

Die Bearbeitung der Bahnen und die fortlaufende Berechnung der *Ephemeriden*, d. h. die Vorausberechnung der täglichen Stellungen der Planetoiden wird durch die *Redaktion des Berliner astronomischen Jahrbuches* mit Unterstützung freiwilliger Mitarbeiter aller Nationen besorgt. Weil sich nun in den letzten Jahren die Anzahl der Asteroiden sehr vermehrt hat, war es diesem Institut nicht mehr möglich,

alle dieselben in ihrer Bahn zu verfolgen; es findet eine Einschränkung der Berechnung der fortlaufenden *Ephemeriden* auf die wichtigsten Planetoiden statt, die übrigen lässt man, nachdem ihre Bahnelemente berechnet sind, einfach laufen, wenn nothwendig, lässt sich ihre Stellung zu jeder Zeit wieder berechnen.

Etwa 340 Planetoiden haben *Eigennamen* erhalten, die zehn zuerst entdeckten sind der Reihe nach:

Ceres, Pallas, Juno, Vesta, Asträa, Hebe, Iris, Flora.

Anfangs wurde streng das Princip innegehalten, für die Planetoiden nur Namen des *klassischen Alterthums* zu wählen, und so treffen wir neben den obigen auf die Bezeichnungen:

Minerva, Medea, Andromache, Kalypso, Penelope, Thalia, Ismene, Ariadne u. s. w.

Als sich aber ihre Zahl vermehrte, wurden auch andere Namen für die Planetoiden eingeführt und so finden wir Namen:

Aus der *germanischen Mythologie:*

Kriemhild, Brunhild, Gudrun, Idun, Freia, Gerda, Vanadis u. s. w.

Länder- und Städtenamen:

Russia, Germania, Bavaria, Svea, Badenia, Dresda, Heidelberga, Massilia u. s. w.

Alle möglichen *Frauennamen:*

Emma, Ida, Anna, Maria, Rosa, Eva, Katherina u. s. w.

So ist auch *Roxane*, die Gemahlin Alexanders des Grossen durch einen Planetoiden dieses Namens verewigt; auch eine *Xantippe* zieht ruhig ihre Bahn unter den übrigen Asteroiden.

Als sich durch Einführung der Photographie die Zahl der neu entdeckten Planetoiden noch in stärkerem Masse vermehrte, ist man von einer Namengebung ganz abgegangen und bezeichnet die neu gefundenen Asteroiden einfach durch fortlaufende Nummern.

Ueber die auf der Sternwarte zu Nizza zur Aufsuchung neuer Asteroiden mittelst der Photographie durch *Charlois* erhaltenen Resultate, hat der Direktor *Perrotin*, jener Anstalt vor Kurzem im Wesentlichen folgende Details veröffentlicht:

»Vom 19. September 1892 bis Ende Juni 1894 wurden im Ganzen 115 Clichés von je 11° Seitenlänge aufgenommen. Bei einer Expositionszeit von $2^1/_2$—3 Stunden enthielten die einzelnen Platten 8—9000 Sterne; die Untersuchung einer Platte erforderte etwa zwei Stunden. Auf 40 dieser Platten fand sich überhaupt kein Planet vor, die übrigen 75 enthielten zusammen 157 verschiedene Planetoiden,

von denen sich 112 als bereits bekannt und 45 als neu erwiesen, was nur durch die Berechnung der Bahn konstatirt werden kann.

Bei den Planetoiden bis 11. Grösse waren die schon bekannten weit im Ueberschuss; bei den Planetoiden 12. Grösse kommen schon auf 3 alte zwei neue und bei denjenigen 13. Grösse sind die neuen auf den Platten zahlreicher als die alten, ein Zeichen, dass wir zwar die helleren Glieder der Asteroiden, nicht aber die schwächeren bereits ziemlich vollständig kennen.»

Im Laufe des Jahres 1895 ist das 4. Hundert der bekannten Asteroiden überschritten worden, es dürfte daher die folgende Tabelle zur Uebersicht über die Aufeinanderfolge der Planetoidenentdeckungen von Interesse sein:

Es wurde entdeckt:					Zeitraum für eine Gruppe von je 50:
(1)	Ceres	am	1. Januar	1801	
(50)	Virginia	»	4. Oktober	1857	56 Jahre
(100)	Hekate	»	11. August	1868	11 »
(150)	Nuwa	»	18. November	1875	7 »
(200)	Dynamene	»	27. August	1879	4 »
(250)	Bettina	»	3. November	1885	6 »
(300)	Geraldina	»	3. November	1890	5 »
(350)	—	»	14. Dezember	1892	2 »
(400)	—	»	15. März	1895	2¼ »

Der Photographie allein ist es zu verdanken, dass das 4. Hundert der Asteroiden in der überaus kurzen Zeit von 4¼ Jahren entdeckt wurde; dieselbe dürfte wohl dazu verhelfen, noch vor der Säkularfeier der Entdeckung der Ceres, bis zum 1. Jan. 1901, auch das fünfte Hundert auszufüllen.

Rechnet man alle Planetoiden, deren *Helligkeit* oder *Grösse* von 8,0 bis 8,9, von 9,0 bis 9,9, von 10,0 bis 10,9 u. s. w. reicht, be-

ziehungsweise zur 8., 9. 10. u. s. w. *Grössenklasse*, und stellt dieselben wieder in Gruppen von je 50 zusammen, so findet man für die *mittleren Oppositionshelligkeiten der 400 ersten Planetoiden*:[1])

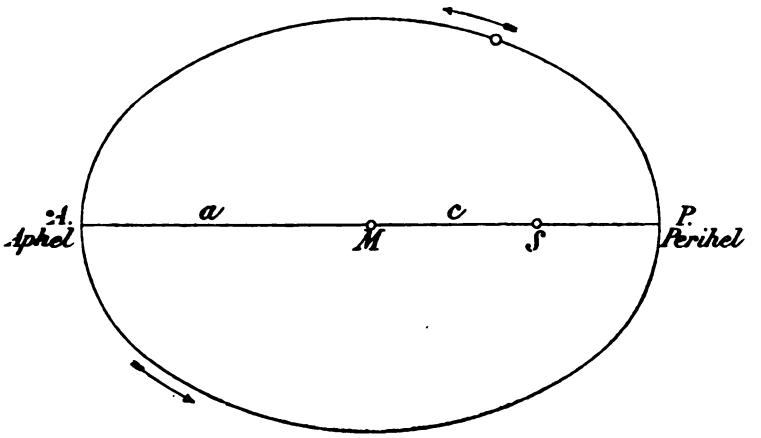
Asteroiden Nro.	Heller als 8	8	9	10	11	12	Schwächer als 12
1— 50	2	7	17	15	7	2	—
51—100	—	—	2	19	23	5	1
101—150	—	—	—	15	27	8	—
151—200	—	—	1	4	20	20	5
201—250	—	—	—	3	18	17	12
251—300	—	—	—	1	7	13	29
301—350	—	—	2	2	8	21	17
351—400	—	—	—	2	4	13	31
Summe	2	7	22	61	114	99	95

Die beiden hellsten Planetoiden sind Vesta von der 6,5. und Ceres von der 7,4. Grössenklasse.

Wir wenden uns nun zur Betrachtung der *Bahnen der Planetoiden.*

Nach dem ersten Kepler'schen Gesetz sind die Bahnen aller Planeten *Ellipsen*, in deren einem Brennpunkt die Sonne steht. Bezeichnet in nebenstehender Figur M den Mittelpunkt, S den einen Brennpunkt, in dem die Sonne steht und PA die grosse Axe der Ellipse, so heisst MP = MA = a die *halbe grosse Bahnaxe* oder die *mittlere Entfernung* des Planeten von der Sonne; MS = c die *lineare Excentricität* und der Bruch $\frac{c}{a} = e$; das *Excentricitätsverhältniss*, die *numerische Excentricität* oder kurz die *Excentricität* der Bahnellipse.

[1]) Astronomischer Kalender 1896, Wien.



Im Scheitel P der grossen Axe befindet sich der Planet der Sonne am nächsten, im Scheitel A am weitesten von ihr entfernt, diese beiden Punkte heissen die *Sonnennähe* oder das *Perihel*, bezüglich *Sonnenferne* oder *Aphel* des Planeten, die zugehörigen Entfernungen, die *Perihel-* bezüglich *Apheldistanz*, sie sind $a - c$ und $a + c$.

Für eine Kreisbahn ist die Excentricität $e = o$ für die Parabel $e = 1$, dazwischen für $e < 1$ liegen die Ellipsen, diese weichen um so stärker vom Kreise ab, sind um so langgestreckter, je mehr sich e der 1 nähert.

Von den grossen Planeten hat *Venus* die kleinste Excentricität $e = 0{,}007$. weitaus die grösste der *Merkur* $e = 0{,}2$; die übrigen liegen zwischen 0,01 und 0,09; für die Erde ist $e = 0{,}0167$.

Die Excentricität der Bahnellipsen der *Kometen* ist bedeutend grösser. Für den periodischen *Tempel'schen Kometen* 1 (1867 II), Umlaufszeit 3,295 Jahre, ist $e = 0{,}46239$, für den *Halley'schen Kometen*, mit einer Umlaufszeit von 76,3 Jahren, ist $e = 0{,}967$; der erstere besitzt die kleinste, der letztere die grösste bei periodischen Kometen beobachtete Excentricität. Bei nicht periodischen Kometen nähert sich e der Einheit und ihre Bahn der Parabel.

Bei den Planetoiden treten grössere Differenzen auf zwischen den Excentricitäten als bei den grossen Planeten. Von den bis jetzt bekannten Asteroiden besitzt

die kleinste Exentricität (250) (Iclea) mit $e = 0{,}0127$,
» grösste » (353) » $e = 0{,}35$

Die letzere kommt der bei periodischen Kometen vorkommenden ziemlich nahe. Die Form der Bahnellipsen der Planetoiden ist daher sehr verschieden, von der beinahe kreisförmigen Bahn, bis zur lang gestreckten Ellipse.

Infolge der grossen Excentricität ist der Abstand eines solchen Himmelskörpers von der Sonne sehr veränderlich, für den oben erwähnten (353) z. B. beträgt

die Periheldistanz 36 Millionen Meilen,
die Apheldistanz 75 » »

also mehr als das doppelte der ersteren.

Die *kleinste* Periheldistanz besitzt die (301), nämlich 1,61 Erdbahnhalbmesser oder 32,2 Millionen Meilen, diese kommt der Sonne von allen Planetoiden am nächsten. Die Apheldistanz des Mars beträgt 1,666 Erdbahnhalbmesser oder 33,2 Millionen Meilen, es reicht also die Bahn dieses Planetoiden und damit der Asteroidengürtel auf der inneren Grenze beinahe *bis zur Apheldistanz des Planeten Mars.*

Auch die äussere Grenze des Gürtels wurde durch einen der neuen Planetoiden, (361), um etwas hinausgeschoben, er entfernt sich in seiner Sonnenferne bis auf 4,772 Erdbahnradien, oder 95 Millionen Meilen von der Sonne, also noch weiter als *Thule* (279), deren Apheldistanz 4,613 = 92 Millionen Meilen beträgt. Man kennt bereits 4 Asteroiden, welche nahezu dieselbe grösste Entfernung von der Sonne erreichen, nämlich ausser den 2 genannten noch (153) *Hilda* und (190) *Ismene.*

Es scheint dies darauf hinzudeuten, dass die *äusserste Grenze des Asteroidenringes* beiläufig bei 4,75 Erdbahnhalbmessern, oder bei 95 Millionen Meilen Abstand von der Sonne liegt, welche Grenze schon nahe an die *Jupiterbahn* reicht, deren Entfernung im Perihel von der Sonne 4,95 oder 99 Millionen Meilen beträgt.

Hieraus folgt, dass der Asteroidenring beinahe *die ganze Zone zwischen der Mars- und Jupiterbahn* erfüllt, somit eine Breite von 3,1 Erdbahnradien oder von 62 Millionen Meilen einnimmt; eine Zone, die doppelt so breit ist als die mittlere Entfernung des Planeten Mars von der Sonne.

Die *halben grossen Bahnaxen* oder die *mittleren Entfernungen* der verschiedenen Planetoiden von der Sonne liegen zwischen

a = 2,15 Erdbahnhalbmessern oder 43 Mill. Meilen: *Brucia* (353)
und a = 4,26 » » 85 » » *Thule* (279).

Die Differenz beträgt 2,1 Erdbahnradien oder 42 Millionen Meilen.

Der letztere Planetoid, *Thule,* kreist einsam, weit von den übrigen entfernt, um die Sonne.

Infolge dieser grossen Verschiedenheit der Bahnaxen, weichen auch die *Umlaufszeiten* der Planetoiden stark von einander ab. Während der innerste, die *Brucia*, die Sonne in 3,17 Jahren einmal umkreist, braucht der äusserste bis jetzt bekannte Asteroid, die *Thule,* 8,8 Jahre um einmal ihre Bahn zu durchlaufen.

Nach dem Gesetz von Titius beträgt die mittlere Entfernung des in der Lücke zwischen Mars und Jupiter fehlenden Planeten:

$$a = 0{,}4 + 2^3 \cdot 0{,}3 = 2{,}8 \text{ Erdbahnhalbmesser.}$$

Die Differenz zwischen diesem Werth und den oben angegebenen Grenzwerthen des innersten und äussersten bekannten Planetoiden beträgt somit — 0,65, bezüglich + 1,46 Erdbahnhalbmesser. Die Abweichung vom *Titius-Bode'schen Gesetz* ist also sehr gross. Noch grösser wird diese Abweichung, wenn man den im Jahre 1846 entdeckten Planeten *Neptun*, den äussersten unseres Sonnensystems, in Betracht zieht. Nach der Titius'schen Reihe ergibt sich nämlich sein mittlerer Abstand von der Sonne:

$$a = 0{,}4 + 2^7 \cdot 0{,}3 = 38{,}8 = 776 \text{ Millionen Meilen,}$$

während seine wirkliche mittlere Entfernung nur 30,056 Erdbahnradien, oder 601 Mill. Meilen beträgt. Die Differenz beträgt somit — 8,744 Erdbahnradien.

Von einer allgemeinen Gültigkeit des Titius'schen Gesetzes kann also keine Rede sein. Vielleicht mag dieses oder ein ähnliches Gesetz bei der Bildung des Planetensytems vorgewaltet haben, allein entweder ist der ursprüngliche Zustand nicht mehr der jetzige, oder es muss eine Formel aufgestellt werden, welche auf die Massen der Planeten und auf die Excentricitäten und Neigungen ihrer Bahnen Rücksicht nimmt.

Die Bahnellipsen der verschiedenen Asteroiden liegen in Ebenen, welche gegen die Ebene der Erdbahn, die *Ekliptik*, sehr verschiedene *Neigung* haben. Für die grossen Planeten ist diese Neigung gering, am grössten für Merkur, mit 7°0′ 7″,7, am kleinsten für Uranus, mit 0°46′ 20″,9. Alle grossen Planeten bewegen sich in der Nähe der Ekliptik, *innerhalb des Thierkreisgürtels*, der eine Zone von der Breite von je 8° zu beiden Seiten der Ekliptik rings um den Himmel bildet.

Bei den Asteroiden dagegen herrschen grosse Verschiedenheiten in den Neigungen der Bahnebenen; ein Theil derselben schweift weit über den Thierkreisgürtel hinaus. Die *grösste* Neigung besitzt ②, *Pallas* mit 34° 44′, dann folgen ㊺, *Anna*, mit 25° 47′, ㊼ mit 26° 34′ u. s. w. Die *kleinste* Neigung besitzt ⑳, *Massilia*, mit 0° 41′, dazwischen sind alle möglichen Neigungen vertreten, doch so, dass ganz kleine und ganz grosse Neigungen nur wenige vorkommen. *Newton* hat 1895 gezeigt, dass die *mittlere Bahnebene* der jetzt bekannten 400 Planetoiden zur Ebene der Jupiterbahn eine sehr geringe Neigung hat, nur 0°,43. Der Grund hierfür liegt in den säkulären Störungen Jupiters. Infolge dieser starken Neigungen hat die Zone, welche der Asteroidenring zu beiden Seiten der Ekliptik einnimmt, eine Breite von etwa 60 Millionen Meilen.

Die *aufsteigenden Knoten* der Planetoidenbahnen, d. h. die Punkte, in denen die Asteroiden die Ebene der Erdbahn, die Ekliptik durchsetzen, wenn sie von der südlichen auf die nördliche Halbkugel des Himmels übergehen, vertheilen sich rings um die Ekliptik herum, wenn auch nicht gleichförmig, ohne dass ein bestimmtes Gesetz erkennbar ist.

Die Bahnen der Asteroiden sind gegenseitig stark in einander verschlungen. In seiner Abhandlung «Ueber das System der kleinen Planeten zwischen Mars und Jupiter. Leipzig 1851», sprach *d'Arrest* das bestimmte Gesetz aus, dass die Bahn jedes der Asteroiden in andere Bahnen eingreife, oder also die verschiedenen Bahnen förmlich miteinander verkettet seien. Würde man diese Bahnen als körperliches Modell in Form von Drahtreifen darstellen, so würde die ganze Gruppe herausgehoben, wenn man einen dieser Reife herausheben wollte.

Der gewaltige Planet Jupiter, der sowohl dem Volumen als der Masse nach alle andern Planeten des Sonnensystems zusammengenommen überwiegt, übt auf die Bahnen der Planetoiden starke *Störungen* aus. Diese Störungen werden besonders gross für diejenigen Planetoiden, deren Umlaufszeit um die Sonne mit derjenigen Jupiters annähernd in einem einfachen Zahlverhältniss stehen, weil dann je nach einer bestimmten Anzahl von Umläufen, der Planetoid immer wieder in dieselbe Stellung zu Jupiter kommt, so dass die Störung längere Zeit hindurch immer in demselben Sinne erfolgt, worauf sie dann in den entgegengesetzten Sinn übergeht. Die Störungen sind um so stärker, je grösser die Neigung und die Excentricität der Bahn des gestärkten Körpers ist,

der Betrag derselben kann unter Umständen so gross werden, dass sich ein Himmelskörper der Wahrnehmung lange Zeit entziehen kann, weil man ihn an einem Punkt des Himmels vermuthet, der von seiner wirklichen Stellung ziemlich weit entfernt ist.

Ein Beispiel hierfür bietet der am 1. Oktober 1877 von Watson entdeckte Planetoid (323) *Andromache*. Seine Umlaufszeit steht zu derjenigen Jupiters sehr nahe im Verhältniss 5 zu 9. Infolge der stark excentrischen Bahn muss dieser beträchtliche Störungen vom Jupiter erfahren, die etwa 200 Jahre lang sich immer in derselben Richtung summiren müssen und erst dann wieder in die umgekehrte Richtung übergehen. Die Folge davon war, dass dieser Planetoid verloren ging und erst durch die Photographie wieder aufgefunden wurde. *Berberich* konnte nachweisen, dass inzwischen beträchtliche Veränderungen in seinen Bahnelementen vorgegangen sein müssen.

Die Kleinheit der Planetoiden hat kaum bei einigen derselben direkte, bis auf die neueste Zeit sehr unsichere Messungen gestattet; so fand *Schröter* für den Durchmesser der Pallas 300, dagegen *W. Herschel* kaum 40 geographische Meilen. Von Beobachtungen der physischen Beschaffenheit ihrer Oberfläche ist keine Rede.

Infolge der Unsicherheit der direkten Messung bieten die *photometrischen* oder *Helligkeitsmessungen* die einzigen Anhaltspunkte zur Beurtheilung ihrer wahren Grösse. Die Idee, das Grössenverhältniss der Asteroiden aus ihrem scheinbaren Glanz abzuleiten, ging von *Olbers* aus und wurde von *Simon Stampfer* in seiner Abhandlung »Ueber die kleinen Planeten zwischen Mars und Jupiter. Wien. Sitz. 7 v. 1851«, weiter ausgeführt und sein Verfahren wird seither allgemein mit dem besten Erfolge angewendet.

Bei dieser Methode wird angenommen, dass alle Planeten annähernd dieselbe mittlere *Reflexionsfähigkeit* für das Sonnenlicht, dieselbe sog. *Albedo* besitzen. Dass diese Methode zu mehr oder wenigen falschen Resultaten führen musste, liegt auf der Hand und man war sich dessen auch bewusst.

Auf diese Weise fand man den Durchmesser von:

(1) Ceres	382 km.	(6) Hebe	167 km.
(2) Pallas	304 »	(7) Iris	167 »
(3) Juno	192 »	(8) Flora	105 »
(4) Vesta	382 »	(9) Metis	133 »
(5) Asträa	101 »	(10) Hygiea	201 » u. s. w.

Die 4 zuerst gefundenen Planetoiden sind weitaus die grössten. Erst im Jahr 1894 gelang es *Barnard* mit dem Riesenfernrohr der Lick-Sternwarte auf dem Mount Hamilton in Californien, dessen Objektivlinse einen Durchmesser von 92 cm. besitzt, durch direkte mikrometrische Messungen die Durchmesser der drei zuerst entdeckten Planetoiden zu bestimmen. Die definitiven Resultate sind:

Durchmesser der Ceres: 804 km.
» » Pallas: 486 km.
» » Vesta: 385 km.

Vesta ist also, obgleich um eine Grössenklasse heller als die 2 andern und überhaupt der hellste aller Asteroiden, bedeutend kleiner als Ceres und Pallas. Der aus diesen Messungen folgende Durchmesser der Vesta harmonirt vollkommen mit dem durch Helligkeitsmessungen gefundenen, dagegen weichen Pallas und besonders Ceres bedeutend davon ab. Hieraus folgt, dass die Reflexionsfähigkeit für das Licht bei den verschiedenen Planeten nicht nahezu gleich ist, wie man bisher anzunehmen geneigt war, sondern sehr verschieden, so dass der Schluss von ihrer Helligkeit zur Grösse stets als nur eine erste, meist sehr unsichere Näherung betrachtet werden kann.

Nebenbei sei hier bemerkt, dass die grössten Fernrohre, Refraktoren, der Neuzeit sich in Nordamerika befinden. Nebst dem oben erwähnten Refraktor auf der Lick-Sternwarte befindet sich, im Jahre 1895 aufgestellt, noch ein solcher auf dem Jerkes Observatorium in Wisconsin, dessen Objektivlinse 40 Zoll = 102 cm. Durchmesser besitzt, und ein ebenso grosser Refraktor soll auf dem Wilson Peak in Süd-Californien aufgestellt werden. Alle diese Riesenfernrohre verdanken ihr Dasein grossartigen Privatschenkungen. Der grösste Refraktor Europas befindet sich in Nizza mit 76 cm., Pulkowa und Greenwich mit je 75 cm., Wien mit 68 cm. Objektiv-Durchmesser u. s.w.

Eine Reihe von Asteroiden besitzen nach Helligkeitsschätzungen einen Durchmesser von 100 bis 200 km., aber weitaus der grösste Theil hat weniger als 100 km. Durchmesser. Die Oberfläche des Planetoiden *Kalypso*, (50), z. B., dessen Durchmesser etwa 50 km. beträgt, enthält nur 7850 Quadratkilometer, hat also nur etwa $^1/_5$ des Flächeninhaltes der Schweiz; ein Eisenbahnzug, der in einer Stunde 50 km. zurücklegt, würde dort in 3 Stunden die Reise um die Welt machen. Aus der Erde liessen sich mehr als 16 Millionen Kugeln von der Grösse der Kalypso bilden.

Die kleinsten bekannten Planetoiden von der 13.—15. Grösse besitzen Durchmesser, die wahrscheinlich nicht grösser sind als 10 bis 20 km. Bei weiterem Wachsen der optischen Instrumente müsste man fast auf Körner kosmischen Staubes stossen.

Die *Masse* der Asteroiden ist noch nicht bestimmbar gewesen, aber nach Schätzungen so gering, dass die Gesammtmasse aller überhaupt vorhandenen Planetoiden wahrscheinlich nicht $\frac{1}{3000}$ der Erdmasse ausmacht. Nach *Roszls* Schätzung (1895), der die Albedo der Vesta als mittlere Reflexionsfähigkeit, und die mittlere Dichte des Mars als Einheit annimmt, beträgt die Gesammtmasse der bis jetzt gefundenen Planetoiden $\frac{1}{40}$ der Masse unseres Mondes, die selbst nur $\frac{1}{80}$ der Erdmasse ist.

Wir kommen nun zu der Frage nach dem *Ursprung der Planetoiden.*

Wie schon erwähnt, stellte *Olbers in Bremen* bald nach der Entdeckung der ersten Asteroiden die Hypothese auf, diese kleinen Himmelskörper seien durch eine explosionsartige Zertrümmerung eines grösseren Planeten entstanden, dessen Bruchtheile nun als sehr kleine Planeten gesonderte Bahnen beschreiben.

Schon am 1. Juni 1802 schrieb nämlich Olbers an Bode (Berl. Jahrbuch 1805), man könne sich fragen, ob Ceres und Pallas immer so getrennt in friedlicher Nachbarschaft ihre jetzigen Bahnen durchlaufen haben, oder ob beide nur Trümmer eines ehemaligen grösseren Planeten seien, den irgend eine grosse Katastrophe zersprengte. Im September desselben Jahres sprach *J. Sigm. Gottfr. Huth*, Professor in Dorpat, dagegen die Ansicht aus (Berl. Jahrb. 1807), es komme ihm wahrscheinlicher vor, »dass diese Planetchen ebenso alt als alle übrigen seien, und dass die Planeten-Materie in der Schicht zwischen Mars und Jupiter, zur Zeit jener allgemeinen Abscheidung aus dem Himmels-Fluido, dort in viele kleinere Kugeln coagulirt sei, ja er würde sich gar nicht verwundern, wenn Ceres und Pallas mindestens noch 10 Mitplaneten erhielten.[1]) Zur Zeit fand die Hypothese von Olbers, welche ebenfalls noch weitere Trümmer vermuthen liess, mehr Anhänger, und er selbst, sowie einige Astronomen, liessen sich, wie früher schon erwähnt, bei ihrem weitern Suchen nach Planeten leiten

[1]) Wolf. Handbuch der Astronomie. 1893.

Als dann bei diesem systematischen Suchen Harding 1804 die *Juno* und Olbers 1807 die *Vesta* auffand, schien die Richtigkeit der Olbers'schen Hypothese erwiesen.

Olbers selbst äussert sich über seine Hypothese in einem an Bode gerichteten Brief vom 3. April 1807 u. a. folgenderweise: »Nach meiner Hypothese über die Asteroiden, deren Wahrheit oder Falschheit ich übrigens dahin gestellt sein lasse, und die ich nur dazu benutze, wozu Hypothesen überhaupt nützlich sein können, nämlich uns bei Beobachtungen zu leiten, habe ich, wie Ihnen bekannt ist, gefolgert, dass alle Asteroiden, deren es noch sehr viele geben mag, den nordwestlichen Theil des Gestirns der Jungfrau und den westlichen des Wallfisches passiren müssen. Regelmässig durchmustere ich also jeden Monat einmal einen mir mit allen seinen Sternen sehr bekannt gewordenen Theil desjenigen dieser beiden Gestirne, der gerade seiner Opposition am nächsten ist.« [1])

Noch *Lagrange* sprach sich im Jahre 1812 zu Gunsten der Olbers'schen Hypothese aus; als sich aber von der Mitte des Jahrhunderts an die Zahl der neuentdeckten Planetoiden rasch vermehrten, häuften sich die Gründe, die gegen die Olbers'sche Hypothese sprachen und auch die Rechnungen von Encke, Newcomb u. a. zeigten ihre Unhaltbarkeit; so dass dann allgemein die von *Huth* geäusserte Hypothese der Entstehung der Asteroiden im Sinne *Kants* zur Geltung kam.

Nach der *Kant-Laplace'schen Theorie von der Entstehung unseres Sonnensystems* befand sich im Urzustande an Stelle desselben ein ungeheurer Gasball, der weit über die Bahn des äussersten Planeten Neptun hinausreichte. Diese Gasmassen verdichteten sich im Innern und kamen durch irgend eine Ursache in Rotation; bei zunehmender Verdichtung wurde die Rotation des Kerns immer rascher, so dass infolge der Centrifugalkraft des rotirenden Balles einzelne Nebelringe sich von der Hauptmasse loslösten und nach und nach zu Planeten verdichteten, auf diese Weise entstanden zunächst die äussern, grossen Planeten. Man muss sich nun vorstellen, dass, nachdem der Planet Jupiter sich aus einem Nebelring durch Verdichtung desselben gebildet hatte, sich bei weiterem Zusammenziehen des Centralnebels ein Nebelring von geringer Masse von der Urmasse abtrennte und die Stelle des heutigen Asteroidenringes einnahm. Dieser zerfiel unter der mächtigen Anziehung des Jupiters in viele einzelne Stücke, die sich

[1]) Mädler. Der Wunderbau des Weltalls.

in der Folge verdichteten und welche wir jetzt in verdichtetem Zustand als Planetoiden wieder finden.

Diese Erklärung hat nichts den Naturgesetzen Widersprechendes und setzt keine so ungeheure Kraft voraus, wie sie die Zertrümmerung eines fertigen grösseren Planeten erfordern würde. Wir haben es also bei der Bildung der Asteroiden mit keinem Zerspringen, keiner Katastrophe eines fertigen Weltkörpers zu thun, sondern mit einer langsamen, gesetzmässigen Entwicklung aus dem Urnebel, wie bei den übrigen Planeten.

Es möge nun noch die Frage nach der *Bewohnbarkeit* der Asteroiden durch lebende Wesen betrachtet werden.

Die Bedingungen, unter denen ein Planet von lebenden Organismen bewohnt sein kann, ähnlich wie unsere Erde, und von derselben chemischen Zusammensetzung, nämlich vorherrschend aus *Kohlenstoffverbindungen*, sind im Wesentlichen folgende:

1) Eine Atmosphäre von hinreichender Dichte, die Sauerstoff oder Kohlensäure enthält.

2) An der Oberfläche flüssiges Wasser und Kohlenstoff.

3) Eine Temperatur die etwa zwischen 0° und 50° C. liegt.

4) Eine Oberflächendichte, welche gleich der 2—3fachen Dichte des Wassers ist.

Nun gehören die Planetoiden einer viel älteren Bildungsperiode an als unsere Erde, ausserdem sind sie viel kleiner als diese, sie haben daher die einzelnen Entwicklungsstufen der Planeten viel schneller durchgemacht als die Erde, mit andern Worten, sie haben viel schneller gelebt als ein grosser Planet. Die Asteroiden werden daher wohl schon längst auf jener Entwicklungsstufe angelangt sein, wo die Atmosphäre und alles Wasser sich ins Innere dieser Körper zurückgezogen und sich dort chemisch mit den Gesteinsmassen verbunden haben, so dass diese für die Oberfläche verloren sind, sie besitzen daher kein Wasser und keine merkliche Atmosphäre, wie dies auch bei unserem Mond der Fall ist. Wegen ihrer Kleinheit und geringen Atmosphäre haben die Planetoiden ferner wohl längst durch Strahlung in den kalten Weltraum ihre Eigenwärme verloren und da sie ausserdem von der Sonne nur eine geringe Wärmemenge erhalten, so sind sie jedenfalls schon längst bis tief unter den Gefrierpunkt erkaltet, so dass aus allen diesen Gründen ein organisches Leben in unserem Sinne auf denselben nicht möglich ist.

Die Asteroiden kreisen als todte, starre Gesteinsmassen, ohne jedes organische Leben an ihrer Oberfläche um die Sonne, ebenso wie unser Erdmond und wie es auch in sehr später Zukunft einst mit unserer Erde der Fall sein wird.

Auf die Frage nach dem Zweck der Entdeckung weiterer neuer Planetoiden lässt sich Folgendes erwidern:

Der Entdeckung der Asteroiden verdankt die Astronomie, besonders die physische, bemerkenswerthe Fortschritte. Infolge der beträchtlichen Störungen durch Jupiter haben einige derselben so eigenthümliche Bahnen erhalten, dass sie vorzüglich geeignet sind, zur genauern Bestimmung der *Jupitermasse*.

Es gilt dies vor allen für den schon früher in diesem Sinne erwähnten Planetoiden (175), Andromache, dessen Umlaufszeit zu derjenigen Jupiters nahe im Verhältniss von 5 zu 9 steht. Infolge dieser Einwirkung ist die Umlaufszeit desselben in den letzten 20 Jahren um volle 18 Tage länger geworden und wird noch eine Zeit lang wachsen, um dann wieder abzunehmen. Dieser kleine Planet hat also ein veränderliches Jahr.

Gegenwärtig ist die Jupitermasse etwa auf ihren 10,000. Theil genau bekannt, nämlich gleich $\frac{1}{1047{,}9}$ Sonnenmassen oder 308 Erdmassen. Sie spielt aber in den Berechnungen, besonders der *periodischen Kometen*, die wegen ihren äusserst geringen Massen besonders starke Störungen erleiden, eine so bedeutende Rolle, dass man jede Gelegenheit ergreifen muss, durch die man sie noch schärfer bestimmen kann.

Die Berechnung der Asteroidenbahnen boten auch der Theorie neue und verschiedenartige Probleme dar und dienten gleichzeitig auch wieder als Prüfstein für die mathematischen Entwicklungen. Auch die praktische Astronomie verdankt ihnen vielfach neue Ideen.

Die Entdeckung weiterer Glieder dieser Gruppe von kleinen Himmelskörpern, welche den Asteroidenring bilden, dient zur genauern Kenntniss unseres Sonnensystems.

Bern, im Januar 1896.

C. Wagner.

Eingereicht den 5. August 1895.

ie Darstellung einiger bestimmten Integrale durch Bessel'sche Funktionen.

(Fortsetzung.)

einer früheren Arbeit [1]) habe ich die beiden folgenden all- Formeln gegeben:

$$x \sin\varphi)\, d\varphi = \frac{\pi}{2^{n-1}} \left\{ {}^{0}J(nx) + \binom{n}{1} {}^{0}J((n-2)x) + \binom{n}{2} \cdot \right.$$

$$\left. \cdot\, {}^{0}J((n-4)x) + \cdots + \binom{n}{\frac{n-1}{2}} {}^{0}J(x) \right\}$$

positive ganze ungerade n;

$$s^n (x \sin\varphi)\, d\varphi = \frac{\pi}{2^{n-1}} \left\{ \frac{1}{2} \binom{n}{\frac{n}{2}} {}^{0}J(o) + \binom{n}{\frac{n}{2}-1} {}^{0}J(2x) + \right.$$

$$\left. \binom{n}{\frac{n}{2}-2} {}^{0}J(4x) + \cdots + \binom{n}{o} {}^{0}J(nx) \right\}$$

positive ganze gerade n.

in diesen beiden Relationen vorkommenden Bessel'schen ien haben denselben Index Null, dagegen sind ihre Argu- gleich, wenn auch stets Vielfache desselben x. Es handelt darum, Funktionen mit verschiedenen Indices, aber mit rgumenten in vorstehende Gleichungen I und II einzuführen.

[1]) erner Mittheilungen 1895. Seite 115.

Bessel hat für die Addition der Argumente bei der J-Funktion folgende allgemeine Formel gegeben: [1])

$$\overset{m}{J}(u+v) = \left(1+\frac{v}{u}\right)^m \left[\overset{m}{J}(u) - v\left(1+\frac{v}{2u}\right)\frac{\overset{m+1}{J}(u)}{1!} + v^2\left(1+\frac{v}{2u}\right)^2 \frac{\overset{m+2}{2J}(u)}{2!} \mp \cdots\right];$$

für den Spezialfall $m = o$ lautet dieselbe

$$\overset{0}{J}(u+v) = \left[\overset{0}{J}(u) - v\left(1+\frac{v}{2u}\right)\frac{\overset{1}{J}(u)}{1!} + v^2\left(1+\frac{v}{2u}\right)^2 \frac{\overset{2}{J}(u)}{2!} \mp \cdots\right],$$

welche wir nun benutzen wollen.

Mit Berücksichtigung derselben ergibt sich folgendes:

$$\overset{0}{J}(nx) = \overset{0}{J}(x+(n-1)x) = \overset{0}{J}(x) - (n-1)x\left(1+\frac{(n-1)x}{2x}\right)\frac{\overset{1}{J}(x)}{1!} +$$

$$\left\{(n-1)x\right\}^2\left\{1+\frac{(n-1)x}{2x}\right\}^2\frac{\overset{3}{J}(x)}{2!} \mp \cdots$$

$$= \overset{0}{J}(x) - \frac{(n+1)(n-1)}{2}x\frac{\overset{1}{J}(x)}{1!} + \left\{\frac{(n+1)(n-1)}{2}\right\}^2 x^2\frac{\overset{2}{J}(x)}{2!} \mp \cdots$$

$$\overset{0}{J}((n-2)x) = \overset{0}{J}(x+(n-3)x) = \overset{0}{J}(x) - (n-3)x\left(1+\frac{(n-3)x}{2x}\right)\frac{\overset{1}{J}(x)}{1!}$$

$$+\left\{(n-3)x\right\}^2\left\{1+\frac{(n-3)x}{2x}\right\}^2\frac{\overset{2}{J}(x)}{2!} \mp \cdots$$

$$= \overset{0}{J}(x) - \frac{(n-1)(n-3)}{2}x\frac{\overset{1}{J}(x)}{1!} + \left\{\frac{(n-1)(n-3)}{2}\right\}^2 x^2\frac{\overset{2}{J}(x)}{2!} \mp \cdots$$

$$\overset{0}{J}((n-4)x) = \overset{0}{J}(x+(n-5)x) = \overset{0}{J}(x) - (n-5)x\left(1+\frac{(n-5)x}{2x}\right)\frac{\overset{1}{J}(x)}{1!}$$

$$+\left\{(n-5)x\right\}^2\left\{1+\frac{(n-5)x}{2x}\right\}^2\frac{\overset{2}{J}(x)}{2!} \mp \cdots$$

$$= \overset{0}{J}(x) - \frac{(n-3)(n-5)}{2}x\frac{\overset{1}{J}(x)}{1!} + \left\{\frac{(n-3)(n-5)}{2}\right\}^2 x^2\frac{\overset{2}{J}(x)}{2!} \mp \cdots$$

. . . . . .

[1]) Bessel: Untersuchung des Theils der planetarischen Störungen, welcher aus der Bewegung der Sonne entsteht. Abhandlungen der Berliner Akademie der Wissenschaften 1824.

$$) = \overset{0}{J}(x + 4x) = \overset{0}{J}(x) - 4x\left(1 + \frac{4x}{2x}\right)\frac{\overset{1}{J}(x)}{1!} + (4x)^2\left(1 + \frac{4x}{2x}\right)^2 \cdot \frac{\overset{2}{J}(x)}{2!} \mp \ldots.$$

$$= \overset{0}{J}(x) - \frac{6 \cdot 4 \cdot x}{2}\frac{\overset{1}{J}(x)}{1!} + \left(\frac{6 \cdot 4 \cdot x}{2}\right)^2 \frac{\overset{2}{J}(x)}{2!} \mp \ldots.$$

$$) = \overset{0}{J}(x + 3x) = \overset{0}{J}(x) - 3x\left(1 + \frac{3x}{2x}\right)\frac{\overset{1}{J}(x)}{1!} + (3x)^2\left(1 + \frac{3x}{2x}\right)^2 \cdot \frac{\overset{2}{J}(x)}{2!} \mp \ldots.$$

$$= \overset{0}{J}(x) - \frac{5 \cdot 3}{2}x\frac{\overset{1}{J}(x)}{1!} + \left(\frac{5 \cdot 3}{2}x\right)^2 \frac{\overset{2}{J}(x)}{2!} \mp \ldots.$$

$$) = \overset{0}{J}(x + 2x) = \overset{0}{J}(x) - 2x\left(1 + \frac{2x}{2x}\right)\frac{\overset{1}{J}(x)}{1!} + (2x)^2\left(1 + \frac{2x}{2x}\right)^2 \cdot \frac{\overset{2}{J}(x)}{2!} \mp \ldots.$$

$$= \overset{0}{J}(x) - \frac{4 \cdot 2}{2}x\frac{\overset{1}{J}(x)}{1!} + \left(\frac{4 \cdot 2x}{2}\right)^2 \frac{\overset{2}{J}(x)}{2!} \mp \ldots.$$

$$) = \overset{0}{J}(x + x) = \overset{0}{J}(x) - x\left(1 + \frac{x}{2x}\right)\frac{\overset{1}{J}(x)}{1!} + x^2\left(1 + \frac{x}{2x}\right)^2 \frac{\overset{2}{J}(x)}{2!} \mp \ldots.$$

$$= \overset{0}{J}(x) - \left(\frac{3 \cdot 1}{2}x\right)\frac{\overset{1}{J}(x)}{1!} + \left(\frac{3 \cdot 1}{2}x\right)^2 \frac{\overset{2}{J}(x)}{2!} \mp \ldots.$$

$$= \overset{0}{J}(x).$$

Unter der Voraussetzung

n = einer pos. ganzen ungeraden Zahl

: man somit für das verlangte Integral den Werth:

$$\text{Ia.}\quad \int_0^{\pi} \cos^n(x\sin\varphi)\,d\varphi = \frac{\pi}{2^{n-1}}\Bigg(\Bigg[1+\binom{n}{1}+\binom{n}{2}+\cdots+\binom{n}{\frac{n-1}{2}}\Bigg]\overset{0}{J}(x$$

$$-\left[\frac{(n+1)(n-1)}{2}+\binom{n}{1}\frac{(n-1)(n-3}{2}\right.$$

$$\left.+\binom{n}{2}\frac{(n-3)(n-5)}{2}+\cdots\right.$$

$$\left.+\left(\frac{n-1}{2}-1\right)\frac{4\cdot 2}{2}\right]x\,\frac{\overset{1}{J}(x)}{1!}$$

$$+\left[\left\{\frac{(n+1)(n-1)}{2}\right\}^2+\binom{n}{1}\left\{\frac{(n-1)(n-3)}{2}\right.\right.$$

$$\left.\left.+\binom{n}{2}\left\{\frac{(n-3)(n-5)}{2}\right.\right.\right.$$

$$\left.\left.\left.+\cdots+\left(\frac{n-1}{2}-1\right)\left(\frac{4\cdot 2}{2}\right)^2\right]x^2\,\frac{\overset{2}{J}(x}{2!}\right.$$

$$\mp\ \cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$+(-1)^r\left[\left\{\frac{(n+1)(n-1)}{2}\right\}^r+\binom{n}{1}\left\{\frac{(n-1)(n-3)}{2}\right\}^r+\cdots+\right.$$

$$\left.+\left(\frac{n-1}{2}-1\right)\left(\frac{4\cdot 2}{2}\right)^r\right]x^r\,\frac{\overset{r}{J}(x}{r}$$

$$\left.\pm\ \cdots\cdots\right).$$

Hiernach wird z. B. für $n = 9$:

$$\int_0^{\pi}\cos^9(x\sin\varphi)\,d\varphi = \frac{\pi}{256}\Big\{(1+9+36+84+126)\,\overset{0}{J}(x)$$

$$-(40+9\cdot 24+36\cdot$$

$$+84\cdot 4)\,x\,\frac{\overset{1}{J}(x)}{1!}+((40)^2+9\cdot(24)^$$

$$+36\,(12)^2-$$

$$+84\cdot(4^2)\,x^2\,\frac{\overset{2}{J}(x)}{2!}\mp\cdots\Big\}.$$

Unter der Voraussetzung

n = einer positiven ganzen geraden Zahl

entsteht in gleicher Weise:

$$\text{II}^{a}.\quad \int_0^{\pi} \cos^n(x\sin\varphi)\,d\varphi = \frac{\pi}{2^{n-1}}\Bigg(\left[\frac{1}{2}\binom{n}{\frac{n}{2}}\right] +$$

$$+\left[\binom{\frac{n}{2}}{1} + \binom{\frac{n}{2}}{2} + \cdots + \binom{n}{0}\right] {}^{0}J(x) -$$

$$-\left[\binom{\frac{n}{2}}{1}\frac{3\cdot 1}{2} + \binom{\frac{n}{2}}{2}\frac{5\cdot 3}{2} + \cdots \right.$$

$$\left. + \binom{n}{0}\frac{(n+1)(n-1)}{2}\right] x\,\frac{{}^{1}J(x)}{1!}$$

$$+\left[\binom{\frac{n}{2}}{1}\left(\frac{3\cdot 1}{2}\right)^2 + \binom{\frac{n}{2}}{2}\left(\frac{5\cdot 3}{2}\right)^2 + \cdots \right.$$

$$\left. + \binom{n}{0}\left\{\frac{(n+1)(n-1)}{2}\right\}^2\right] x^2\,\frac{{}^{2}J(x)}{2!}$$

$$+ \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$+(-1)^r\left[\binom{\frac{n}{2}}{1}\left(\frac{3\cdot 1}{2}\right)^r + \binom{\frac{n}{2}}{2}\left(\frac{5\cdot 3}{2}\right)^r + \right.$$

$$\left. \cdots + \binom{n}{0}\left\{\frac{(n+1)(n-1)}{2}\right\}^r\right] x^r\,\frac{{}^{r}J(x)}{r!}$$

$$\mp \quad \cdots\cdots \Bigg),$$

so z. B. für n = 6:

$$\int_0^{\pi} \cos^6(x\sin\varphi)\,d\varphi = \frac{\pi}{32}\left\{10 + \left[15 + 6 + 1\right] {}^{0}J(x) - \left[15\cdot\left(\frac{3\cdot 1}{2}\right) + \right.\right.$$

$$\left. + 6\cdot\left(\frac{5\cdot 3}{2}\right) + 1\cdot\left(\frac{7\cdot 5}{2}\right)\right] x\,\frac{{}^{1}J(x)}{1!} +$$

$$\left. + \left[15\cdot\left(\frac{3\cdot 1}{2}\right)^2 + 6\cdot\left(\frac{5\cdot 3}{2}\right)^2 + 1\cdot\left(\frac{7\cdot 5}{2}\right)^2\right] x^2\,\frac{{}^{2}J(x)}{2!} \mp \cdots\right\}.$$

Unsere weitere Aufgabe ist nun, die in den Relationen I^a und II^a vorkommenden J-Funktionen sämmtlich durch die $\overset{0}{J}$- und $\overset{1}{J}$-Funktion zu ersetzen.

Der Einfachheit wegen schreiben wir die Gleichungen I^a und II^a in der Form:

$$I^b. \int_0^{\pi} \cos^n(x \sin\varphi)\, d\varphi = \frac{\pi}{2^{n-1}} \left\{ \alpha_0 \overset{0}{J}(x) - \alpha_1 \frac{x}{1!} \overset{1}{J}(x) + \alpha_2 \frac{x^2}{2!} \overset{2}{J}(x) \mp \cdots \right.$$

$$\left. + (-1)^r \alpha_r \frac{x^r}{r!} \overset{r}{J}(x) \pm \cdots \right.$$

$$II^b. \int_0^{\pi} \cos^n(x \sin\varphi)\, d\varphi = \frac{\pi}{2^{n-1}} \left\{ \beta + \beta_0 \overset{0}{J}(x) - \beta_1 \frac{x}{1!} \overset{1}{J}(x) + \right.$$

$$\left. + \beta_2 \frac{x^2}{2!} \overset{2}{J}(x) \mp \cdots + (-1)^r \beta_r \frac{x^r}{r!} \overset{r}{J}(x) \pm \cdots \right\}.$$

wobei die Grössen $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \ldots \beta, \beta_0, \beta_1, \beta_2 \ldots$ die entsprechenden den eckigen Klammern stehenden Ausdrücke ersetzen sollen.

Bekanntlich kann man durch zwei gegebene J-Funktionen alle übrigen ausdrücken, analog der bereits von Bessel gefundenen Reduktionsformel[1])

$$\overset{v}{J}(x) = \frac{2(v-1)}{x} \overset{v-1}{J}(x) - \overset{v-2}{J}(x),$$

oder auch, wenn man statt v die Grösse $v+1$ einführt

$$\frac{2v}{x} \overset{v}{J}(x) = \overset{v-1}{J}(x) + \overset{v+1}{J}(x).$$

Mit Hilfe ersterer kann $\overset{v}{J}(x)$ auf $\overset{v-1}{J}(x)$ und $\overset{v-2}{J}(x)$ reduzirt werden. Drückt man alsdann mittelst der gleichen Formel $\overset{v-1}{J}(x)$ durch $\overset{v-2}{J}(x)$ und $\overset{v-3}{J}(x)$ aus, und setzt diesen Werth in obige Gleichung ein, so erscheint $\overset{v}{J}(x)$ durch $\overset{v-2}{J}(x)$ und $\overset{v-3}{J}(x)$ bestimmt. Durch m-malige Wiederholung

[1]) Ebendaselbst.

dieses Verfahrens kann schliesslich $\overset{v}{J}(x)$ durch $\overset{v-m}{J}(x)$ und $\overset{v-m-1}{J}(x)$ ausgedrückt werden, was zuerst Lommel bekannt gab. Seine Formel lautet[1]):

$$\overset{v}{J}(x) = \overset{v-m}{J}(x) \sum (-1)^p \frac{(m-p)^{p|-1}}{p!} \cdot \frac{(2v-2m+2p)^{m-2p|2}}{x^{m-2p}} -$$

$$- \overset{v-m-1}{J}(x) \sum (-1)^p \frac{(m-1-p)^{p|-1}}{p!} \cdot \frac{(2v-2m+2+2p)^{m-1-2p|2}}{x^{m-1-2p}}.$$

Setzt man hierin $v = m + 1$,

so entsteht:

$$\overset{m+1}{J}(x) = \overset{1}{J}(x) \sum (-1)^p \frac{(m-p)^{p|-1}}{p!} \cdot \frac{(2p+2)^{m-2p|2}}{x^{m-2p}} -$$

$$- \overset{0}{J}(x) \sum (-1)^p \frac{(m-1-p)^{p|-1}}{p!} \cdot \frac{(2p+4)^{m-1-2p|2}}{x^{m-1-2p}},$$

wo die Ausdrücke hinter den Summenzeichen die allgemeinen Glieder zweier endlichen Reihen vorstellen, deren einzelne Glieder daraus hervorgehen, wenn man statt p der Reihe nach 0, 1, 2 . . . . und alle positiven ganzen Zahlen einsetzt; in der ersten Reihe braucht man p nicht grösser als $\frac{m}{2}$ zu nehmen, weil für grössere Werthe von p der Faktor $(m-p)^{p|-1}$ und damit alle folgenden Glieder der Reihe Null werden; ebenso ist der grösste Werth für p in der zweiten Reihe gleich $\frac{m-1}{2}$. Setzt man in dieser Gleichung nach und nach $m = 1, 2, 3, \ldots . (r-1) \ldots$, so erhält man die einzelnen Funktionen $\overset{2}{J}(x), \overset{3}{J}(x), \overset{4}{J}(x) \ldots \overset{r}{J}(x) \ldots$ ausgedrückt durch die Funktionen $\overset{0}{J}(x)$ und $\overset{1}{J}(x)$.

Wir schreiben:

$$\overset{2}{J}(x) = A_1 \overset{1}{J}(x) - B_1 \overset{0}{J}(x)$$

$$\overset{3}{J}(x) = A_2 \overset{1}{J}(x) - B_2 \overset{0}{J}(x)$$

. . . . . .

$$\overset{r}{J}(x) = A_{r-1} \overset{1}{J}(x) - B_{r-1} \overset{0}{J}(x),$$

wo:

$$A_1 = \sum (-1)^p \frac{(1-p)^{p-1}}{p!} \cdot \frac{(2p+2)^{1-2p|2}}{x^{1-2p}};$$

$$A_2 = \sum (-1)^p \frac{(2-p)^{p-1}}{p!} \cdot \frac{(2p+2)^{2-2p|2}}{x^{2-2p}}$$

. . . . . .

[1]) Lommel: «Studien über die Bessel'schen Funktionen.» Leipzig, 1868. Seite 3.

«Stimmung wäre. Seine Versetzung an die Universität ist wohl nicht «erfolgt, weil die Zeitumstände zu ungünstig waren. Es thut mir «leid! —

«Mein Anliegen an Sie wär' öppe das: Den Thuner Mathematiker «zu veranlassen (wofern Sie es für geeignet erachten), sich mit nach- «stehenden Sätzen und Aufgaben zu befassen, welche mir von meinen «letzten Bemühungen (während des Revolutions-Gewühls) noch halb «unverdaut im Magen sitzen.

«Eine Curve 4ten Grads C^4 und ein Kegelschnitt K^2 können ein- «ander in 4 Punkten berühren.

«1. «Wird in einer Curve C^4 ein Punkt a angenommen, so «gibt es im Allgemeinen 63 Kegelschnitte K^2, welche dieselbe in «a und ausserdem in noch irgend drei andern Punkten berühren.» «(Mein Beweis ist schwach und unsicher.)

«Im weitern Verfolg dieses Satzes wurde ich auf folgende Dio- «phantische Aufg. geführt:

«2. «Man denke sich beliebig liegende Punkte; ihre unbestimmte «Anzahl sei = x. Von welcher Form muss die Zahl x sein, damit «die Punkte den Forderungen genügen:

«*a)* dass sie sich zu 3 und 3 so zu Dreiecken E_3 verbinden «lassen, dass je 2 Punkte, die man beliebig wählt, allemal «Ecken *eines*, aber *nur eines einzigen* Dreiecks E_3 sind;

«*b)* dass je 3 Punkte, die man wählt, Ecken eines, aber nur «eines Vierecks E_4 sind, wobei jedoch von den 4 Ecken «jedes E_4 keine drei die Ecken eines der vorigen (a) Drei- «ecke E_3 sein dürfen;

«*c)* dass wenn man 4 Punkte wählt, dieselben Ecken eines Fünf- «ecks E_5 sind, und dessen fünfte Ecke nothwendig bestim- «men, aber es sollen von den fünf Ecken jedes E_5 weder 4 «die Ecken eines der vorigen E_4, noch 3 die Ecken eines «der vorigen E_3 sein;

«*d)* dass sie sich ebenso zu Sechsecken E_6 verbinden lassen, «aber dass je fünf Ecken jedes E_6 nur zu einem einzigen «E_6 gehören, und dass keine 5, 4, 3 Ecken eines dieser «E_6 zugleich die Ecken eines der vorhergehenden E_5, E_4, «E_3 sein dürfen, und eben so für E_7, E_8 ....

«Wie gross ist dabei die Anzahl der E_3, E_4, E_5, E_6.....?»

«Ich fand: Für die Anzahl der Dreiecke $E_3 = \frac{x\,(x-1)}{2 \cdot 3}$. Ein

»natürlicher Grund bedingt, dass x ungerad, und daher eine Zahl von »einer der zwei Formen

$$\text{»}6n + 1 \text{ oder } 6n + 3 \text{ sein muss.}$$

»Die Zahl der E_4 ist $= \frac{x(x-1)(x-3)}{2 \cdot 3 \cdot 4}$. Dies verbunden mit dem »Vorigen, bedingt für x die vier Formen:

$$\text{»}12n + 1;\ 12n + 3;\ 12n + 7;\ 12n + 9.$$

»Die kleinste Anzahl Punkte, welche diesen beiden Fällen genügt, »ist $x = 7$, und giebt 7 E_3 und 7 E_4.

»Ich hoffe und erwarte, Herr Schläfli werde das weitere, das »allgemeine Gesetz, allein bewältigen.

»Beide Sätze (1.) und (2.) haben Bezug auf die 28 Doppeltan»genten dt der Curve C_4. Diese 28 dt gruppiren sich zu 12 und 12 »in 63 Systeme, wovon jedes die nämlichen bestimmten Eigenschaften »hat. — Wenn es Herrn Schläfli gelingt, diesen 28 dt mit der Rech»nung beizukommen, so wird er auch finden, dass ihre 56 Berührungs»punkte zu 4 und 4 in Geraden liegen; — wie oft? und welche Lage »haben diese Geraden gegen einander?[1])

»Wenn der begabte Mathematiker aufgelegt ist, so kann er sich »auch an nachfolgenden Sätzen üben, mit deren Anfang wir uns in »Rom gemeinschaftlich beschäftigt haben.

»Erklärung: Legt man aus einem beliebigen Punkte P Tan»genten an eine Curve n^{ten} Grads C^n, so liegen die n (n—1) Berührungs»punkte in einer Curve von $n-1^{ten}$ Grads C^{n-1}; an diese aus P wie»derum Tangenten, liegen die (n—1) (n—2) Berührungspunkte in einer »Curve C^{n-2}, an diese wieder Tangenten, giebt C^{n-3}; u. s. w. Diese »neuen Curven C^{n-1}, C^{n-2}, ... C^{n-x}, ..., C^2, C^1 heissen (bei »mir) nach der Reihe die 1te, 2te ..... x^{te}, ..., $n-2^{te}$, $n-1^{te}$ »Polare des Punktes P in Bezug auf die Basis C^n.

1. »Bewegt sich der Pol P in einer gegebenen Curve C^r, so ist »die Enveloppe seiner x^{ten} Polare, C^{n-x}, eine Curve vom

$$\text{»}r\,(r + 2x - 3)\,(n-x)^{ten} \text{ Grad.»}$$

[1]) Die Aufgabe wurde von Schläfli nicht gelöst, vergl. Brief Steiner an Schläfli vom 15. Dezember 1850. Nach der gleichen Quelle besuchte Steiner Schläfli in Bern im Herbst 1850 anlässlich einer Reise nach Wien.

Der Satz, dass die 56 Berührungspunkte der dt zu 4 und 4 in Geraden liegen, ist falsch. Immerhin ist es möglich, dass Steiner, als er den Brief schrieb, an seine Richtigkeit glaubte. Er fehlt in der gedruckten Arbeit über die dt der C_4. (Bemerkung von H. Prof. Dr. C. F. Geiser.)

II. «Hat die x^{te} Polare eines Punktes P einen Doppelpunkt Q, «so hat umgekehrt die $n-x-1^{te}$ Polare von Q jenen Punkt P zum «Doppelpunkt.»

III. «Der Ort des Punktes P, dessen 1te Polare, C^{n-1}, einen Dop- «pelpunkt Q hat, ist eine Curve $\mathfrak{P}$ vom 3 $(n-2)^{2}_{ten}$ Grad; und der «Ort von Q ist eine Curve $\mathfrak{Q}$ vom 3 $(n-2)^{ten}$ Grad; der Ort der Geraden «PQ ist eine Curve $\mathfrak{R}$ von der 3 $(n-1)(n-2)$ Klasse und von der- «selben Klasse auch die Curve $\mathfrak{P}$.»[1])

In einem 2ten Concept spricht Steiner die Absicht aus, nach Beendigung seiner Cur in Rippoldsau, wohin er Ende Juli 1848 gekommen ist, nach der Schweiz zu reisen, wenn nicht sein Bruder *Hans Steiner* der aus Amerika in Utzenstorf zu Besuch sei, schon früher zurückkehre und ihn in Rippoldsau besuche. —

1850. Schläfli an Steiner.

Herr Professor!

Sie werden sich wohl mit mir freuen, dass ich jetzt etwas gearbeitet habe, das zu publiciren ich mich nicht schäme. Es ist die Theorie der Elimination zwischen algebraischen Gleichungen im allgemeinsten Sinne. Zum gegebenen System von n höhern Gleichungen mit n Unbekannten nehme ich noch eine lineare Gleichung mit litteralen [unbestimmten] Coefficienten a, b, c... hinzu und zeige, wie man auf diesem Wege, ohne je mit fremden Faktoren die Rechnung zu belästigen, zur ächten Resultante gelangen kann. Ist alles Uebrige numerisch gegeben, so muss diese Resultante in Faktoren zerlegbar sein, welche alle in Beziehung auf a, b, c,... linear sind. In jedem einzelnen dieser linearen Polynome sind dann die Coefficienten von a, b, c... die zu *einer* Lösung gehörenden Werte der Unbekannten.

Ich beleuchte dann die von *Hesse* in seiner bekannten Abhandlung über die Resultante dreier quadratischer Gleichungen gegebene Bedeutung über ein allgemeines Eliminationsverfahren und zeige, dass dieses nicht zum Ziele führen kann. Ich untersuche ferner die Eigenschaften der Resultante eines Systems algebraischer Gleichungen überhaupt und finde eine Reihe von Sätzen, von denen die bekannten Sätze *Jakobi's* über die Determinante sich als spezielle Fälle ergeben. Ich gehe in mehrere besondere Fälle ein, die immer noch von beträchtlicher relativer Allgemeinheit sind, und unterwerfe namentlich die Resultante der acht abgeleiteten Gleichungen eines vierschichtig

[1]) Schläfli hat es Steiner etwas entgelten lassen, dass er die Aufgaben nicht ihm direkt zugesandt hat.

linearen Polynoms mit je zwei Variabeln in jeder Schicht und mit 16 Coefficienten einer genauen und ausführlichen Untersuchung, wobei mehrere schon an sich interessante Hülfssätze gebraucht werden. Diese Resultante erreicht den 24. Grad und wird zuletzt als ein Aggregat von Produkten von vier vollständigen Hyperdeterminanten dargestellt, welche resp. vom 2., 6., 8. und 12. Grade sind. *Cayley* hatte [Crelle XXX] die Resultante als vom 6. Grade angegeben. Ich zeige aufs Bestimmteste, dass sie nothwendig vom 24. Grade ist. Endlich behandle ich die Construction der *reciproken* oder *Classengleichung* zu einer ihrem Grade nach freigegebenen algebraischen Gleichung im allgemeinsten Sinne, und zeige, wie die Coefficienten der Classengleichung durch eine Art von Differentiation aus einander abgeleitet werden können, so dass der schwierigste Teil der Aufgabe nur auf die Berechnung eines einzigen Coefficienten in Funktion der ursprünglichen Elemente zurückgeführt ist, was auf die Berechnung der Resultante der abgeleiteten Gleichungen des ursprünglichen Polynoms, nachdem man darin eine Variable gleich Null gesetzt hat, hinauskömmt. Hievon mache ich eine Anwendung auf Flächen und Curven und insbesondere auf die Curve dritten Grades. Als Anhang teile ich noch jenen zur Determinantentheorie gehörenden allgemeinen Satz mit, von dem ich Ihnen schon gesprochen habe. Das Manuscript zählt 16 Bogen und mag etwa 6 Druckbogen geben. Ich war bereits im Begriffe dasselbe abzusenden, und erkundigte mich noch bei *Bernhard Studer*[1]) über die Art, wie dieses geschehen könnte. Er hielt es für gewagt, beim gegenwärtigen Kriegslärm eine Arbeit an die Wiener Academie zu schicken: die würde wahrscheinlich unbeachtet liegen bleiben. Es sei auch noch ungewiss, ob die Akademie sich nicht auflösen werde. Anfangs erbötig, an Herrn *Boué*[2]) in Wien, ein ihm befreundetes Mitglied der Akademie, welcher zugleich Burger von Burgdorf ist, zu schreiben und gesonnen, die Antwort, die etwa in 14 Tagen erfolgen würde, abzuwarten, fand er bald einen anderen Weg für besser, den ich aber lieber nicht befolge, weil er mich nach einer Seite hin verpflichten würde, wo ich durchaus keine Verbindlichkeit eingehen mag. Bevor ich nun das Manuscript absende, möchte ich vor allem aus

[1]) Der bekannte Geologe, von welchem wir leider immer noch keine Biographie besitzen.

[2]) Boué, Ami (16. III. 1794 † 21. XI. 1881 in Wien), studirte in Genf, Paris, Edinburg und Berlin, Geologe, Dr. med. und war Mitglied der K. Kaiserl. Akademie der Wissenschaften in Wien. (Vgl. geolog. Jahrbuch Vol. 32. 1882.)

Ihren Rat hören. Sie können vielleicht an einen Ihrer Freunde in Wien schreiben, um meiner Arbeit eine günstige Aufnahme zu verschaffen, und mir dann Jemanden bezeichnen, an den ich die Zusendung zu adressiren hätte. In meinem Briefe würde ich auch jedenfalls erwähnen, dass Sie mir Aussicht auf ein Honorar gegeben hätten, und versprechen, im Falle der Zusicherung eines solchen die Eingabe fortzusetzen. Doch möchte ich Sie noch fragen, ob ich wirklich ein Honorar verlangen, und wie viel ich verlangen, oder ob ich den Betrag desselben der Akademie überlassen soll.

Da mir nun noch Zeit übrig bleibt, so werde ich meiner Arbeit noch einen die Theorie der Curven dritten Grades betreffenden Satz beifügen, den mir *Hesse*[1]) und *Aronhold*[2]) übersehen zu haben scheinen. Die Hauptsache darin macht eine Curve dritter Classe [Ψ (p, q, r) = o] aus, welche die 9 Wendungstangenten der ursprünglichen Curve dritten Grades V (x y z) = o berührt. Das Polynom Ψ jener Curven spielt eine doppelte Rolle, einesteils bei der Darstellung der Classengleichung, andererseits in der analytischen Lösung der Aufgabe, die Wendungspunkte einer C_3 zu finden.

Ist nämlich 216 W die Funktionaldeterminante des ursprünglichen Polynoms V und wiederum w die Funktionaldeterminante von W, so ist nach *Hesse:*

$$\frac{1}{2}w = 4\,\alpha^2\,V + \beta\,W \quad [1]$$

der Faktor λ, der $W + \lambda V$ in drei lineare Faktoren zerlegbar macht, ist durch die biquadratische Gleichung

$$27\,\lambda^4 + 18\,\alpha\,\lambda^2 + \beta\,\lambda - \alpha^2 = o$$

bestimmt. Nun hat freilich Aronhold die Funktionen α und β unmittelbar aus den ursprünglichen Elementen von V construirt. Für die numerische Anwendung wird es aber leichter sein, α und β aus [1] herzuleiten. Nur schade, dass da α^2 vorkömmt, weshalb das Vorzeichen von α ungewiss bleibt. Durch meine Formel wird diese Ungewissheit beseitigt. Sie ist

$$\Psi = \alpha\,V^3 + W^2 \quad [2]$$

wenn in Ψ [p, q, r] für die reciproken Variabeln p, q, r die durch 3 dividirten Differentialcoefficienten des ursprünglichen Polynoms V substituirt werden. Wenn

---

[1]) Hesse, Ludwig Otto, geb. 22. IV. 1811, Professor in Königsberg, Halle Heidelberg und München, † 4. VIII. 1874.

[2]) Aronhold, Siegfried Heinrich, geb. 16. VII. 1819, Prof. in Berlin, † 13. III. 1884.

$$V = ax^3 + 3d\,x^2 y + 3e\,x^2 z + 3g\,x y^2 + 6\,k\,x y z + 3h\,x z^2 + b y^3 + 3f\,y^2 z + 3j\,y z^2 + c z^3$$

das Polynom der C_8 ist, so ist

$$\Psi = p^8 e^{\frac{-9\mathfrak{M}+r\mathfrak{N}}{p}} \begin{vmatrix} g & k & h \\ b & f & j \\ f & j & e \end{vmatrix}$$

nach abgekürzter Schreibweise der Taylor'schen Formel, wo $\mathfrak{M}$ und $\mathfrak{N}$ resp. die ableitenden Operationen bezeichnen, wo die Differentiale der Elemente a resp. in o und in o

d e	a o	o a
g k h	2d e o	od 2e
b f j c	3g 2k h o	o g 2k 3h

umgesetzt werden.

Es würde mir lieb sein, wenn Sie mir sagen könnten, ob die Relation [2] schon gegeben worden ist. Verzeihen Sie mir übrigens, dass ich für einen Augenblick solchen Gräuel[1]) vorgeführt habe.

Ist die Correspondenz mit der Wiener Akademie einmal eingeleitet, so hoffe ich, werde es mir wenigstens in der nächsten Zeit an Stoff zu interessanten Arbeiten nicht fehlen.

Doch die Zeit verfliegt rasch, und es gilt zu verhüten, dass einem Andere nicht vorkommen. Ich kann Ihnen schliesslich nicht genug danken für die Aufmunterung und die wohlwollende Sorge für mein Auskommen, womit Sie als ein Mann, der für die Förderung der Wissenschaft so kräftig gewirkt hat, mich beehrt haben, und erkläre mich Ihnen zu steter treuer Freundschaft für verpflichtet.

In der Erwartung, dass Sie diese Zeilen in bestem Wohlsein empfangen werden, grüsst Sie von ganzem Herzen.

Bern, den 4. Dez. 1850.

Länggasse No. 214.

Ihr Freund und Verehrer,
Ludwig Schläfli, Docent.

Steiner an Schläfli.

»*Mein lieber Freund!*

»Gewiss freue ich mich mit Ihnen, wenn Sie wirklich was Stich»haltiges gemacht haben. In meinem trägen Zustande bin ich indess »unfähig, die Sache gehörig zu beurtheilen. Ich glaube jedoch fest, dass

[1]) Die analytischen Auseinandersetzungen bezeichnete Steiner vorzugsweise mit »Greuel«.

«etwas dran sein wird. Aronhold, mit dem allein ich näher verkehre, «durfte ich Ihre Resultate nicht mittheilen, weil er sich selbst mit «der Elimination beschäftigt hat und stets auf Determinanten herum- «reitet. Er würde Ihre Sachen rasch verstehen, aber auch eben so «flux für sich benutzen, sie zu den seinigen machen, wie es vielfach «mit meinen Resultaten über algebraische Curven, etc., geschehen ist. «So habe ich auch jene Curve 3. Klasse, K^8, welche die Wendungs- «tangenten der C^3 berührt, schon 1847 u. 48 betrachtet u. ihm Vieles «darüber mitgetheilt; trotzdem werde ich überall sorgfältig ignorirt [1]).

«Unsere Verabredung scheinen Sie ganz vergessen zu haben. «Sie sollten sich ja an die Gesandtschaft wenden. Honorar hat man «nicht zu fordern, sondern es bekommt jeder, dessen Arbeit aufge- «nommen wird, und zwar alle gleich viel, nämlich 40 fl. Münze für «den Druckbogen (1 fl. Mz = 3 Zwanziger = 18 Batzen; in Bank- «scheinen jetzt viel schlechter, aber hoffentlich werden Ausländer in «Silber bezahlt). Ich will Ihnen meine Ansicht auf's Neue kund thun «und Ihnen etwa wie folgt rathen:

«Sie sagen im Begleitschreiben: Sie hätten mir, als ich diesen «Herbst auf einer Reise über Wien, Sie in Bern besuchte, einige «Ihrer Resultate mitgetheilt und mir dieselben für das Crelle'sche «Journal nach Berlin mitgeben wollen, worauf ich erwiedert: «ich «hielte dieselben für würdig, in die Schriften der K. K. Akademie zu «Wien aufgenommen zu werden, was für Sie, ausser der Ehre, noch «den Vortheil eines sehr anständigen Honorars gewähren würde.» «Durch dieses günstige Urtheil ermuthigt beehren Sie sich nun einer «Hochpreisslichen K. K. Akademie Ihre Arbeit ergebenst zu über- «reichen. Im Falle dieselbe zur Aufnahme nicht geeignet erachtet «würde, so erbitten Sie sich das Manuscript zu anderer Verwendung «zurück [2]). Sie können auch bemerken, dass bereits kleinere Aufsätze «von Ihnen im Crelle'schen Journal (?) so wie in den Berichten der «naturf. Gesellschaft in Bern gedruckt sind. Im Begleitschreiben geben «Sie auch eine gedrängte Uebersicht vom Inhalte Ihrer Arbeit, in «der Weise, wie Sie es in meinem Briefe gethan haben, citiren Sie «die andern Helden (*Jacobi, Cayley, Hesse,...*) und lassen Ihre That «darüber stehen, wie es sich in der Abhandlung selbst herausstellt. «Denn solcher Brief liest sich leichter und wird lieber gelesen, als «der Gräuel in 16 Bogen, und die Herrn sehen sogleich, woran sie

[1]) Vergl. die Note S. 74.

[2]) Von hier an existirt ein Concept.

»sind. — Wollen Sie (als Cima bue[1]) an Ihren Burgdorfer (Secunda) »*Boué* adressiren, so habe ich nichts dagegen; sonst brauchen Sie »nur »an die Kaiserlich-Königliche Hochpreissliche Akademie der »Wissenschaften in Wien« zu adressiren, auch selbst in dem Falle, »wenn Sie sich in einem einliegenden Briefe an Boué wenden. Spedirt »die Gesandtschaft Ihr Paquet nicht, so können Sie dasselbe unfrankirt »an die Akademie schicken; (es wird nicht nöthig sein, darauf zu »schreiben: »Wissenschaftliche Abhandlungen« oder »zum Druck be»stimmt«, ich glaube nicht, fragen Sie auch darüber die Gesandtschaft).

»Mag auch die Freiheit in Oestreich einen starken Stoss er»halten, so wird doch die Akademie bleiben, da sie ja vor 1848 ge»gründet worden; der Patrizier Studer ist kein Politiker. Also frisch »gewagt, aber doch nicht übereilt, ich hoffe und wünsche, dass es »gehe. Amen.

»Leider bin ich nicht der Mann, der sagen kann, ob Ihre »Gleichung neu ist. Wenn Sie übrigens Crelle's (u. Liouvilles) Journal »ganz gefressen haben, so wird keine Gefahr sein. Wohl schreiben »Cayley und ein anderer Engländer noch in englischen Journalen »(Transaktionen, etc.), aber was sie publicirt haben, kann ich Ihnen »auch nicht verrathen. — In den »Monats-Berichten« der Berl. Akad. »August-Heft 1848 finden sich einige Andeutungen über mein Treiben »in Rücksicht auf algeb. Curven, was Sie später auch einmal ansehen »können. Hr. *Aronhold*, dem die einzelnen Sätze schon zuvor mitge»theilt worden, hat seine Rechnungen daran vervollkommnet und er»weitert u. ergänzt.

»Von jener Aufgabe, die Sie vor 2 Jahren lösen sollten, die »Zahl x der Punkte zu bestimmen, damit sie sich zu 3 Ecken, 4 »Ecken, etc. verbinden lassen, hat jetzt H. *Eisenstein*[2]) den ersten »Fall, bloss die 3 Ecken betreffend, gelöst. Er zieht daraus schon Schlüsse »für die Wahrscheinlichkeits-Rechnung.

---

[1]) Titel, mit dem Steiner Schläfli oft, wenn er in guter Laune war, regalirte.

[2]) Gotthold Eisenstein, geb. 16. IV. 1823 zu Berlin, wurde als Student im 3. Semester von der philosophischen Fakultät der Breslauer Hochschule zum Doctor phil. honoris causa promovirt und zwar wegen seiner ausgezeichneten mathematischen Arbeiten, Mitglied der K. Akademie zu Berlin, starb leider 29-jährig am 11. X. 1852. Vergleiche die Arbeit von Prof. Dr. *F. Rudio* »Eine Autobiographie von Gotth. Eisenstein« und »Briefe von G. Eisenstein an M. A. Stern« herausgegeben von *A. Hurwitz* und *F. Rudio*. Abhandlungen zur Geschichte der Mathematik. VII, S. 145 u. ff.

«Sollte Ihre Sache in Wien nicht sogleich gehen, so sinken Sie «nicht sofort zusammen, sondern thun es mir zu wissen, damit wir «dem Schicksal Trotz bieten.

«Und der *Blösch!* [1]) hat der noch nichts gethan? Gehn Sie doch «selbst einmal zu ihm und erinnern Sie ihn mit einem Gruss von «mir, sind Sie nicht blöde, er stösst ja nicht. Sie können ihm so «nebenher auch erzählen, ich hätte Sie getrieben einige Arbeiten der «Wiener Akad. zu überreichen, deren Schriften auch Fremden geöffnet «(die der Berliner nicht); aber von Honorar brauchen Sie nicht zu «sprechen.

«Hier ist die Witterung bis jetzt mild, immer noch 1°—3° «Wärme, dagegen die Politik ist erschrecklich tief unter Null.

«Vorwärts für Freiheit und Wissenschaft! es wird schon gehen.

«Berlin, 15. Decemb. 1850.

«Ihr Freund,

«*J. Steiner.*»

1851. Schläfli an Steiner.

Mein lieber Freund!

Ich kann nicht anders, als Ihnen die freudige Nachricht mitteilen, die ich am 31. Jan. von Wien erhalten habe, dass nämlich auf den günstigen Bericht der Beurteilungskommission hin die mathematisch-naturwissenschaftliche Classe beschlossen habe, meine Abhandlung in ihre Denkschriften aufzunehmen und dass das festgesetzte Honorar für den Druckbogen 40 fl. Conk. Münze betrage. Der Brief ist vom 18. Januar datirt, und meine Einsendung ist am 7. Jan. in Wien eingetroffen. Sie sehen hieraus, wie schnell die Beurtheilung erfolgt ist. Es wird mir dann ferner mitgetheilt, dass meine Arbeit nicht vor drei Monaten zum Drucke gelangen könne, weil die chronologische Ordnung beobachtet werden müsse, und ich werde daher angefragt, ob ich unter dieser Bedingung mein Manuscript der Akademie überlassen wolle.

Die diese Frage wie natürlich bejahende Antwort habe ich nun vorgestern zugleich mit einer Fortsetzung der Abhandlung über die Classengleichung der Curve dritten Grades abgeschickt. Ich fand nämlich seither, dass die Polynome F [p, q, r] und Ψ [p, q, r] resp. vom 6. und 4. Grade, welche gleich Null gesetzt die ursprüngliche

[1]) Regierungspräsident, damals Leiter des bern. Erziehungsdepartements. Vergl. auch die bezügliche spätere Bemerkung.

Curve dritten Grades und die ihren Wendungstangenten eingeschriebene Curve dritter Classe in Liniencoordinaten p, q, r ausdrücken, in sehr einfacher Beziehung zu den in meinem letzten Briefe mit α, β, von *Aronhold* mit S und T bezeichneten Superdeterminanten 4. und 6. Grades der 10 ursprünglichen Constanten stehen. Die Coefficienten von Ψ sind nämlich die 10 ersten Differentialcoefficienten von S, also Ψ erster Derivat von S; und in diesem Sinne ist dann F zweiter Derivat von T. Mich wundert nur, dass *Aronhold* diese Sätze in seiner Abhandlung nicht ausgesprochen hat.

Ich habe dieselbe seither mit grossem Vergnügen gelesen, und es ist mir auch gelungen, alle darin enthaltenen Sätze, wie ich glaube, möglichst direct zu beweisen. Doch bin ich immer noch begierig, aus der ausführlichern Schrift Aronhold's zu vernehmen, wie *er* diese Sachen angegriffen hat. Jedenfalls bilden seine Resultate eine wichtige Ergänzung der *Hesse*'schen Arbeit.

Ich kann Ihnen nicht genug dafür danken, dass Sie mir eine so lukrative Gelegenheit zu litterarischer Thätigkeit verschafft haben, und wünsche nur, dass mir der Himmel genug Kraft und Besonnenheit verleihe, um mich Ihrer Empfehlung würdig vorzeigen zu können.

Den *Blösch* habe ich immer noch nicht besucht und weiss nicht, ob ich es noch thun werde. Sie werden schon vernommen haben, dass unsere Regierung bald links bald rechts Straftruppen ausschickt, um die immergrünen Sinnbilder der Freiheit zu vertilgen, und den Leuten das Absingen von zin zin ratamplan zu verleiden. Da kann es einem Regierungspräsidenten nicht von ferne einfallen, für einen armen Docenten einen Schritt zu thun.

Indem ich Ihnen meine Glückwünsche darbringe, habe ich die Ehre zu sein

Ihr Freund

Bern, den 7. Feb. 1851. *L. Schläfli.*

Steiner an Schläfli.

Marienbad, den 31. Juli 1851.
(in Böhmen)

Lieber Freund!

»Ich wollte Ihnen gleich nach Empfang Ihres freudigen Briefes » vom 7. Februar antworten, wenn meine Schlaffheit es zugelassen hätte. » Es schien mir damals nöthig einige Warnungen und Rathschläge an » Sie zu richten, damit die eröffneten schönen Hülfsquellen nicht etwa

«karger werden oder gar versiegen. Die verschiedenen Punkte, die «ich damals im Kopfe hatte, sind mir jetzt nicht mehr genau erinner- «lich, nur weiss ich, dass ich Sie warnen wollte, nicht zu geringe «Sachen nach Wien zu schicken, nicht zu *breit*, nicht zu *hastig*, kein «unreifes Zeug, mit einem Wort in keiner Art so zu schreiben, woran «zu merken, dass es bloss des Honorars wegen geschieht. Denn wenn «Sie jährlich 10—15 Bogen liefern, so ist es genug, und diese können «Sie dann wohl sorgfältig, gründlich und bündig durcharbeiten. Dies «ist desshalb nöthig, damit Sie nicht später durch Andere verdrängt «werden. Um Ihrentwillen habe ich bisher absichtlich die Verhältnisse «keinem mitgetheilt, weil sonst bald Jeder Aufsätze liefern würde. So «verrieth ich selbst kürzlich nichts, als *H. Borchard*[1]) mir erzählte: «H. «Dr. *Rosenhein*[2]) habe aus Wien geschrieben, dass die dortige Akademie «seine Abhandlung drucken und ihm 40 fl. Mz. pro Bogen zahlen würde.» «Dieser Jüd Rosenhein stellte die Sache so dar, als wenn es eine be- «sondere Auszeichnung für ihn wäre. Derselbe war seit Jahren Privat- «docent in Breslau, gewann im letzten Jahr den grossen Preis in der «Pariser Akademie[3]), wollte darauf angestellt sein (was ihm vom früheren «Minister versprochen war), und als es nicht geschah, so gieng er zu «Ostern nach Wien, wo er aber aus religiösen Gründen auch nicht an- «kommt. Aber um so mehr wird er nun wohl ein Concurent von Ihnen «werden. Darum hören Sie auf Botanik und Granit zu fressen, wobei «Sie verhungern können, sondern nehmen Sie einen doppelten Anlauf «auf die Mathematik; dann werden Sie darin auch bald Nagelneues «schaffen. Uebrigens versteht es sich; dass wenn Sie ausgezeichnete «Gegenstände haben, dann beliebig viel übersandt und der Akademie die «Sorge überlassen werden kann, *wie* und *wann* sie es publicirt; dabei «stehn Sie dann immer felsenfest, werden gut fahren und keiner wird «Sie ausstechen.

«Am 26. Mai hielt ich in der Klasse unserer Akad. einen Vortrag «*über solche algebraische Curven, welche einen Mittelpunkt haben und*

---

[1]) C. W. Borchardt, geb. 22. II. 1817, Mitglied der Akademie der Wissenschaften zu Berlin, Nachfolger Crelle's in der Redaktion seines Journals für reine Mathematik, von der Romreise her (1843) mit Schläfli bekannt, späterer Freund Schläfli's, † 17. VI. 1880 auf dem Rittergute Rüdersdorf bei Berlin (siehe Biographie Schläfli's, Berner Mittheilungen 1895, S. 148).

[2]) Rosenhain, J. G., geb. 10. Juni 1816 zu Königsberg, 1857 Professor da selbst, † 14. III. 1887.

[3]) Hier irrt sich Steiner, Rosenhain erhielt diesen Preis schon 1846, nicht 185

»*über andere damit in Beziehung stehende Eigenschaften allgemeiner »Curven.*« Im Monatsbericht findet sich eine nähere Angabe des Inhalts. Ein Auszug, den ich Crelle übergeben wollte, ist leider nicht fertig geworden; jede Kleinigkeit hielt mich Tagelang auf, weil ich nicht mehr arbeiten kann, besonders des abends geht es nicht mehr, was doch früher meine beste Zeit war; ich werde bei der Rückkunft versuchen die Arbeit zu beendigen. Ich sties dabei mitunter auf Sätze, welche ich nicht streng zu beweisen vermochte, wie z. B. folgende:

»1. Wenn eine C^8 (Curve 3ten Grads) durch gegebene 6 Punkte p gehen, einen Doppelpunkt $\mathfrak{P}_2$ haben. und wenn die beiden Tangenten a und b in dem letztern, durch gegebene Punkte A und B gehen sollen, so ist sie 25deutig bestimmt, d. h., so giebt es 25 verschiedene Curven C^8, welche der Forderung genügen. Daher

»2. Wenn eine C^8 durch gegebene 6 p gehen, einen $\mathfrak{P}_2$ haben, und die eine Tangente a in diesem $\mathfrak{P}_2$ durch einen siebenten gegebenen Punkt A gehen soll, so ist der Ort des Doppelpunkts $\mathfrak{P}_2$ eine Curve 7ten Grads, $= \mathfrak{P}_2^7$, und der Ort der andern Tangente b in demselben ist eine Curve 25ster Klasse, $= b^{25}$. U. s. w.

»Im Monatsbericht (Mai, d. Jahres) werden Sie noch einige Sätze finden, an denen Sie sich üben können. Der kleine Jüd (Aronhold) hat sie alle bewiesen, nebst andern, die nicht angegeben sind. Folgender Satz war nicht leicht vollständig zu discutiren. Wenn eine gerade S eine Curve C^4 in 4 solchen Punkten schneidet, welche paarweise a und a, b und b, gleichweit von einem 5ten Punkte m in S abstehen (am = ma, bm = mb), so heisst sie *Doppelsehne* und wird durch S_2 bezeichnet, und m heisst ihr Mittelpunkt.

»3. »*Der Ort aller Doppelsehnen S_2 einer Curve C^4 ist eine Curve 9ter Klasse, S_2^9, und der Ort ihrer Mittelpunkte m ist eine Curve 10ten Grads, m^{10}.*« Dabei sind die 108 gemeinschaftlichen Tangenten von C^4 und S_2^9 anzugeben interessant; die 40 Schnitte von C^4 und m^{10}, sie haben eigenthümliche Bedeutung. Man lernt daraus: dass es bei einer C^4 im Allgemeinen 32 solche Tangenten (= S_2) giebt, deren Berührungspunkt (bb_1) in der Mitte zwischen den beiden Schnitten (a und a_1) liegt. U. s. w. — Für alle C^3, welche durch gegebene 6 p gehen und Mittelpunkte $\mathfrak{M}$ haben, ist der Ort dieser $\mathfrak{M}$ eine Curve 5ten Grads = $\mathfrak{M}^5$. Die analoge Aufgabe für die Schaar C^4, welche durch gegebene 9 p gehen und Mittelpunkte $\mathfrak{M}$ haben. Desgleichen für Schaar C^5, etc. Ich bin damit nicht bis zum allgemeinen

«Satz durchgedrungen, Aronhold auch nicht; daher wird der feige «Thuner gar nicht anbeissen[1]). — Wenn ich hoffen könnte, Sie würden «wirklich auch mit Ernst an Aufgaben gehen, welche noch nicht von «mir oder einem Andern gelöst sind, so würde ich Sie künftig gern «mit dergleichen überhäufen. In der That wäre es auch besser, als «wenn Sie, wie im vorigen Herbst, *Kiltblumen*[2]) mit sammt den Wurzeln «auffressen. Ich kann leider nicht mehr wie früher arbeiten; die Phan- «tasie ist fast ganz erloschen, das erschlaffte Gangliensystem wirkt auf «das Gehirn, so dass ich beim besten Willen, etwas zu thun, immer «einschlafe, sobald ich die Augen zumache, um die Gegenstände anzu- «schauen. Der kleine Jüd stände mir wohl zur Hand, aber was habe «ich davon; was sich durch Rechnung von selbst Weiteres einstellt, «theilt er mir nicht mit, und was von mir stammet, wird mir wenig «verdankt, wird als aus der Rechnung hervorgehend benützt, ohne des «Urhebers zu gedenken. So hielt ich es nicht für rathsam, ihm Ihre «Bemerkungen mitzutheilen, weil ich weiss, wie viel er durch meine «Untersuchungen im letzten Winter und besonders 1848—49 profitirt «hat, die ihm meist zum controliren überliefert worden. Er hat haupt- «sächlich dadurch seine Methode ausgebildet (Euch alle überflügelt), «räumt aber ungern ein, dass er meinen mühsamen Forschungen viel «zu verdanken habe[3]). Die Art, wie er die Gegenstände behandelt, kann «ich nicht genau angeben, weil ich mich zu wenig darum kümmere. «Er benutzt theils die von mir aufgestellten geometrischen Grundprin- «zipien, theils muss er analoge neue aufstellen, wie sie die Rechnung «erheischt. Um z. B. die Klassengleichung einer Curve 3ten Grads C^3 «zu finden, ist das Verfahren, wie ich glaube, ohngefähr so: Man be- «stimmt von einer geraden G, in Bezug auf C^3, die zweite Polarenve- «loppe E^2 (1. Monatsber. August 1848), verlangt sodann, dass diese E^2 «die C^3 berühren soll, wobei nothwendig auch G beide im nämlichen «Punkte berühren muss, und wodurch man sodann, durch Wechslung «der Veränderlichen, zur Gleichung von G oder der Klassengleichung «gelangt. — Für die Curve C^4 werden zwei (ich weiss nicht auf welche «Weise bestimmte) Curven 4ter und 6ter Klasse, $\mathfrak{A}^4$ und $\mathfrak{B}^6$, zu Hülfe

[1]) Mit dieser kräftigen Aeusserung wollte Steiner Schläfli, wie man sagt «guslen», d. h. seinen Ehrgeiz wecken.

[2]) Damit sind gemeint entweder Orchis morio (Knabenkraut) oder Colchicum autumnale (Herbstzeitlose) oder Lychnis vespertina.

[3]) Hier bemerkt Herr Prof. Dr. Geiser: Das Urtheil Steiner's über Aronhold ist bei aller Anerkennung, die er ihm wiederfahren lässt, ungerecht. Aronhold hat gerade Steiner's Verdienst um die C_3 und K_3 (oder ψ) bei passender Gelegenheit hervorgehoben.

»genommen, wobei alsdann $\alpha . (\mathfrak{A}^4)^3 + \beta . (\mathfrak{B}^6)^2 = 0$ die Klassengleich-
»ung von C^4 giebt. — Näheres weiss ich nicht. Sie werden sich aber
»schon zu helfen wissen.

»Diesen Winter besuchte mich einmal *Eisenstein*, wollte mich
»für einen Privatzweck dadurch zu seinen Gunsten kirren, dass er an-
»gab, er habe den ersten Fall meiner Aufgabe (welche ich Ihnen 1848
»von Rippoldsau aus mittheilte, und wovon er durch Aronhold Kenntniss
»erhielt) gelöst, nämlich er könne die Zahl der Punkte angeben, welche
»sich unter den gestellten Bedingungen zu Dreiecken verbinden lassen;
»(dass die Gerade, welche je zwei Punkte verbindet, Seite eines, aber
»nur eines Dreiecks ist). Auch sprach er von interessanten Anwend-
»ungen, die er davon auf Fälle der Wahrscheinlichkeitsrechnung ge-
»macht habe. Vielleicht hat er seitdem die Aufgabe auch für die Vier-
»ecke, Fünfecke, etc. gelöst: Ich habe ihn nicht wieder gesprochen,
»er wohnt auf dem Lande und ist kränklich.

»Ich bin froh, dass der Brief zu Ende ist; hier wird mir das
»Schreiben noch saurer, als zu Hause; der Kreuzbrunnen greift an, man
»soll gar nichts thun, nur ein Schlaraffenleben führen. — Bis zum
»20. August werde ich noch hier verweilen müssen; wo es von da
»hingeht, weiss ich noch nicht; nach London ist wohl weit und zu
»kostspielig; also nur nach Regenspurg, München etc. und Ende Sept.
»oder Anfangs October wieder heim.

»Was macht der junge *Henzi*[1])? Grüssen Sie ihn. Grüssen Sie
»auch: »Nous vivons entre nous!« [2])

»Von Wien ist diesmal niemand hier von dem ich erfahren konnte,
»ob Ihre Abhandlung schon gedruckt.

»Dieses Frühjahr hat Aronhold einmal Riesen-Rechnungen ausge-
»führt, die 10 Constanten (wahrscheinlich dieselbe, von denen Sie mir
»schrieben, einer Gleichung 3ten Grads) numerisch zu berechnen.

»Leben Sie mehr von Gräuel, als von Pflanzen und aller Art Gesteine!

»Es grüsst Sie Ihr ergebener *J. Steiner.*«

---

[1]) Friedrich Henzi v. Bern, Schüler Wolf's, damals Student der Astronomie, geb. 28. I. 1827 in Dorpat, wo sein Vater Professor der orientalischen Sprachen war. Henzi studirte unter Argelander in Bonn, wurde dann Bergwerksingenieur, 1861—68 Direktor des Eisenwerks in Mels, kehrte nach Bern zurück und starb am 1. V. 1884.

[2]) *Bernhard Gerwer*, 1835 Docent, 1856 a. Professor an der bernischen Hochschule; 1843—1856 Lehrer der Mathematik und der math. Geographie am Höhern Gymnasium, 1856—1868 Lehrer der darstellenden und der praktischen Geometrie an der Kantonsschule, † Dec. 1868.

1852. Schläfli an Steiner.

Mein lieber Lehrer und Freund!

Ihr letzter Brief vom 31. Juli 1851 hat mich herzlich gefreut; nur muss ich jetzt zu meiner Beschämung gestehen, dass ich an den darin angeregten schweren und schönen Sachen bis jetzt noch nicht gearbeitet habe, dass ich aber nun bald Fleiss darauf verwenden werde, darf ich jetzt um so mehr versprechen, weil ich unlängst (November) einen der für mich seltenen glücklichen Augenblicke im Studium der Mathematik erlebt habe. Entschuldigen Sie es mit meiner armseligen Lage, dem fast gänzlichen Mangel an geselligem Verkehr und der daraus hervorgehenden gedrückten Stimmung, dass ich fast den ganzen Sommer der morphologischen Botanik widmete. Wenn ich nur wüsste, die reine Mathematik mit objektiver Wirklichkeit zu verbinden! Es war früher mein Wunsch, mathematische Physik zu studiren; aber wenn man nicht die Mittel hat, um eigene Versuche (zu machen), so ist da kaum etwas zu leisten.

Nachdem ich meine Theorie der Elimination der Wiener Akademie übergeben hatte, war mein nächster Vorsatz, die Theorie der vielfachen Continuität so auszuarbeiten, dass sie mit Recht in den Wiener-Denkschriften erscheinen durfte. Nun war ich aber an der Verallgemeinerung der Theorie der orthogonalen Flächen stecken geblieben, immer glaubend, es müsse hier ein grosses Wunder verborgen sein, ohne jedoch dazu durchdringen zu können. Für drei Dimensionen nämlich giebt es eine einzige Bedingung, welcher die eine erste Flächenschaar darstellende Funktion der Coordinaten [f [x y z] = const.] genügen muss, damit diese Flächenschaar mit noch zweien andern Schaaren ein orthogonales System bilden können, wo in jedem Punkte des Raumes alle drei durchgehenden Flächen sich rechtwinklig durchschneiden; und diese einzige Bedingungsgleichung hat die merkwürdige Eigenschaft, dass sie in Beziehung auf die partiellen Differentialcoefficienten dritter Ordnung [es sind die höchsten] jener Funktion f *linear* ist. Ich vermuthete nun lange, diese Eigenschaft gelte auch für n Dimensionen überhaupt; und die $\frac{[n-1]\,[n-2]}{2}$ wesentlichen Bedingungsgleichungen, denen eine einzige Funktion genügen muss, müssten auch in Beziehung auf die höchsten Differentialcoefficienten linear erscheinen. Erst nachdem ich von einem Herbstferienaufenthalt in Lausanne nach Bern zurückgekehrt war, gelang es

mir, die Sache für drei Dimensionen so durchsichtig zu machen, dass ich nun begriff, warum hier jene Bedingungsgleichung linear wird, und dass diese Eigenschaft für mehr Dimensionen höchst wahrscheinlich nicht mehr besteht. Wie einmal dieser schwer auf meinem Herzen liegende Alp weggewälzt war, so wendete ich mich andern Partien der Continuitätstheorie zu und fand überraschende Sätze. Einen davon treibt es mich, Ihnen hier mitzutheilen, und es wird mich freuen, Ihr Urtheil darüber zu vernehmen.

Wenn das n-fache Integral

$$\int^{n} dx_1\, dx_2 \ldots dx_n = S \text{ durch Bedingungen}$$

$$x_1^{\,2} + x_2^{\,2} + \ldots + x_n^{\,2} < 1 \quad p_1 > 0 \quad p_2 > 0 \ldots, \; p_n > 0$$

begränzt wird, wo $p_1, p_2, \ldots p_n$ unter sich unabhängige lineare und homogene Polynome bezeichnen, so kann seine Berechnung für ein gerades n auf $\frac{n-2}{2}$ und für ein ungerades auf $\frac{n-3}{2}$ Integrationen zurückgeführt werden [1]).

Um den Satz näher auszusprechen, muss ich mich einer der geometrischen ähnlichen Sprache bedienen. Die Gesammtheit aller Lösungen der Ungleichheit

$$x_1^{\,2} + x_2^{\,2} + \ldots + x_n^{\,2} < a^2$$

nenne ich eine Polysphäre, a ihren Radius; diese Polysphäre ist also ein geschlossenes Stück des totalen n-fachen Continuums. Die Gesammtheit aller Lösungen einer linearen Gleichung nenne ich lineares [n—1] faches Continuum. Das Integral S ist ein Stück der Polysphäre, begränzt von n-linearen Continuen, die durchs Centrum gelegt sind, — *eine polysphärische Pyramide,* welche das Centrum zur Spitze hat, und deren Basis das entsprechende Stück des polysphärischen [n—1] fachen Gränzcontinuums ist. [Diese Pyramide ist gleich $\frac{1}{n}$ Radius × Basis.] Hat man die linearen Polynome $p_1, p_2, \ldots$ so eingerichtet, dass in jedem die Summe der Quadrate der Coefficienten der Variabeln gleich 1 ist, so nenne ich die negative Summe der Produkte der gleichnamigen Coefficienten in zwei Polynomen p_1, p_2 den Cosinus des *Winkels* zwischen den entsprechenden linearen Continuen. Da nun die Funktion S oder der Inhalt der polysphärischen Pyramide nur von

[1]) Siehe die Bemerkung am Schluss dieses Briefes, welche die vorliegend Darstellung noch näher beleuchtet.

den $\frac{n\,[n-1]}{2}$ Winkeln zwischen je zweien linearen Continuen abhängt, so nenne ich ferner diese Winkel die *Argumente* von S. Der auf das Argument $\measuredangle\,[p_1\,p_2] = [12]$ bezügliche z. B. ist der n^{te} Theil der $[n-2]$ sphärischen Pyramide, welche durch den Durchschnitt der linearen Continuen $p_1 = 0$ und $p_2 = 0$ gebildet wird, also eine mit S ganz ähnliche Funktion von $\frac{[n-2]\,[n-3]}{2}$ Argumenten, welche aus den ursprünglichen Argumenten durch die bekannten Relationen der sphärischen Trigonometrie gefunden werden. Denkt man sich z. B. die ursprünglichen Argumente [23], [13], [12] als Winkel eines gewöhnlichen Kugeldreiecks und bezeichnet die entsprechenden Seiten mit $[\overline{1},\ 23]$ $[\overline{2},\ 13]$ $[\overline{3},\ 12]$, fasst dann wiederum z. B. $[\overline{1},\ 34]$ $[\overline{1},\ 24]$ $[\overline{1},\ 34]$ als Winkel und $[\overline{12},\ 34]$, $[13,\ 24]$ $[14,\ 23]$ als entsprechende Seiten eines neuen Kugeldreiecks auf, so ist $[\overline{12},\ 34]$ z. B. das Argument $\measuredangle\,(p_3\,p_4)$ der $(n-2) =$ sphärischen Pyramide, deren n^{ter} Theil dem auf das ursprüngliche Argument (12) bezüglichen Differentialcoefficienten von S gleich war.

Für $n = 2$ ist S ein Kreisausschnitt vom Radius 1, sein Argument ist der Mittelpunktswinkel α und $\frac{dS}{d\alpha}$ die Hälfte des Inhalts des nullfachen Continuums, welches die zwei Radien gemein haben, oder des Centrums. Da nun die analytische Consequenz es erfordert, dass als Inhalt eines Punktes immer die Einheit angenommen werde, so ist $\frac{dS}{d\alpha} = \frac{1}{2}$, $S = \frac{1}{2}\,\alpha$ und die Basis des Ausschnitts, der Kreisbogen $= \alpha$.

Für $n = 3$ ist S eine Kugelpyramide, ihre Argumente α, β, γ sind die Winkel zwischen den begränzenden Ebenen oder die Winkel des Kugeldreiecks [der Basis]; die drei Differentialcoefficienten sind $\frac{1}{3}$ der bezüglichen Kanten oder Radien, welche je zweien Ebenen gemein sind; also $dS = \frac{1}{3}\,[d\alpha + d\beta + d\gamma]$, und wenn man die Integrationskonstante richtig bestimmt, $S = \frac{1}{3}\,[\alpha + \beta + \gamma - \pi]$ die Basis oder das Kugeldreieck also $= \alpha + \beta + \gamma - \pi$.

Da ich die den regulären Polyedern entsprechende Untersuchung für n-Dimensionen durchgeführt habe — für $n = 4$ giebt es nämlich 6 einfache reguläre Polyscheme und 2 überschlagene, die ich durch

folgende leicht verständliche Charaktere kurz bezeichnen kann (3, 3, 3) (3, 3, 4), (3, 3, 5), (3, 4, 3), (4, 3, 3), (5, 3, 3) resp. umschlossen von 5, 16, 600 Tetraedern, 24 Oktaedern, 8 Hexaedern, 120 Dodekaedern; endlich noch $(3, 3, \frac{5}{2})$ von 600 Tetraedern, $(\frac{5}{2}, 3, 3)$ von 120 überschlagenen Dodekaedern umschlossen, beide mit 191 mal umgeschlungener Begränzung; für $n \leqq 5$ immer nur drei, welche dem Tetraeder, Oktaeder und Hexaeder entsprechen, und bei denen die Begränzung resp. aus $n + 1$, 2^n, $2n$ Stücken besteht — so kenne ich auch alle möglichen symmetrischen Theilungen der Tetrasphäre, Pentasphäre etc. und gelange dadurch zu merkwürdigen bestimmten Integralformeln, unter denen mich diese zwei

$$\int_{\sin x = \sqrt{\frac{1}{3}}}^{x = \frac{\pi}{5}} \arccos \frac{\sin x}{\sqrt{4 \sin^2 x - 1}} \cdot dx = \frac{\pi^2}{3600};$$

$$\int_{}^{x = \frac{2\pi}{5}} \arccos \frac{\sin x}{\sqrt{4 \sin^2 x - 1}}\, dx = \frac{191\, \pi^2}{3600}$$

die meiste Arbeit gekostet. [1])

Der Beweis jenes allgemeinen Satzes ist sehr einfach. Er beruht auf einem Hülfssatz, der auf $n = 3$ beschränkt so lautet:

»In einem Kugeldreieck ist eine Seite als *Basis* angenommen und darauf aus dem entsprechenden Eck ein grösster Kreisbogen senkrecht gezogen, welcher *Höhe* heissen soll. Wird nun jedes Element des Kugeldreiecks mit dem Cosinus seines sphärischen Abstandes von der Spitze multiplizirt, so erhält man als Summe aller solchen Produkte das halbe Produkt der Basis und des Sinus der Höhe.«

Es hat mich sehr befremdet, dass ich bis jetzt noch gar keine Nachricht aus Wien erhalten habe.

---

[1]) In einem Concept führt Schläfli noch folgende Formeln an:

$$\int_{}^{x = \frac{\pi}{4}} \arccos \frac{\sin x}{\sqrt{4 \sin^2 x - 1}}\, dx = \frac{\pi^2}{96}, \quad \int_{}^{x = \frac{\pi}{3}} = \frac{\pi^2}{30},$$

$$\int_{}^{x = \frac{\pi}{2}} \arccos \frac{\sin x}{\sqrt{4 \sin^2 x - 1}}\, dx = \frac{\pi^2}{12}.$$

Gegen das Ende Dezember habe ich dorthin geschrieben,[1] Auskunft über das Schicksal meiner eingesandten Arbeit bittend die Vermuthung aussprechend, dass mein letzter Brief, worin meine Einwilligung zu den gestellten Bedingungen ausspreche, an den Ort seiner Bestimmung gelangt sein möchte; zugleich ich um Aufnahme einer neuen Arbeit über die Theorie der vielfa Continuität angefragt, indem ich Bedeutung und Wichtigkeit solchen Theorie durch Andeutung einiger Resultate und des Um der Untersuchungen, über welche sie sich erstreckt, hervorzuh suchte. Den schönen Satz, denn ich Ihnen hier mittheile und Sie einstweilen für sich behalten mögen, habe ich nicht erö sondern nur davon gesprochen, wohl aber die bestimmten Inte welche daraus herfliessen, hingestellt. Es nimmt mich nun Wu ob das Stillschweigen brechen wird.

$$\int_{\sin x = \sqrt{\frac{2}{3}}}^{x = \frac{\pi}{3}} \operatorname{arc\,cos}\left(\frac{\sqrt{\frac{1}{2}}\sin x}{\sqrt{2\sin^2 x - 1}}\right) dx = \frac{\pi^2}{288};$$

$$\int_{\cos x = \frac{1}{4}}^{x = \frac{\pi}{2}} \operatorname{arc\,cos}\left(\frac{\cos x}{1 - 2\cos x} - \frac{\pi}{3}\right) dx = \frac{\pi^2}{120}$$

$$\int_{\cos x = \frac{1}{3}}^{x = \frac{\pi}{2}} \operatorname{arc\,cos}\left(\frac{\cos x}{1 - 2\cos x}\right) \cdot \operatorname{arc\,cos}\left(\frac{\cos x}{1 + 2\cos x}\right) \cdot dx = -\frac{7\pi}{36}$$

$$\int_{\cos x = \frac{1}{4}}^{x = \frac{\pi}{2}} \operatorname{arc\,cos}\left(\frac{\cos x}{1 + 2\cos x}\right) \cdot \left(\operatorname{arc\,cos}\frac{\cos x}{1 - 2\cos x} - \frac{\pi}{3}\right) dx = -$$

$$\int_{\cos x = \frac{1}{4}}^{x = \frac{\pi}{2}} \operatorname{arc\,cos}\frac{1}{1 + 2\cos x} \cdot \left(\operatorname{arc\,cos}\frac{\cos x}{1 - 2\cos x} - \frac{\pi}{3}\right) \cdot dx =$$

[1]) Siehe den nachfolgenden Brief.

Wenn man meine Continuitätstheorie in Wien nicht annimmt, möchte ich sie als Privatschrift publiciren, und da Sie mir schon viel Wohlwollen und Freundschaft bewiesen haben, so möchte ich e vorläufig anfragen, ob Sie mir etwa in Berlin einen Verleger üssten, von dem ich ein Honorar bekäme.

Grüssen Sie mir *Dirichlet, Borchard, Crelle, Aronhold.* Ueber en jungen *Henzi* kann ich Ihnen nichts Weiteres sagen, als dass ich n bisweilen in den Versammlungen der naturf. Gesellschaft sehe, id dass mir seine ganze Erscheinung wohl gefällt, weil sie geistige bendigkeit ausdrückt. Mit *Gerber* habe ich leider so wenig Verkehr mit *Wolf.*

Wenn Sie mir bald antworten, so wird es mich sehr freuen. hoffe, Ihnen etwa auch bald wieder schreiben zu können.

Ihnen für das angetretene Jahr viel Glück und gute Gesundheit nschend, grüsst Sie herzlich

Ihr dankbarer Schüler und Freund,

Bern, den 3. Jan. 1852. *L. Schläfli, Docent.*

Bemerkung. In einem unter Schäfli's Papieren gefundenen Con- zu diesem Briefe findet sich an oben angemerkter Stelle noch gender Abschnitt eingeschaltet, der dem Briefe fehlt:

»Um die Art, wie dies geschieht näher zu erklären, bedarf ich er kleinen Vorbereitung. Wenn z. B. $n = 4$ ist, und es kommen Werthe der Variabeln w, x, y, z in Betracht, welche die ynome

$$p = aw + bx + cy + dz, \quad p' = a'w + b'x + c'y + d'z$$

itiv machen, so nenne ich die konstante Grösse

$$-\frac{aa' + bb' + cc' + dd'}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2 + d^2} \cdot \sqrt{a'^2 + b'^2 + c'^2 + d'^2}}$$

den Cosinus des Winkels der beiden Polynome p, p' [cos $\angle(pp')$], die Quadratwurzeln immer positiv zu verstehen sind. Im obigen gemeinen Falle kommen also $\frac{n\,[n-1]}{2}$ *Winkel* zwischen je zweien r gegebenen Gränzpolynome $p_1, p_2 \ldots p_n$ in Betracht; ich nenne e die *Argumente* der Funktion S, weil der Werth des durch S be- ichneten n-fachen Integrals in der That nur von diesen Argumenten hängt.

Nun sind die ersten in Beziehung auf diese unter sich unabhängigen Argumente genommenen Differentialcoefficienten der Funktion S selbst wiederum solche Funktionen, wo die Dimensionszahl n auf n — 2 herunter gesunken ist. Das n-fache des auf $\measuredangle (p_1\ p_2)$ bezüglichen Differentialcoefficienten z. B. wird erhalten, indem man zuerst die alten Variabeln $x_1 \ldots x_n$ durch solche homogene und lineare Funktionen der neuen Variabeln $y_1 \ldots y_n$ ersetzt, dass

$$x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2 = y_1^2 + y_2^2 + \ldots y_n^2$$

und die Polynome p_1, p_2 nur die zwei neuen Variabeln y_1, y_2 enthalten, dann zweitens das [n — 2]-fache Intregal

$$\int^{n-2} dy_3,\ dy_4 \ldots dy_n$$

für die Gränzbedingungen

$$y_3^2 + y_4^2 + \ldots + y_n^2 < 1 \quad p_3 > 0 \quad p_4 > 0 \ldots p_n > 0$$

berechnet, nachdem in diesen Polynomen $y_1 = y_2 = 0$ gesetzt worden ist.

Für $n = 2$ ist S der Inhalt eines Kreisausschnittes vom Radius 1, $p_1 = 0$ und $p_2 = 0$ sind die Gleichungen der Radien, welche diesen Ausschnitt begränzen, und das einzige Argument der Funktion S ist der Winkel α, den diese zwei Radien einschliessen. Eine Transformation der Variabeln ist nicht nöthig, weil deren nur zwei sind. Der doppelte Differentialcoefficient von S in Beziehung auf S ist der Inhalt des Centrum, in welchem die zwei Radien sich schneiden. Da nun als Inhalt eines Punktes im Gebiete von 0 Dimensionen nur die Einheit gelten kann, so ist $2\ \frac{dS}{d\alpha} = 1$, also $S = \frac{1}{2}\ \alpha$.

Für $n = 3$ ist S der Inhalt einer Kugelpyramide vom Radius 1, $p_1 = 0$, $p_2 = 0$, $p_3 = 0$ sind die Gleichungen der diametralen Elemente, welche dieselben begränzen, und die drei Argumente

$$\alpha = \measuredangle (p_2\ p_3),\ \beta = \measuredangle (p_1\ p_3)\ \ \gamma = \measuredangle (p_1\ p_2)$$

sind die Winkel des Kugeldreiecks, der Basis der Pyramide S. Um $3\ \frac{dS}{d\alpha}$ zu erhalten, muss man zuerst rechtwinklige Coordinaten so in neue rechtwinklige transformiren, dass p_2, p_3 nur y, z enthalten, d. h. dass die durch diese Polynome dargestellten Ebenen in der Axe der x sich schneiden.

Setzt man dann $y = 0$, $z = 0$, so reduzirt sich die Gränzbedingung $p_1 > 0$ auf $x > 0$ und man hat das Integral $\int dx$ für die Gränze $x^2 < 1$, $x > 0$ zu berechnen, was

$\frac{dS}{d\alpha} = 1$, also $S = \frac{1}{3}(\alpha + \beta + \gamma - \pi)$ giebt.

Concept des Briefes Schläfli's an den Secretär der k. k. Akademie der Wissenschaften in Wien vom Dez. 1851.

«Es ist nun ein Jahr verflossen, seit ich der kaiserl. Akademie der Wissenschaften eine Abhandlung «über die Resultante eines Systems mehrerer algebr. Gleichungen» zugeschickt habe. Ich erhielt unterm 18. Jan. 1851 die Zusicherung, dass die Abhandlung in die Denkschriften würde aufgenommen werden, wenn ich mein Manuscript unter der Bedingung überlassen wollte, dass es erst nach drei Monaten gedruckt würde. Hierauf antwortete ich sogleich, dass ich zufrieden sei, wenn meine Abhandlung so bald unter die Presse komme, und dass ich sie unter dieser Bedingung überlasse. Da ich nun nach Verfluss eines Jahres noch gar keine Nachricht über das Schicksal dieser Frucht meiner Arbeit erhalten habe, so fürchte ich fast, mein letzter Brief möchte nicht an seine Bestimmung gelangt sein. Ich muss daher dringend bitten, mir über diese Sache Aufschluss zu geben.

«Ich ergreife diese Gelegenheit, um wegen der Aufnahme einer neuen Arbeit anzufragen, von der ich glaube, dass sie den Denkschriften nicht zur Unehre gereichen wird. Sie behandelt einen Gegenstand, der meines Wissens bis jetzt nur nach einzelnen untergeordneten Momenten ist berührt worden, dessen Begriff man aber noch nirgends offen ausgesprochen u. möglichst allzeitig zu entwickeln gestrebt hat, ich meine die *Theorie der vielfachen Continuität*. Ich will versuchen, mit einigen Worten dieses neue Feld der Analysis näher zu bezeichnen. Unstreitig gewährt die geometrische Anschauung der Analysis, in manchen Fällen, wo nur zwei oder drei Variabeln in Betracht kommen, wesentliche Dienste, denn sie ist gleichsam eine schon fertige im Gefühl ruhende Analysis. Wollen wir uns nun ähnliche Vortheile für analytische Gegenstände, bei denen mehr als drei Variabeln auftreten, verschaffen, so müssen wir den Begriff eines durch diese Variabeln dargestellten vielfachen Continuums in ähnlicher Weise entwickeln, wie es mit dem Begriff des zwei- und dreifachen Continuums in der Geometrie geschieht.

«Wenn man will, kann man schon in Laplace's Mécanique céleste «eine in die Theorie der vielfachen Continuität gehörende Aufgabe behan- «delt finden; nämlich die Theorie der secularen Störungen kömmt, analy- «tisch betrachtet, auf die Aufgabe zurück, im totalen nfachen Conti- «nuum die Hauptaxen eines durch seine allgemeine Gleichung gegebenen «(n—1) fachen Continuums zweiten Grades zu bestimmen. Hieher «gehört es auch, wenn man n fache Integrale so behandelt hat, wie es «dem Uebergang vom Ellipsoid zur Kugel und von rechtwinkligen zu «Polarcoordinaten entspricht; wie denn überhaupt die Verwandlung «vielfacher Integrale eine leichte Consequenz der diesem Gebiete eigen- «thümlichen Betrachtungen ist. Dieses Feld muss aber noch reichlichere «Früchte tragen, wenn man es nicht nur gelegentlich und zufällig, sondern «mit der eigentlichen Absicht bearbeitet, auf rein analytischem Gebiete «etwas der Geometrie Vergleichbares, und worin diese vollkommen «aufgeht, zu leisten. Ich hoffe nun durch das Wenige, was meinen «schwachen Kräften hier gelungen ist, wenn anders die kais. Akad. «es in ihre Denkschriften aufzunehmen geneigt ist, dem mathematischen «Publicum eine günstige Ansicht von der Fruchtbarkeit dieses Zweiges «beizubringen. Damit die hochpreisl. Akad. im Voraus darüber urtheilen «könne, führe ich einige Resultate an.

«Ich unterscheide lineare und höhere Gebilde, je nachdem zu «ihrer Definition lineare Gleichungen hinreichen oder nicht. Hat nun das «totale Continuum n Dimensionen, so nenne ich (n—m) faches lineares «Continuum die Gesammtheit aller Lösungen eines Systems vom m «linearen und unter sich unabhängigen Gleichungen mit n Variabeln. «Sind nun in jenem totalen Continuum zwei partielle lineare Continua, «ein pfaches und ein qfaches beliebig gegeben, so entsteht die Auf- «gabe, ihre gegenseitige Lage auf die kleinste Zahl von Daten zurück- «zuführen. Ich zeige nun, dass wenn $p + q > n$, diese Aufgabe auf «eine andere zurückkömmt, wo die beiden partiellen Continua resp. «nur $n - q$ und $n - p$ Dimensionen zählen, oder, wenn wir wieder «p, q als Dimensionszahlen gebrauchen, auf den Fall, wo $p + q < n$. «[In diesem Falle sind aber, wie ich ferner zeige, aus dem totalen «Continuum $n - (p + q)$ Dimensionen wegzulassen, wodurch die «Aufgabe auf $p + q = n$ zurückgeführt ist.] Ist $p \gtrless q$, so «[kann man im totalen Continuum wieder $q - p$ Dimensionen unter- «drücken, und] kömmt die Aufgabe endlich dahin zurück, dass man die «gegenseitige Lage zweier p-fachen linearen Continua im 2pfachen «totalen Continuum durch das Minimum von Bestimmungsstücken an-

ɔn soll. Dieses geschieht durch eine algebraische Gleichung p^{ten} les, deren Wurzeln immer sämmtlich reell sind. Darf man sich geom. Sprache bedienen, so sind jetzt in jedem der zwei linearen linua p unter sich senkrechte Axen gefunden, und die Wurzeln r algebr. Gleichung sind die Cosinus der Winkel, welche jede des einen Continuums mit der gleichnamigen des andern bildet, rend sie auf allen übrigen dieses letzten Continuums senkrecht steht. wirklichen Raume kann p nur 1 sein, d. h. die gegenseitige Lage nd zweier linearen Continua ist immer durch einen einzigen kel bestimmt, wie in der Ebene.

«Wenn im wirklichen Raume eine beliebige Zahl von Ebenen gegeben sind, so kann man nach der Zahl der geschlossenen offenen Stücken des Raumes fragen. Ich habe diese Aufgabe für nfache Continuum gelöst.

«Ich habe ferner dem *Euler'schen Satze über Polyeder*, dass lich die Zahlen der Ecken sammt der Zahl der Flächen diejenige Kanten immer um 2 übertreffe, eine Form gegeben, worin er ı für n Dimensionen gilt.

«Ich habe die der Frage nach der Existenz regulärer, convexer reder analoge Frage für alle Dimensionen gelöst. Für 4 Dimenen existiren nämlich deren 6, für alle folgenden Dimensionen ıer nur drei.

«Zu sphärischen Gebilden übergehend, habe ich nicht nur Maass

$$\int^{n} dx_1\, dx_2 \ldots dx_n$$

von der Gleichung $x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2 = a^2$ umschlossenen ıchen Continuums und des durch diese Gleichung dargestellten -1) fachen Continuums bestimmt, was wahrscheinlich unter der ın eines bestimmten nfachen Integrals bereits geschehen ist, dern ich habe die der Kugelpyramide oder, was auf eins hinausımt, dem Kugeldreieck analoge Aufgabe allgemein gelöst. Wenn lich $p_1, p_2, \ldots p_n$ homogene lineare Polynome der Variabeln $x_2, \ldots x_n$ bezeichnen, und das Integral

$$\int^{n} dx_1, dx_2 \ldots dx_n$$

ch die Bedingungen

$+ x_2^2 + \ldots\ldots + x_n^2 < 1, \quad p_1 > 0, \quad p_2 > 0, \ldots p_n > 0$

«begränzt ist, so habe ich die Zahl der nothwendigen Integrationen auf $\frac{n-2}{2}$ oder $\frac{n-3}{2}$, je nachdem n gerade oder ungerade ist, herunter-«gebracht, wobei Kreisbogen, deren Cosinus bekannt sind, nicht als Integra-«tionen gezählt werden. Wir werden dadurch mit einer neuen Art trans-«cendenter Functionen von $\frac{n(n-1)}{2}$ Argumenten bekannt, welche «durch Integralformeln ausgedrückt sind, in denen lauter Kreisbogen «erscheinen, deren Sinus oder Cosinus gegenseitig in algebraischer «Relation stehen. In einzelnen Fällen können die Werthe dieser «Integrale in finiter Form angegeben werden. Für

$$n = 4 \quad \text{z. B. sei} \quad \cos y = \frac{\cos\alpha \sin x}{\sqrt{\sin^2 x - \cos^2\beta}}$$

«so ist

$$S = \int_{y=0}^{x=\gamma} y\, dx$$

«eine der besprochenen Funktionen, welche jetzt nur drei explicite Argu-«mente α, β, γ zeigt, indem man jedes den drei übrigen gleich $\frac{\pi}{2}$ gesetzt «hat. Man wird sich leicht überzeugen, dass diese Funktion ihren Werth «nicht ändert, wenn man auch die Argumente α und γ vertauscht. «Sind nun m, n, p, ganze positive Zahlen und setzt man

$$\alpha = \frac{\pi}{m}, \quad \beta = \frac{\pi}{n}, \quad \gamma = \frac{\pi}{p}, \quad S = \frac{\pi^2}{f(m, n, p)},$$

«so habe ich gefunden:

$$f(3, 3, 3) = 30, \quad f(3, 3, 4) = 96, \quad f(3, 3, 5) = 3600,$$
$$f(3, 4, 3) = 288.$$

«Für ein beliebiges n kann man 6 finite Werthe bestimmter «Intregrale angeben, wovon ich nur eines anführen will. Wenn

$$\cos x_m = \frac{\cos x}{1 - 2m\cos x}$$

«gesetzt wird, so ist

$$\int_{\cos x = \frac{1}{2n-1}}^{x=\frac{\pi}{2}} dx \int dx_1 \int dx_2 \ldots \int dx_{n-1} = \frac{\pi^n}{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots (2n-1) \cdot 2n}$$

»Ich glaube den erwähnten allgemeinen Satz nicht zu überschätzen, wenn ich ihn dem Schönsten, was in der Geometrie geleistet worden ist, an die Seite stelle.

»Wenn ich ferner die allgemeine Gleichung zweiten Grades mit n Variabeln betrachte, so ergeben sich leicht alle die Eigenschaften wieder, die aus der Geom. von den Flächen zweiten Grades bekannt sind; nur in der verallgemeinerten Theorie der confocalen Flächen glaube ich etwas anführen zu können, das auch für $n = 3$ neu ist. Diese Theorie giebt mir dann auch ein Mittel zu einer sehr allgemeinen Form der Darstellung arbiträrer Funktionen von n Variabeln, was mit den Laplace'schen Coefficienten Aehnlichkeit hat. — Auch die Theorie der orthogonalen Flächen überhaupt kann auf n Dimensionen übertragen werden; nur ist für $n > 3$ die Zahl der Bedingungen grösser als die Zahl der Funktionen, über die man verfügen kann. Für $n = 3$ dagegen hat man nur eine partielle Differentialgleichung dritter Ordnung und ersten Grades in Beziehung auf die höchsten Differential-Coefficienten zu erfüllen. — Der Begriff der Krümmung, auf beliebige Gleichungen mit n Variabeln angewandt, führt auf gleiche Resultate wie in der Geometrie. — Durch Verallgemeinerung des Begriffs des Potentials habe ich merkwürdige Transformationen vielfacher Integrale bekommen.

»Diese Andeutungen mögen zeigen, dass jene Arbeit reichhaltig genug ist, um für sich allein im Buchhandel zu erscheinen; und wenn die hochpreisl. Akad. für die Ehre in ihren Denkschriften aufgenommen zu werden, versagen würde, wäre ich Willens, sie als Privatschrift zu veröffentlichen.

»Obschon nun einzelne geometrische Theorien schon längst in diesem Sinne verallgemeinert worden sind — man denke z. B. an gewisse allgemeine Transformationen vielfacher Integrale, welche dem Uebergang vom Ellipsoid zur Kugel oder von rechtwinkligen zu Polarcoordinaten analog sind, an die Theorie der secularen Störungen, welche in ihren letzten Ergebnissen als verallgemeinerte Aufgabe, die Hauptaxen einer Fläche zweiten Grades zu bestimmen, erscheint u. s. w. — so muss dieses Feld doch noch . . .[1])

»Verehrter Herr Secretär, ich bitte Sie noch einmal, mir recht bald mitzutheilen, was aus meinem vor einem Jahr eingesandten Manuscripte geworden ist, und ob man meine neue Abhandlung unter ähnlichen Bedingungen annehmen wird.

»Hochachtungsvoll verharrt »Ihr ergebenster

[1]) Hier bricht das Concept ab und es folgt bloss noch der Schlusssatz.

Im Juni 1852 machte Steiner einen Aufenthalt in Bönigen am Brienzersee und in Interlaken.

1852. Schläfli an Steiner.

Lieber Freund!

Ich habe versucht den Grad der Aufgabe zu bestimmen, wenn eine C^3 durch 6 gegebene Punkte gehen, einen Doppelpunkt haben und die zwei Tangenten a, b in diesem Punkte durch zwei gegebene Punkte A, B gehen sollen (a durch A, b durch B). Ich kann nun algebraisch hievon den Fall nicht trennen, wenn beide Punkte A, B auf derselben Tangente a liegen. So aufgefasst führt die Aufgabe auf 6 doppelschichtige Gleichungen, alle homogen und linear in Bezug auf die 3 Variablen der 2ten Schichte (die Coordinaten des Doppelpunkts). Combinirt man je 5 Gleichungen, um die Variablen der ersten Schichte zu eliminiren, so ergeben sich für die 3 Variablen der 2ten Schichte wieder homogene Gleichungen, eine 5ten und fünf 6ten Grades. Da nun 2 Gleichungen zur Bestimmung der Coordinaten des Doppelpunktes hinreichen, so ist diese Aufgabe höchstens vom 30sten Grade. Ob sie noch niedriger ist, kann ich nicht beurtheilen, da ich nicht im Stande bin, den Grad der Resultante mehrerer doppelschichtiger Polynome anzugeben, wenn jedes mehr als 2 Variabeln enthält. — Nun ist die in der vorigen eingeschlossene Aufgabe, durch 6 gegebene Punkte eine C^3 zu legen, welche einen Doppelpunkt hat, dessen eine Tangente a ebenfalls gegeben ist, sicher vom 5ten Grade. Es giebt daher *höchstens* $30 - 5 = 25$ C^3, welche Ihrer Forderung genügen.

Vor einer Woche habe ich aus Wien eine Anweisung auf 370 Gulden CM[1]) an die Hauptcasse des Ministeriums des Innern erhalten, wofür ich die Quittung durch den Banquier Marcuard übersandte. Man sagte mir, dieser Gulden sei Papiergeld und wäre eigentlich in neuem Gelde 2 Fr. 50 Cts., habe aber nur den Kurs von etwa 2 Fr.

Wenn ich wüsste, Sie noch sicher anzutreffen, würde ich Ihnen gerne in Bönigen einen Besuch machen. Ich hoffe immerhin, Sie noch in Bern wiederzusehen.

Wenn Sie mir nicht selbst schreiben wollen, können Sie mir ja durch einen andern einige Zeilen über Ihr Befinden und die Dauer Ihres Aufenthaltes zukommen lassen.

Sie freundschaftlich grüssend

Ihr dankbarer und ergebener

Bern, den 14. Juni 1852. *L. Schläfli.*

[1]) Conkord.-Münze.

Steiner an Schläfli.

«*Lieber Schläfli!*

«Gott sei Dank, dass die Wiener Sache endlich so weit gekommen ist! Dass das Honorar in Bankscheinen bezahlt wird, war mir bekannt; der gegenwärtige niedrige Curs derselben und der hohe Curs des französischen Geldes bringen Ihnen viel Verlust, circa 22—23 Prozent.

«Da ich in meiner Pension in Bönigen allein war, zudem die Wege schmutzig sind, so bin ich nach Interlaken, in's Hotel d'Interlaken gezogen. Es wohnt hier auch ein Berliner Stadtrath, der, wie Sie, alle Berge abgrast, nebenbei auch Käfer und Steine frisst, aber nicht Kenner ist, sondern nur für Freunde sammelt. Er steigt rings herum auf die höchsten Schöpf (Cima); auf die niedrigen begleite ich ihn zuweilen. Ich habe ihm von Ihnen gesprochen, er freut sich auf Ihre Bekanntschaft und Ihre Hülfe. Also brechen Sie auf und kommen Sie auf 8 oder 14 Tage her, das donnstigs Wetter wird fortan besser werden.

«Grüssen Sie Frau und Herrn Professor Ries, und dann marsch! hieher zu Ihrem

J. Steiner.»

Interlaken, 20. Juni 1852.

Auf der Rückseite des Steiner'schen Briefes stehen folgende Notizen Schläfli's, die sich auf die Arbeit über die vielfache Continuität [1]) ziehen:

«Es ist bekannt, mit welchem Erfolg in der Statik die Begriffe des Differentialparameters und Potentials von Gauss, Lamé, Liouville u. a. eingeführt und angewandt worden sind. Die meisten hier einschlagenden Sätze sind aber durchaus nicht auf den Raum beschränkt, sondern gelten für jede beliebige Totalität. Dieses nachzuweisen, ist der Zweck der folgenden §§. Ein Satz oder eine Methode, in spezieller Fassung vorgetragen, erscheint zwar oft schon in seiner ganzen Schönheit und Trefflichkeit und gewinnt durch Verallgemeinerung kaum noch etwas. Ich bin daher weit davon entfernt, von den folgenden §§ mir ein Verdienst beizulegen, allein erstens glaube ich die Verallgemeinerung jener Begriffe in einer Theorie der vielfachen Continuität nicht übergehen zu dürfen und zweitens wird auch das Interesse daran wachsen, wenn gegen das Ende dieses

[1]) Biographie pag. 57. No. 243.

«Abschnittes Schwierigkeiten sich lösen werden, welche die beim «Raum vorkommenden beträchtlich übersteigen.

«Wenn darin auch das meiste bloss als generalisirende Nach- «ahmung der genialen Arbeiten der erwähnten Analysten erscheinen «muss, so wird sich doch am Ende dieses Abschnitts eine sehr allge- «meine Form der Entwicklung arbiträrer Functionen von beliebig «vielen Variablen in Reihen von periodischer Natur finden und über- «dies glaube ich Dinge, die mit der Theorie der vielfachen Continuität «in so engem Zusammenhang stehen, hier nicht übergehen zu sollen.» ——

Schläfli an Steiner.

Mein hochgeschätzter Freund!

Obschon die Lösung der bekannten Aufgabe, die Curven vierten Grades betreffend, noch nicht weit gediehen ist, so erlaube mir doch die Bemerkung, dass dieselbe in einer noch allgemeinern Aufgabe enthalten ist, welche ganz dieselben combinatorischen Beziehungen zwischen ihren Lösungen darbietet. Nämlich, wenn eine Curve $2n^{ten}$ Grades als Basis gegeben ist, wie viele [n—1] fachen Schaaren von Curven $(2n-2)^{ten}$ Grades giebt es, welche jene in 2n (n—1) Punkten berühren? Oder, wenn auf der Basis n—1 Punkte gegeben sind, wie viele Curven $(2n-2)^{ten}$ Grades berühren jene in den gegebenen Punkten und ausserdem noch in (2n—1) (n—1) Punkten? Aus combinatorischen Gründen folgt, dass die verlangte Zahl eine um 1 verminderte Potenz von 2 sein muss. Um zum Ziele zu gelangen, scheint es mir vor der Hand das Rathsamste, die Bedingungen zu studiren, unter denen die Resultante zum vollständigen Quadrat wird, und bin gesonnen, mit einigen speziellen Fällen anzufangen, wie z. B. wenn ein Kegelschnitt durch 3 gegebene Punkte gehen und einen gegebenen Kegelschnitt zweimal berühren soll, was 4 Lösungen giebt.

Unglücklicher Weise liess ich mich durch das noch am Montag Morgen regnerisch aussehende Wetter abhalten, nach Sitten zu gehen. Wenn Sie die Güte haben wollen, mit einigen Zeilen mir zu antworten, so wird es mich freuen.

Sie freundschaftlich grüssend

Ihr dankbarer Schüler

Bern, den 18. Aug. 1852.

L. Schläfli, Docent.

Interessante Notizen über den Aufenthalt in Vichy, August 1853 sowie Briefe Steiner's an Schläfli.

Im Jahr 1853 musste Steiner zum Kurgebrauch nach Vichy reisen. Er hatte sich vorher bei *Terquem* orientirt, um die Adressen der französischen Mathematiker zu erhalten. Terquem schrieb ihm unter dem 15. Juli 1853:

«*Mon cher géomètre!*

«Voici les adresses:

«Bertrand, rue d'Enfer 13;

«Sturm, place du Panthéon 9;

«Wertheim, cité d'Antin 4;

«Chasles, passage Ste-Marie 3;

«Lamé, rue Madame 48;

«Poncelet, rue Vaugirard, vis-à-vis la porte du Luxembourg.

«Je crois que ce sont les seuls personnes, que vous désirez voir.

«Votre tout affectionné

O. Terquem,
rue d'Enfer 48.»

Anschliessend folgen einige Notizen Steiner's, bei denen zugleich das Datum und der Ort notirt ist, wann er sie niedergeschrieben hat.

Paris. Juli 1853. Notizen.

«1. *Von Silvester.* Ein Engländer (Cayley) soll gefunden haben: «*dass f^3, im Allgemeinen, 27 G. enthält.* Nachzusehen wie viele ich «bei den schwierigen Polar-Betrachtungen gefunden habe. Bei einer «bestimmten f_1^3 zeigten sich früher nur 6 G; bei der Panpolare F^3 auf «$B(f^2)$ nur 11 G.

«2. *Serret jun. Mittels des Cirkels allein* auf der Zylinderfläche «einen Strahl zu finden?

«Ich frage: Wie findet man auf der Kugel den Hauptkreis, der «durch 2 gegebene p geht? d. h. irgend einen 3ten Punkt desselben. — «Wie zu p dessen Gegenpunkt p_1? — Sind $2p = a, b$, so finden sich «leicht 2 Punkte c, d, wo $ac = ad$, $bc = bd$ und sodann Punkte x, «wo $xc = xd$, also x im Hauptkreis durch a und b liegt, der die Orts-«linie für c und d ist. D. h. um a, b mit Radien α, β Kreise; ihre Schnitte «= c, d; um diese mit gleichem r Kreise, liegen die je 2 Schnitte «x, x in Hauptkreis ab.

«3. *Silvester* hat gefunden: «*Die f^3 hat 5 Grundebenen, der «Schnittpunkt P je 3er und die Schnittlinie L der je 2 übrigen sind*

«*der Art conjugirt, dass die B. C. des Kegels aus P aus 2 ebenen «Curven C³ besteht, deren Ebenen durch L gehen, und zu den Grund-«ebenen harmonisch sind.*»

«Dieser Satz muss in dem meinigen enthalten sein, wonach der «Ort des Pols P, dessen 1te Polare f^2, in Bezug auf die gegebene f^3 «ein Kegel f^2_k ist, eine bestimmte F^4 ist. Denn die Silvester'schen «10 Punkte P_0 sind diejenigen, für welche f^2_k in $2\,f^1 = 2\,e$ zerfällt. «— In jeder L liegen 3 Punkte P_1 und diesen entsprechen 3 L_1, die «durch P gehen (der jener L entspricht).

«Da die 2te Polare f^1 von P ebenfalls durch L geht, so muss von «jedem P in L sowohl die erste als 2te Polare durch P gehen, also «die erste stets ein Kegel sein. Danach hätten also die 10 L eigen-«thümliche Bedeutung; sie lägen in jener Ortsfläche F^4; diese wird «von jeder der 5 Grundebenen E in 4 L geschnitten, welche eine «spezielle C^4 sind.

«Bewegt sich P in 1 freien E, so entspricht ihm eine $SS(f^2)$ mit «8 p (wovon der *eine nothwendig*) und sein Ort in dieser E, wo ihm «f^2_k oder dessen Scheitel Q entspricht, ist eine Curve C^4, welche durch «die 10 Schnitte π von E mit den 10 L geht; der Ort von Q aber «ist (nach Älterem) eine C^6_d, die durch die 10 P_0 geht. Einer 2ten «E_1 entspricht eine andere Curve doppelter Krümmung C^6_{d1}, die mit «C^6_d, ausser den 10 P_0, noch 4 Q gemein hat, entsprechend der Schnitt-«linie G von E und E_1. Also gehen alle C^6_d durch die 10 P_0.

«Vorhin, bei P_1 in L_1 *bilden die Polaren f^2 einen solchen speziellen «Büschel $B(f^2) = B(f^2_k)$, dessen gemeins. Schnitt C^4_d aus 4 durch P «gehenden Geraden λ besteht;* nämlich die Schnittlinien der 3 Paar «Ebenen $f^2_k = 2\,e$, die durch die Kanten (3 L) der Ecke P gehen «und zu den Flächen derselben harmonisch sind.

Ueber die gegenseitige Beziehung der Doppeltangenten der Curve 4ten Grads.

Für M. *Terquem*. (Paris 1. Aug. 53.)

«1. Ist ein Kegelschnitt A^2 einer Curve 4ten Grads C^4 einge-«schrieben, d. h. berührt er diese in 4 Punkten a, so kann A^2 sich «stetig bewegen und so ändern, dass er stets die Curve C^4 in 4 «Punkten berührt, und zwar liegen die neuen Berührungspunkte $4a_1$, «stets mit den anfänglichen 4a in irgend einem Kegelschnitte C^2, so «dass umgekehrt jeder durch die 4 Punkte a gelegte Kegelschnitt C^2 «die Curve C^4 in 4 solchen Punkten a_1 schneidet, in welchem sie von

«einem zweiten Kegelschnitte A_1^2 berührt wird, der durch stetige Be-
«wegung und Aenderung in den ersten Kegelschnitt A^2 übergehen
«kann. Dabei erscheint die Curve C^4 als Enveloppe der Schaar Kegel-
«schnitte A^2, A_1^2, . . . , die wir durch S (A^2) bezeichnen wollen.

«*Eine beliebige Curve 4ten Grads, C^4, ist im Allgemeinen, als*
«*Enveloppe von 63 verschiedenen Schaaren Kegelschnitte, S(A^2), an-*
«*zusehen.*» Oder: «*Soll die gegebene Curve C^4 in einem auf ihr ge-*
«*gebenen Punkte a_0 und nebstdem in irgend drei andern Punkten a*
«*von irgend einem Kegelschnitte berührt werden, so giebt es 63 Lös-*
«*ungen.*»

Besser: «*Soll ein Kegelschnitt A^2 gefunden werden, welcher die*
«*gegebene Curve C^4 in einem auf ihr gegebenen Punkte a_0 und nebst-*
«*dem in noch irgend drei andern Punkten a berührt, so finden 63*
«*Lösungen statt.*»

Vichy, Freit. 12. Aug. 1853.
(Ankunft in Vichy 5. August wahrscheinlich.)

«1. H. *Schläfli hat den Satz über die conjug. Durchmesser der*
«C^3 *zu kontrolliren.*

«2. H. *Terquem* die geeigneten Sätze in der von Dr. Hirst über-
«setzten 2 Abhandl. zuzustellen. Auch andere, im Crelle'schen Journ.
«gegebene Sätze, damit zu verbinden. Auch neue Sätze beizufügen.

«3. *Schläfli.* Die Lamé'sche Untersuchung der Wellenfläche, in
«Rücksicht eines Systems mit ihr concentrischer Kugeln und Ellipsoide
«(mit proportionalen Axen) — zu erzählen und darauf zu hetzen.
«Desgleichen auf die Sätze von *Sylvester* und *Cayley* über f^3: dass
«diese 27 Gerade und 5 Grundebenen enthält.[1])

«4. *Liouville* oder *Terquem* die Sätze und Aufgaben über höhere
«Berührung der Curven, welche schon im vorigen Jahre in Bern
«Schläfli mitgetheilt worden, und wozu die 63 Schaaren S(C^2) in C^4
«ein schönes Beispiel sind.

«Desgl. die Bestimmung der Curven im Raum (Doppel-Krüm-
«mung), als Schnitte von Flächen, wobei von diesen ein Theil des Schnitts
«gegeben ist. Cayley hat schon drein gepfuscht; zu citiren.»

«*Was im Winter 1853/4 auszuarbeiten ist.* (Paris 3. August 1853.)

«I. *Im Grossen*: *Entweder:* 1) die Abhandlung von 1848; **oder**
«2) die populären Kegelschnitte: oder 3) 2ter Theil der **Gestalten.**

[1]) Hier bemerkt Steiner: «Gethan».

«II. *Im Kleinen, für Liouville:* 1) Gauss-Jacobischen Satz, Rück-
«sicht auf Schumachers Astronomische Nachrichten. Ueber die Evolut-
«Fläche, die Monge'schen Sätze, die 1837 gemacht (und vielleicht durch das
«Stadtvogtei-Mensch zerstört worden sind); sie entstanden, weil Nudel
«mich täuschte. 2) Den Satz wie zu zwei gegebenen C^2 die Basis zu
«finden ist; was schon im Dez. 1845, vor Ausbruch der Nudelei ge-
«macht worden und 1846 in der Akademie bereits angeführt. 3) Der
«2 bis n Sprung bei A_1 auf A, und B_1 auf B; und der famöse 3 Sprung
«bei E_1 auf E. 4) Aufwärmen der Polyeder-Sätze, um *Brin* und *August*
«zu eliminiren. 5) Die statischen Sätze (Joggeli Schweins), ...; Vir-
«tuelle Geschwindigkeit. — Ferner: 6) Das Trippel-Strahlsystem, wenn
«der Scheitel in f^2 (Römer-Notizen); 7) Die Polarität auf f^2 und auf
«$B(f^2)$. Bei (6.) das System Trippel-Netze von $B(f^2)$, und B B (f^2).

«III. Avec M. Polqués eine Géométrie déscriptive».

Vichy, Sonntag 21. Aug. 53.

«*Betrachtung der* f^3 [1]); *1. Die* 2te *Polare einer E ist eine* φ^3*(Fläche);*
«denn sie wird von jeder G in 3 Punkten geschnitten, weil für P in
«G ein Büschel $B(f^2)$ entsteht, wovon nur 3 die E berühren. Also
«ist auch die Enveloppe aller Durchmesser-Ebenen der gegebenen f^3
«eine φ_0^3. Ist sie auch der Asymptotenfläche der f^3 eingeschrieben
«und wo berührt sie dieselbe? Ist auch φ_0^3 der Ort aller P_0, deren
«innere Polaren f_i^2 oder J_f^2 Zylinder sind? Es scheint. — Wenn für
«P in f^3 auch $J_f^2 = K^2$ (Kegel) wird: so muss die Schnittcurve C_φ
«von f^3 und φ_0^3 ausgezeichnete $P_0 = Q_\varphi$ enthalten; deren J_f^2 sich auf
«ein Gerade ab $= S_1$, 2 E in ab ihr Schnitt reduciren. Giebt es P
«für welche J_f^2 aus $E \pitchfork E^2$) besteht? Die Sylvesterschen 10 P_0.

«2. Der aus jedem P an f^3 gehende Kegel ist 6ten Grads, aber
«wievielter 12ter Klasse? d. h. wieviele Berührungs-Ebenen der f^3
«gehen durch eine G? 12.

«3. Die φ_0^3 ist 4ter Klasse, durch jede G gehen vier Berührungs-
«Ebenen; denn die Polaren $B(f^2)$ von P in G haben eine C_d^4, welche
«E in 4p trifft, deren 2te Polaren jene 4 Berührungs-Ebenen sind.

[1]) Steiner würde wohl sehr unzufrieden sein, wenn er wüsste, dass diese seine Notiz über die f^3 gedruckt wird. Es geht daraus nämlich unzweifelhaft hervor, dass er die Hauptresultate von Cayley und Sylvester kannte, die er doch in seiner Arbeit vom Jahr 1854 nicht citirt. Herr Geiser fügt dieser Bemerkung noch bei, dass ihm dieses eigenthümliche Verschweigen schon längst bekannt gewesen sei.

[2]) Sollte vielleicht E + E geschrieben sein, da diese Steiner'sche Bezeichnung ein Ebenenpaar bedeutet.

«4. So ist die Enveloppe φ_0 der Durchmesser-Ebenen der f^4 «vom 12ten Grad und von der 9ten Klasse. — Von f^n ist $\varphi_0 = 3(n-2)^2_{ten}$ «Grad und $(n-1)^2_{ter}$ Klasse. — —»

Steiner reiste dann über Genf nach Bern (siehe nachfolgenden Brief) und hat daselbst die Notizen fortgesetzt.

Bern, 11. Sept. (Fortsetzung von Vichy.)

«5. *Schläfli.* 1) Ob bei f^3 (u. f^n) auch $A_f{}^2$ und $J_f{}^2$ jedes Punktes «P die E_∞ in derselben Curve C^2_∞ schneiden? *Ja! Ja!* 2) *Von «wievielter Klasse ist f^3? oder ihr Berührungs-Kegel $P_k{}^6$, in Rück-«sicht jeder durch den Pol P gehenden Geraden?* 12ten Ist 1) ja: so «ist für P in $\varphi_0{}^3$ richtig $J_f{}^2$ ein Zylinder. *Ja.*

«6. Auch bei f^n haben $A_f{}^{n-1}$ und $J_f{}^{n-1}$ mit E_∞ die Schnittcurve «gemein. Denn für jede Ebene durch P haben ihre 3 Schnitte C^n, «A^{n-1} und J^{n-1} mit jenen 3 Flächen die Eigenschaft, dass A^{n-1} und J^{n-1} «mit G_∞ die Schnitte gemein haben, daher auch die Flächen $A_f{}^{n-1}$ und «$J_f{}^{n-1}$. Bei f^3 schneiden sich also $A_f{}^2$ und $J_f{}^2$ in einer andern ebenen «Curve R^2 (= C^2), die in der Vertreterin R_c liegt (in der die 3ten «Schnitte c aller durch P gehenden Sehnen ab liegen.)

«*Zu 5. Die f^n und ihr Berührungs-Kegel $K^{n(n-1)}$ sind von der «$n(n-1)^2_{ten}$ Klasse.* Weil die Polaren A^{n-1} und A_1^{n-1} von P und P_1 sich «mit f^n in $(n-1)^2 . n$ Punkten schneiden, in denen f^n von solchen «Ebenen berührt wird, die durch die Gerade PP_1 gehen. Die Klasse «von $K^{n(n-1)}$ könnte sein: = $n(n-1)$ $[n(n-1)-1]$, so ist sie um «$n(n-1)[n(n-1)-1-(n-1)]$ = $n^2(n-1)(n-2)$ verringert, was «anzeigt, dass der Kegel Doppel- und Rückkehrstrahlen, ds und rs, hat, «die wohl eigenthümliche Tangenten aus P an f^n sind. Bei f^3 ist die «Verringerung = $9 \cdot 2 \cdot 1 = 18$, und daher kann es geben 1.) 9 ds; «2.) 6 ds und 2 rs; 3.) 3 ds und 4 rs; oder 4.) 6 rs. Die Sylvester-«schen 10 P_0 zeigen die Wirklichkeit der ds, wenn auch nur 3 reelle; «giebt es noch 4 rs, oder noch imaginäre 6 ds? [1])

1853. Steiner an Schläfli.

«*Lieber Schläfli!*

«Morgen Abend gegen 5 Uhr werde ich mit der Freiburger «Post in Bern eintreffen; gehen Sie also nicht grasen,[2]) sondern

[1]) Herr Geiser bemerkt, dass nicht die 9^{ds}, sondern die 6^{rs} eintreten.

[2]) Botanisiren.

«kommen Sie und fragen Sie unterwegs im Adler[1]) (wo ein neuer «Wirth sein soll) ob ein ordentliches Zimmer zu haben sei. In Genf «musste ich die erste Nacht auf dem Boden liegen. — Ich komme «diesmal von Paris, Vichy (Cur gemacht), Genf, Lausanne, Vivis. Das «Nähere morgen mündlich.

«In Eile. Ihr

J. Steiner.»

Freitag 2. Sept. 53.

Steiner blieb dann mit Schläfli in Bern zusammen und besuchte auch seine Verwandten in Utzenstorf, Bätterkinden und Kirchberg.

Steiner an Schläfli.

Baden, Samstag 15. Octob. 1853.

Lieber Freund!

«Wie Sie am Sonntag, reiste ich erst am Mittwoch von «Bätterkinden ab. Auch hier hat sich meine Cur in die Länge ge- «zogen. In Aarau traf ich mit Ihrem Freund *Steinegger* zusammen «und hier logiren wir im gleichen Haus, wo seit letzten Mittwoch «(12ten) auch *Raabe* bei uns ist, den ich zuvor in Zürich besuchte; «*Moosbrugger* aber ist nicht gekommen. Dass der Marquis[2]) Sie besucht «hat, weiss ich durch Raabe. Letzterer freute sich sehr über Ihre «Beförderung, aber vorgestern auch darüber: dass Blösch[3]) durch Studer «gekalbert hat; nach allen Vorgängen war ich weniger entzückt. «Aber potz Donnerwetter! wer hat nun die Kraft, die höhere Stufe, «die Cima, zu erklimmen?! Würden meine Rathschläge nicht immer «so leicht vergessen, so wäre der Sieg nicht zweifelhaft. Vor- «wärts, vorwärts! der Starke weicht nicht zurück. Sacre nome «de dieu! Die Abhandlungen sind noch nicht versandt, *Raabe*[4]) hat «noch keine, aber ist gespannt darauf. *Aus Gründen,* die ich Ihnen «mündlich sagen werde, schicken Sie auch *Anton Müller*[5]) und *Mousson*[6])

[1]) Altbekannter Gasthof in Bern.

[2]) So wurde Dirichlet von Steiner zubenannt.

[3]) «Blösch» ist im bernischen Dialekt die Bezeichnung für eine «gefleckte», d. h. mehrfarbige Kuh. Die Bemerkung gilt auch für S. 70, wo Steiner Schläfli auffordert zu Blösch zu gehen, «er stösst ja nicht!»

[4]) Raabe, Jos. Ludw., geb. 15. V. 1801 zu Brody, Galizien, Professor der Mathematik am eidgen. Polytechnikum und an der Hochschule in Zürich. † 22. I. 1859.

[5]) Prof. der Mathematik an der Universität Zürich geb. 1799, † 11. VIII. 1857.

[6]) Mousson, Joh. Rud. Albert, geb. 17. III. 1805, Prof. der Physik am eidgen. Polytechnikum, demissionirte 1878, † 6. Nov. 1890.

»jedem ein Exemplar, *vergessen Sie es nicht.*[1]) Von Raabe können Sie »aus der Zürcher-Bibliothek jedes Buch haben, gegen ein kleines »jährliches Geschenk für den Packer, wie er sagt. *Valentin*[2]) be»zieht auch.

»Mittwoch (19ten Oct.) Nachmittag etwa 5 oder 6 Uhr werde »ich in Basel im *Storchen* eintreffen und hoffe Sie da zu treffen; »Ihre Vorlesungen und Zuhörer können kein Hinderniss sein. Bringen »Sie die verlangte Uebersicht des Buchs über die »*Geometrie mit n Dimen»sionen*« endlich mit. Können Sie oder wollen Sie nicht kommen, so »denken Sie an das, was ich Ihnen so oft gesagt habe: einen Auszug von »4—6 Bogen nach Wien, meinetwegen an *Herrn von Ettingshausen*, »sich auf mich berufen, mit einem Gruss; oder nach Paris.

»Auf baldiges Sehen

Ihr

J. Steiner.«

1854. Steiner an Schläfli.

Der nachfolgende Brief Steiner's vom 10. März 1854 ist im 1. Theil an Schläfli, im 2. an Professor Ris gerichtet[3]).

Berlin, den 10. März 1854.

»*Mein lieber selbstmörderischer Freund!*

»Die mir mitgetheilten Sätze waren mir sehr willkommen, »besonders der eine, den ich falsch hatte und bald nach Paris an »*Terquem* geschickt hätte. Nämlich ich hatte: dass die Fläche f^m von »$B(f^n)$ in $m[3(n-1)^2 + 3(n-1)(m-1) + (m-1)(m-2)]$ Punkten »berührt werde, wo Sie, gewiss richtig, nur $m[3(n-1)^2 + 2(n-1)$ »$(m-1) + (m-1)^2]$ angeben. Aber damit kann ich in den speziellen »Fällen nicht zu Recht kommen, wo die f^m in Theile, Ebenen, etc. »zerfällt. In dem Betracht entsteht die Frage: a) Wenn f^m einen »Hornpunkt δ hat, für wie viele Berührungen zählt denn die durch »denselben gehende f^n, etwa für 3 oder 6? und b) für wie viele »Berührungen zählt es, wenn eine f^n die Doppellinie l_2 der f^m berührt? »Z. B. die f^4 wird von $B(f^3)$ in 132 Punkten berührt; besteht nun »f^4 aus 4 Ebenen E, so hat sie 4 δ und 6 l_2; jede E wird 12 mal

[1]) Raabe gedachte der philosoph. Fakultät der Hochschule Zürich Schläfli zur Ehrenpromotion vorzuschlagen. (Siehe Biogr. Bern. Mitth. S. 131, 132.)

[2]) Professor der Physiologie an der Hochschule Bern. † 23. V. 1883.

[3]) Dieser wichtige Brief ist nach den Poststempeln erst am 11. April 1854 von Berlin ab und am 14. in Bern angekommen.

«berührt, macht =48; jede l_2 wird 4 mal berührt, zählt 6.4×x, und «die 4 δ zählen 4×y; also 24x+4y=132—48=84. — Dabei hätte «ich sehr nöthig zu wissen: «*In welcher Curve R^x die Punkte liegen, «in denen f^m von einer SS(f^n)*, d. h. von den durch irgend 3 ge«gebene f^n bestimmten Schaar-Schaar (was ich ein «*Halbnetz*» «=HN(f^n) nenne) *berührt wird*». Oder mein Zweck wird auch da«durch erreicht: «*Wenn 4 beliebige f^n gegeben, so giebt es solche «Pole P, deren 4 erste Polaren f^{n-1} sich in irgend einem Punkte «Q treffen; den Ort dieses Punktes Q anzugeben, die Fläche Q^x?*» «Der Ort von P ist eine Fläche $P^{4(n-1)^3}$. — Wenn oben der B(f^n), «oder insbesondere nur B(f^2) sich in einer C^2 berührt, statt in R^4 «schneidet, so ist die doppelt gedachte Ebene der C^2 als eine spe«zielle Fläche f^2 anzusehen, und es ist die Frage, *wie viele von den «m[3+2(m−1)+(m−1)²] Berührungspunkten auf ihren Schnitt C^m «mit der f^m kommen?* Ich glaube 2 m. Ist es so, so ist eine weitere «Folge: «*Dass aus jedem Punkte P, im Allgemeinen, m^3 Normalen «auf die f^m möglich sind.*» Nun schwebt mir vor, dass *Terquem* «irgendwo bewiesen habe: dass aus P auf f^2 nur 6 Normalen gehen. «statt nach meinem Satze $2^3 = 8$. Wer hat recht? Durch eine «andere Betrachtung kam ich auch auf m^3.

«Als ich vor 6 Wochen wieder auf die f^3 kam, schien mir, wie «schon in Bern, dass ich die 27 Geraden g schon früher müsse be«obachtet haben. Nach wiederholtem Durchstöbern meiner Papiere «fand ich endlich, dass ich schon im J. 1846 und nachträglich 1850 «dieselben ziemlich ausführlich behandelt habe, jedoch nicht mit dem «Bewusstsein, dass es die allgemeine f^3 sei. Die 45 Dreiecke werden «da schon aufgezählt, und ihnen entsprechend 45 Systeme Flächen «f^2, 45 $\Sigma(f^2)$, welche die f^3 in je 3 ebenen Curven C^2 schneiden. «Unter jedem System $\Sigma(f^2)$ soll sich eine Schaar Kegel, f_0^2, befinden, «mit der unbewiesenen Angabe: «*Dass ihre Scheitel in einer f^4 liegen.*» «Ferner wird da bemerkt: «*Dass die f^3 durch die 5 Seiten a, b, c, «d, e eines schiefen 5 Ecks* (keine 3 Seiten in einer Ebene) *und durch «irgend eine 6te Gerade f bestimmt sei.*» Nämlich jede Ebene E durch «f schneidet die Seiten in 5 p, die eine C^2 bestimmen, welche die f^3 «beschreibt. Auch sind die 5 Paar Geraden g (von den 27 g), welche «die f schneiden, sehr einfach bestimmt; nämlich die Seite a schneide «die Ebene (cd) in α, und die durch α und f gelegte Ebene schneide «b, c, d, e in β, γ, δ, ε, so sind $\alpha\gamma\delta$ und $\beta\varepsilon$ eins der genannten «5 Paare. 2 g. Es wird ferner behauptet: «*Die der Geraden f gegen-*

»*überstehenden 16 Geraden g sollen unter sich 192 schiefe 5 Ecke bilden, und im Ganzen sollen die 27 g 2592 solche 5 Ecke bilden.*« »Ich bitte dies zu controliren und systematisiren, es fehlt mir jetzt »die Kraft dazu. Im Manuscript von 1850 stehen auch die Sylvester'schen 5 Grundebenen E_0, aber ohne klares Bewusstsein. Die 10 »Schnittlinien l derselben liegen in der Kernfläche f_0^4 und »*ihre 10 Schnittpunkte p sind Hornpunkte derselben*«; ist das Letzte wahr? »Nicht wahr: es giebt nur Ein System von 5 *reellen* Grundebenen E_0, »trotz der 19 Gleichungen dritten Grads, aus denen sie folgen? — »Der Schnitt der Basis f^3 mit der Kernfläche f_0^4 ist eine R^{12}, mit der »ich mich schon ehemals sehr gequält habe; sie geht durch die 54 »Asymptotenpunkte π der 27 g. Die Pole, deren Polaren Kegel f_0^2 »sind, sind sich conjugirt, reciprok, P und Q. *Liegt nun P im Schnitt »R^{12}, so ist die Frage, welchen Ort Q habe, und wie sich die beiden »Polarkegel f_0^2 (von P und Q) zu einander und gegen die Basis f^3 »verhalten?* Ich komme dabei immer auf Widersprüche. Es muss in »R^{12} eine bestimmte Anzahl ausgezeichnete Punkte P_0 geben, ausser »jenen 54 π. —

»Ueber die Flächen und Raumcurven seufze ich nicht minder »als Sie, und zwar schon seit Jahren; doch: »Ich seh', dass Du zu »einer Last, noch sehr gesunde Schultern hast; entschlossen bist, »mich hochzutragen, drum werd' ich Dir die Wege sagen.« Ihre »Raumcurve $R^{m\times n}$ ist sehr speziell und die allgemeine R^p, kann nur »sehr künstlich erzeugt werden; daher rührt all' unser Elend. Schon »die R^3 entsteht künstlich; durch 2 Hyperboloide (oder Kegel), die »eine g gemein haben. Die R^4 ist frei, entsteht durch 2 f^2. Die »R^5 künstlich, nämlich sie entsteht: a) durch f^3 und f^2, die nebstdem »eine g gemein haben; b) durch f^3 und f_1^3, die nebstdem entweder »1) eine R^4; oder 2) $R^3 + g$; oder 3) $C^2 + C_1^2$; 4) $C^2 + 2g$; oder »5) 4g gemein haben. Von diesen sechs R^5 ist die erste (a) die »beschränkteste und (b, 1) die freieste; durch die 5 unter (b) be»griffenen R^5 kann keine f^2 gehen. Vergleichen Sie alle sechs. *Wie »viele solche Gerade γ giebt es, welche die R^5 (b) in 3 Punkten schneiden?* Aber noch mehr: selbst die in f^3 liegenden R^4 hat man viel»leicht dabei auch noch zu unterscheiden, danach nämlich, ob die durch »R^4 gehende f^2 die Basis f^3 nebstdem noch α) in einer C^2 (deren »Ebene durch eine der 27 g geht) oder β) in 2 nicht in einer Ebene »liegenden g schneidet. Ferner: »*Ist durch R^5 und irgend eine Gerade f die f^3 bestimmt?*« d. h. jede E durch f schneidet R^5 in 5 p,

«die eine C^2 bestimmen, deren Ort die f^3 ist. Oder muss zu diesem «Zwecke f gegen R^5 eine bestimmte Lage haben? glaube nicht. — «Die R^6 ist a) als Schnitt von f^3 und f^2 beschränkt $= R^{3\times 2}$; allge- «meiner, aber künstlich wird sie erzeugt b) durch f^3 und f_1^3, wenn «diese nebstdem 1) eine R^3; 2) $C^2 + g$; 3) $3g$; oder 4) C^3 (ebene) «gemein haben. In den 4 Fällen (b) geht keine f^3 durch die R^6. «Bei 2) und 3) giebt es noch Nüancen, je nachdem C^2 und g oder «die 3 g sich schneiden oder nicht. Frage: «*Liegen in der freien f^4 «solche allgemeinere R^6 (b)?*» Dann könnte ich die f^4 erzeugen; sie «würde x-Systeme von R^6 enthalten. Es wird keine allgemeine R^6, «als die unter (b, 1) geben!? — Bei einer R^6 (es wird wohl die «allgemeinste oder freieste sein) fand ich: «*Dass durch jeden Punkt «π in ihr drei solche Gerade γ gehen, woron jede sie noch in irgend «2 andern Punkten π trifft*»; *so dass es also drei Schaaren von drei- «mal schneidenden Geraden γ giebt; aber von allen diesen Geraden «können sich keine zwei ausserhalb der Curve R^6 treffen; keine Ge- «rade γ kann die R^6 in 4 π treffen, und keine E kann sie in 6 π «schneiden, die in einer C^2 liegen.* [1]) — So fahren Sie nun fort, mit «R^7, . . . etc. — Aber dazu die Frage: «*Durch wie viele Punkte ist «die freie R^n bestimmt?*» In Rom habe ich mich damit befasst, kann «mich aber nicht erinnern und heute die Papiere nicht finden; mich «dünkt, ich schwankte damals zwischen 2 Antworten, nach der einen «war R^n durch 2 n Punkte bestimmt, wie dies bei R^3 und R^4 der «Fall ist.

«Ihre drei Sätze über die $R^{m\times n}$ sind sehr schön; der vierte «dazu betrifft die Klasse dieser Curve, d. h. die Zahl ihrer Schmieg- «ungsebenen, welche durch irgend einen Punkt im Raume gehen; sie «ist $= 3mn(m+n-3)$.

«Wird f^n von beliebiger Ebene E in C^n geschnitten und werden «längs dieser die Berührungsebenen an jene gelegt, die eine ab- «wickelbare Fläche bilden, «*so ist diese vom $n(3n-5)^{ten}$ Grad und «von der $n(n-1)^{ten}$ Klasse, und ihre Knotenlinie ist vom $3n(n-2)^{ten}$ «Grad.*» Ich bitte zu controliren, es ist wesentlich, weil es zugleich «der Charakter der Asymptotenfläche jeder f^m ist.

«Bei der freien f^4 giebt es doppelt berührende Ebenen E_2, die «sie in 2 Punkten a und b berühren. Der Ort der E_2 ist eine ab- «wickelbare Fläche; den Grad und die Klasse, sowie den Grad der

[1]) *In welcher Fläche liegen die dreieinige Schaar Geraden γ?*

«Knotenlinie dieser Fläche zu finden; desgleichen den Ort der Berühr-
«ungspunkte a und b.

«Der C^3 können Schaaren vollständige Vierseit eingeschrieben
«werden. «*Können der freien C^4 auch vollständige Fünfseit einge-
«schrieben werden? giebt es eine Schaar oder nur eine bestimmte An-
«zahl?*» Desgleichen der C^5 vollständige Sechsseit, etc.

«Ueber die nothwendigen Punkte 1) bei Flächen, 2) bei Curven
«R^n und Flächen f^m, die sich schneiden, und 3) bei Curven R^n und
«R^m, die in derselben Fläche liegen, habe ich auch noch nichts Er-
«hebliches gefunden, und in diesem Moment ist mir gar nichts gegen-
«wärtig, ich hoffe aber nächstens daran zu kommen. In Crelle's Journ.
«hat Jacobi lateinisch darüber geschrieben, d. h. über die Flächen (1),
«aber es wird nur das Einfachste, Allgemeine sein, was sich von selbst
«versteht.

«Ihre Angabe: «dass die Doppellinie einer f^ν vom $\frac{1}{2}\nu(\nu-4)^{\text{ten}}$
«Grad sei», macht mich stutzen, da sie also bei f^5 vom $2^1/_2$ Grad sein
«müsste.

«Es thut mir leid Ihren Herzenswunsch in Rücksicht der Rela-
«tion zwischen den Abständen der Brennpunkte nicht genügend be-
«friedigen zu können. Denn Einmal ist der Satz mehr durch Divi-
«nation entdeckt, als streng bewiesen, und zum Andern entsprang er
«aus sehr complicirten Betrachtungen über die Curven 3ten Grads, be-
«treffend involutorische Eigenschaften, eingeschriebene vollständige
«Vierseit und dazu noch — mich fast erdrückende — Schaaren und
«Netze von Kegelschnitten. Dies waren bisher theils noch Staatsge-
«heimnisse, aber in diesem Augenblicke sind sie mir selbst fast un-
«bekannt. An Bekanntes anknüpfend, kann ich Ihnen kurz folgendes
«andeuten. Sie wissen die Trippelcurve C^3 (und somit jede C^3 über-
«haupt) hat conjugirte Punkte p und q; «*alle Paare p und q be-
«stimmen mit jedem Punkt a in C^3 ein (Involutions-) Strahlsystem.*»
«Nun liegen die Brennpunkte der dem vollständigen 4Seit eingeschrie-
«benen C^2 in einer *besondern* Co^3, bei welcher eine bestimmte Gerade
«im Unendlichen liegt, und bei welcher die Brennpunktenpaare gerade
«jene conjugirten Punkte p und q sind; was dann den Satz zur Folge
«hat. Er muss demnach in allgemeinerer Form bei jeder C^3 statt-
«finden, rücksichtlich je 3er Paare conj. Punkte p und q und vielleicht
«eines Paars conj. Geraden. Das können wir einmal mündlich ver-
«handeln; lassen Sie es für jetzt. — Von Ihrer «Aussage, die Sie

«einst über die Brennpunkte gethan haben wollen», weiss ich leider «nichts, und verstehe auch nicht, was Sie dabei weiter behaupten. — «Ihr Satz über die Zahl der E, welche $R^m \times^n$ 4punktig berühren, ist «mir neu, ich werde ihn kaum beweisen können. Aber wie steht «es mit R^p?

«Noch ein Sätzchen: «*Bei der freien C^n ist die Evolute von «der n^{2ten} Klasse und vom $3\,n(n-1)^{ten}$* Grad; sie hat 3 n (2 n—3) «Rückkehrpunkte, wovon n auf G_∞ liegen, und zwar G_∞ die Rück- «kehrtangente in jedem ist. Es giebt 2n (3 n—5) Kreise, welche die «C^n 4punktig osculiren etc.» «Bei B (C^n) ist der Ort aller Doppel- «tangenten eine Curve $2n(n-2)(n-3)^{ter}$ Klasse, und der Ort ihrer «Berührungspunkte ist vom $(n-3)(2n^2+5n-6)^{ten}$ Grad.

«Sie haben mich kühn herausgefordert — ich habe 3 Tage «hieran geschrieben — nun mangen Sie alles! Besonders bitte ich «Sie, die am Rande durch Vertikalstriche markirten Sachen [1]) bald zu «machen, weil ich dieselben nach Paris senden will; ich hoffe die f^3 «mit den 27 g nebst Anhang wird Beifall finden; ich habe *Poncelet* «schon davon geschrieben, er freut sich. Da die Correspondenz mehr «in meinem als Ihrem Interesse geschieht, so brauchen Sie nicht zu «frankiren.

Ihr

Steiner.

«Herr Professor Ris! Wenn Ihnen Urias diese Zeilen über- «bringt, so stellen Sie ihn nicht gerade an die Spitze, wo der Kampf «am heissesten ist, damit er umkomme, wohl aber mögen Sie auf «ihn Acht haben (wie Jehova's Meisterknecht auf Hiob) und etwa alle «8 Tage bei ihm nachfragen, ob Folgendes geschehen sei:

«1. Die Exemplare der Wiener Abhandlung zu versenden, be- «sonders an die ihm einst in meinem Zimmer (im Adler) diktirten «54 Adressen, und andere die er selbst wählen sollte. Die Exemplare «für Frankreich können in ein Paket gepackt, darauf geschrieben: «A Monsieur le Président de l'académie de Sciences à Paris, und der «Gesandtschaft übergeben werden. Auf jedes Exemplar ist zu schrei- «ben: A Monsieur N. Hommage de l'auteur, desgleichen auf das für «die Akademie: A l'académie des sciences, Hommage de la part de «l'auteur. Ebenso für England an die Société Royale à Londres durch «Gesandtschaft oder Buchhändler.

[1]) Es sind dies die hier Cursiv gestellten Sätze.

»2. Kleine Aufsätze von einer, 2, 3 oder x Seiten gross, die »irgend ein bemerkenswerthes Resultat enthalten, neu oder ein pi»quanter Satz aus der Wiener- oder einer Crelle'schen Abhandlung »entnommen, französisch an Liouville zu schicken, damit sein Name »(Schläfli's) erst in Umlauf kommt.

»3. Sodann aus der Weltüberstürmenden, aus der Erdewälzenden »Abhandlung[1]) einen verständlichen Auszug, der alle Hauptresultate ent»hält — möge derselbe 4 oder 12 Bogen stark werden — an Liou»ville zur Vorlegung der Akademie, oder unmittelbar an diese schicken.

»Das sind Dinge, die ich auf jedem Spaziergang, gewiss 30 Mal »gepredigt habe; aber er ist ein Ziegel[2]) — ein Selbstmörder aus Fahr»lässigkeit — er will sein Licht nicht leuchten lassen. Den Zürcher »Doctorhut vertrödelt: Er soll die Exemplare nach Zürich spediren, »vielleicht geht es noch.

»In der Hoffnung, dass Sie trotz der Maiwahlen hierfür sorgen »werden, grüsse ich Sie freundlichst.

J. Steiner.«

NB. Nach einem Beschluss der Wiener Akademie vor 1 oder $1\frac{1}{2}$ Jahren zahlt dieselbe an Auswärtige kein Honorar mehr.

Das Nachfolgende ist ein unvollständiges Conzept eines Briefes **Steiners** an **Professor Ris** vom 25. III. 1854; wir vermuthen, es ist dies der Anfang eines Conceptes zum vorigen Brief, der allerdings vom 10. März datirt ist, aber erst den 11. April von Berlin abgegangen und am 14. in Schläfli's Hände gelangt.

Berlin, 25. März 1854.

Veehrter Herr Professor und Freund!

»Ich habe Veranlassung, etwas seltenes zu thun, nämlich mich »zu zwingen, ein paar Zeilen zu schreiben. Wenn ich nicht irre, so »waren Sie so freundlich, zu verlangen, dass wenn ein gewisses Er»eigniss eintreten sollte, Ihnen davon Nachricht zu geben. Demzufolge »beehre ich mich nun, Ihnen anbei eine Copie der erhaltenen freudi»gen Botschaft zuzustellen. Vielleicht haben Sie die Sache schon aus »den gestrigen Berliner Zeitungen erfahren. Das fast einstimmige Votum »hat mich sehr frappirt. Falls Sie von dieser Mittheilung Gebrauch

[1]) Ueber das vielfache Continuum.

[2]) Uebername, den Steiner Schläfli gab, weil der letztere auf äussere Formen nicht viel Gewicht legte.

«machen, verlasse ich mich auf Ihre umsichtige Klugheit, dass ich «nicht als Helfer erscheine. Die Mathematische Section hat im Gan- «zen (für die ganze Welt ausser Paris) nur 6 Correspondenten; die «ganze Akademie der Wissensch. bestehend aus 11 Sectionen, nur 100.

«Ueber Politik schreibe ich nicht, die deutsche ist zum K.. «Brechen; das hiesige Kraut-Junkerthum hat vorläufig gesiegt — aber «das Ende vermag kein Sterblicher zu weissagen, und der Bölima — «ich wollte sagen die Vorsehung verkündet es nicht zuvor.

«Das Muggerparteisystem hat es hier soweit gebracht, dass *Vatke* «und *Benari*, die sonst volle Auditorien hatten, im letzten Semester «theils gar keine Vorlesungen hielten, theils nur vor 3—5 Zuhörern. «Denn die bei ihnen hören, kommen schon beim Examen und später «bei der Anstellung übel weg.

«Unserm Freunde Schläfli sagen Sie gefälligt: «*ich hätte ihn «ganz verworfen*». Denn alles Reden, Bitten, Donnern, Flehen hilft «nichts. Gewiss hat er die 100 Exemplare noch nicht versendet. «Nach Basel ist er nicht gekommen und hat mir nicht einmal geant- «wortet; auch nicht den vollständigen Titel seines schönen Werks (die «23 bogige Abhandlung) geschickt. So weiss ich nicht, was ihm in «Kopf gefahren, ob er mir etwas übel genommen und mich plötzlich «verworfen hat. Die Sache ist mir sehr fatal, weil er auf seine Be- «förderung doch etwas loslassen musste. Raabe hatte die Absicht, ihm in «Zürich den Dr. hon. caus. zu erwirken (als Gegenehre von W.)[1]), dess- «halb forderte ich ihn auf, auch an *Mousson* und *A. Müller* Exempl. «zu schicken — aber — —

«Es ist nicht genug, dass er mit ungeheurer Kraftanstrengung «mir behilflich ist, sondern er muss auch für sich selbst bedacht sein, «und meine Behauptungen über seine wissenschaftlichen Leistungen, die «ich höhern Ortes aufstellte, rechtfertigen, um seine Stellung ferner zu «bessern. — Vielleicht hat er mir übel genommen, dass ich darauf drang, «er soll sich mit Mareli vereinen, damit er in Ordnung gehalten und stets «an das erinnert würde, was er zu arbeiten hätte. Unter fremden «Leuten ist es ein Jammer, besonders wenn er erst noch älter ist.

«Mit meiner Gesundheit geht es so ziemlich; nur fehlt die «Jugendkraft und die Phantasie. Ich habe mich diesen Winter viel «mit Arbeiten abgemüht, bin aber nicht auf geeignete Probleme ge- «stossen, welche ich Schläfli zur Lösung senden konnte. Nur etwa «folgende, wenn er mich nicht «verworfen» hat.

[1]) Von Wolf, der von Bern den Doctorhut erhielt.

«Hoffentlich wird es Herr Schläfli nicht übel nehmen (wie 1848), aus Ihrer Hand folgende Aufgaben zu erhalten:

«1. Wenn in einer Ebene 6 beliebige Kegelschnitte C^2 gegeben sind, so können im Allgemeinen, nicht 6 Flächen 2ten Grads, f^2, durch dieselben so gelegt werden, dass sie irgend 6 Punkte, p, im Raum gemein haben.

«2. Dass die allgemeine f^4 keine Gerade g enthält, haben Sie, wenn ich nicht irre, schon in Bolligen verificirt. Aber zu meinem grossen Leidwesen kann dieselbe f^4 auch keine Raumcurve 4ten Grads, R^4, (d. h. Schnitt zweier f^2) enthalten, und demzufolge auch keine R^8, durch welche eine f^8 gehen kann. — Noch weniger wird also die allgemeine f^5 solche R^4 enthalten können. Dadurch bin ich leider ausser Stand gesetzt, diese allgemeinen f^4, f^5, ... auf synthetischem Wege, nämlich durch niedrigere Flächenbüschel, zu erzeugen. Es wäre fatal, wenn hier die Geometrie ein Ende hätte.

«Es schwebte mir in Bern und seither immer vor, als habe ich die 27 g und die 5 Grundebenen in f^3 schon früher gehabt. Vor 3 Wochen stöberte ich endlich meine Papiere durch und fand dann in Untersuchungen v. J. 1850 alles vor, jedoch schien das Bewusstsein zu fehlen, dass es die allgemeine f^3 sei. Auch die 45 Ebenen, in denen die 27 g zu 3 liegen, sind angezeigt, aber nicht die Eigenschaften der Trieder, welche Sie hinzugefügt haben. Dagegen wieder andere Eigenschaften von f^3 u. s. w.»

Die **Notizen**, welche sich hier anschliessen, sind Concepte von ragen Steiner's an Schläfli vom 28. März und 31. März 1854 und eziehen sich auf Sätze, die Steiner vor Terquem entdeckt hatte.

28. März 1854.

f^3.

«Endlich die A_8-fläche der f^3.

«Werde f^3 von E in C^3 geschnitten; längs E die B. E. [1]) A. an f^3, umhüllen einen f_0^x, enthaltend eine Knotenlinie α^z und Schaar Gerade a, = Schnittlinien der sich folgenden A und = Tangenten der α^z, und Fläche y^{ten} Grads bildend, $a^y = f^x$; wo also $\varkappa$ die Klasse, nämlich die Zahl der durch jeden beliebigen Punkt π gehenden B. E. A. bezeichnet.

[1]) B. E. = Berührungsebene.

«Da alle B. E., die durch π gehen, die f^8 längs einer R^6 be-
«rühren, und diese die C^8 (weil ihre E) in 6 Punkten β schneidet,
«so gehen 6 A durch π, und folglich ist

$$x = 6\,;\ f^x = f^6.$$

«Rücken 2β sich näher, bis sie sich vereinen in β_0, so werden
«die zugehörigen 2 A sich entsprechend, und ihre a geht durch π.
«In diesem Falle aber schneidet die Polare f^2 von π (auf f^3) die E
«in einer C^2, welche die C^3 in β_0 berührt; und umgekehrt, findet
«diese Berührung statt, so geht die dem β_0 entsprechende a durch π.

«Bewegt sich π in einer beliebigen Geraden g, so bilden seine
«Polaren einen $B(f^2)$, der die E in einem $B(C^2)$ schneidet, unter denen
«sich 12 solche C_0^2 befinden, welche die C^3 in 12 β_0 berühren; und
«die diesen β_0 zugehörigen a treffen die ihnen entsprechenden π in
«g; folglich begegnet jede g im Ganzen 12 a, und folglich ist

$$y = 12\,;\ a^y = a^{12} = f^6.$$

«Läge π in der Knotenlinie α^z, wäre es eine α, so müsste die
«entsprechende C_0^2 die C^3 osculiren, d. h. in einem Punkte β_3 3-
«punktig berühren. Um den Grad z zu finden, hat man demnach wie
«folgt zu verfahren: «*Bewegt sich π in einer beliebigen Ebene g, so
«bilden seine Polaren f^2 auf f^3 ein HN (f^2), welches die E in einem
«$N(C^2)$ schneidet; so viele C_3^2 sich in dem letztern befinden, welche
«die C^3 in irgend einem Punkte β_3 3-punktig berühren, in ebenso vielen
«Punkten α schneidet g die α^z, und ebenso gross ist folglich z.*» Die
«Beziehung der C^3 und $HN(f^2)$ zu f^3, bringt wohl nicht C^8 und $N(C^2)$
«in gegenseitige Abhängigkeit? sondern sie sind als frei anzusehen.
«Dies bleibt also noch zu lösen.

«*So ist also auch die $(A_8 F)$ der $f^3 = A_8^6 = a_8^{12}$, d. h. von
«der 6ten Klasse und vom 12ten Grad.*» — Die α^z ist mindestens 9ten
«Grads, $z =$ oder > 9. Denn fällt g auf E, so gelten die wp der
«C^3 für α, also 9α in E. Es wäre schön, wenn $(A_8 F) = A_8^6 =$
«$\alpha^9 = a_8^{12}$. Da a^{12} von jeder Ebene g in einer γ^{12} geschnitten wird,
«so muss bei E zu der C^3 noch eine γ^9 kommen, sind es die 9 wt
«der C^3? wahrscheinlich.

«Ebenso folgt bei f^4, wenn sie von E in C^4 geschnitten und
«längs dieser alle B. E. A. gelegt werden, dass die

«$(AF) = A^{12} = a^{28} = \alpha^z$; $z = 24$?

«Und für f^n:

•(AF) = $A^{(n-1)n} = a^{n[n+2(n-1)-3]} = a^{n(3n-5)} = \alpha^{z} = 3n(n-2)$?
)bei immer $a^{n(3n-5)}$ von der E in $C^n + 3n(n-2)$ wt geschnitten
rd.

•Umgekehrt, von R^n ausgehend. Es ist $R^3 = \alpha^3 = A^3 = a^4$;
$= \alpha^4 = A^{12} = a^8$; wie weiter? Wie wird R^5 erzeugt?

•*Le lieu de tous les points* P_0, *dont la première polaire est un ne* S_0^2, *est une surface du* 4me *degré*, P_0^4.• L'intersection des deux rfaces f^3 et P_0^4 est une courbe à double courbure du 12me degré ıi joue de propriétés intéressantes.

•II. La surface générale du 3me degré, S^3, contient en tout 27 'oites d, propriété qui est déjà énoncée, comme on m'a dit par . Cayley. Ces 27 droites jouissent des propriétés suivantes:

•1. La surface S^3 contient 27 systèmes de sections coniques;
•car chaque plan qui passe par une des droites d coupe la
•surface en outre dans une conique C^2. Donc, les plans des
•27 systèmes de coniques, $S(C^2)$, passent respectivement par
•les 27 droites d.

•2. Chacune des 27 droites d est coupé par 10 autres, qui se
•trouvent deux à deux dans un même plan et se coupent
•par conséquent elles mêmes et forment avec la première
•un triangle. Il y a en tout 45 fois 3 droites d qui forment
•un triangle ou qui sont situées dans un même plan, E, et
•chaque droite appartient à 5 plans ou est côté de 5 triangles.
•Désignons la première droite par d_1, les 5 paires qui la cou-
•pent par d_2, il reste encore 16 droites d, que nous appel-
•lerons •*les 16 droites opposées à la première* d_1. La droite
•d_1 est coupée par les 5 paires.

31. März 1854.

•1. Haben f^3 und H_1^2 eine g gemein, so haben sie noch R^5,
•aber diese ist nicht die allgemeine R^5.

•2. Haben f^3 und f_1^3 eine R^4 gemein, so schneiden sie sich
•noch in einer R^5; durch diese geht keine f^2; — warum
•soll nicht ein H_1^2 durchgehen und noch durch g und g_1?
•Weil für R^5 wenigstens 10 p willkürlich anzunehmen sind;
•für f^2 nur 9. — Auch wenn f^3 und f_1^3 eine $R^3 + g$ oder
•$C^3 + g$ gemein hat.

•3. Der Schnitt von f^3 und f^2, oder von f^3 und f_1^3 die C^3 gemein
•haben, ist nicht die allgemeine R^6; ist der Schnitt von f^3

«und f_1^3, die R^8 (oder 3g, oder C^2 und g, die nicht in E) «gemein haben, die allgemeine R^6? — Können f^3 und f_1^3 «auch $2R^4 + g$ gemein haben? oder $3R^3$? — Müssen sich «$2R^4$, die in f^3 liegen, nothwendig schneiden? wenn sie zu «gleicher Schaar gehören, oder nicht? Dito R^6 und R^3 in f^3?

«4. *Giebt es R^6 in der allgemeinen f^4?* Durch eine R^6 wären «∞ viele bedingt; vorausgesetzt, dass durch die allgemeine «R^6 immer f^3, oder $SS(f^3)$ gehen; denn diese schnitten die «f^4 in neuen $SS(R_1^6)$, und durch jede R_1^6 ginge $SS(f_1^3)$ und «gäbe $SS(R^6)$, zu der jene R^6 gehörte. Gehen 3 f^3 durch «R^6, so haben sie paarweise noch 3 R^3: wie viele gp haben «diese 3 R^3? — Daraus zu schliessen, wie viele gp die R^6 «zählt, da die 3 f^3 nur 27 gp haben.

«5. Die f^2 wird vom $B(f_1^2)$ 12 mal berührt. Wenn $f^2 = K^2$, «wieviel zählt dann die durch den M des K^2 gehende f_1^2? «für 2, 3, 4 etc.? Wenn $f^2 = 2f^1 = 2E$, so wird jede «E von $3f_1^2$, ist $= 6$; die Schnittlinie l wird von $2f_1^2$ «berührt, muss $2 \times 3 = 6$ zählen. Der $B(f^2)$ berührt «die f^3 $27 + x$ mal. Für f^3 und $3E_1$ jede E 3 mal, = «9; jede l 2 mal, $= 3 \cdot 2 \times 3 = 18$; die durch p gehende «$f^2$ zählt x; macht $27 + x$. Bei $f^3 = f^2 + E$; die f^2 «= 12 mal, E = 3 mal, = 15; Schnitt $C^2 = 12 + x$ mal, (bricht hier ab) — — — — — — — — —

«nämlich der Schnitt von $B(f^2)$ und E ist $B(C_1^2)$ und dieser berührt «C^2 6 mal, zählt je 3fach, so ist $x = 6$. Dann zählt also auch vor- «hin die Ecke p 6 mal.

«Also berührte $B(f^2)$ den K^2 6 mal und die durch den Mittel- «punkt M gehende f^2 zählte für 6 mal. Und $B(f^2)$ berührte die f^3 «$27 + x = 33$ mal. Danach würde weiter folgen, dass:

«$B(f^2)$ die $f^4 = 4 \cdot 3 + 6 \cdot 6 + 4 \cdot 6 = 72$ mal berührt, «abgezählt nach dem speziellen Falle, wo $f^4 = 4E$.

— «Wenn $f^4 = f^3 + E$, so kommen auf $f^3 = 33$; auf $E = 3$; «ihr Schnitt C^3 wird von Schnitt $B(C^2)$ 12 mal berührt macht, als «3fach zählend = 36; zusammen $33 + 3 + 36 = 72$, richtig.

— «Wenn $f^4 = f_1^2 + f_2^2$; für $f_1^2 = 12$ und $f_2^2 = 12$; für «Schnitt $R^4 = 48$, wonach er von $B(f^2)$ wohl 16 mal berührt werden «müsste; wenn aber $R^4 = 2C^2 = R^2 + R_1^2$, so werden diese von «$B(C^2)$ und $B(C_1^2)$ in $2 \cdot 6$ Punkten berührt = 12, aber die Schnitte «2δ von R^2 und R_1^2 zählen dazu noch doppelt, was 16 giebt; und

•die durch δ gehende f^2 zählt dann für 6. Also: *R^4 wird von $B(f^2)$ •16 mal berührt.*

— •Wenn $f^4 = f_1^2 + 2E$, so wird $f_1^2 = 12$, die $2E = 6$ mal, •die $2C_1^2$ (deren Schnitte) $= 2 \cdot 6 \cdot 3 = 36$; die 1 der $2E$ wird •2 mal berührt, zählt $= 2 \cdot 3 = 6$; die 2δ (der 1 und f_1^2) zählen •$2 \cdot 6 = 12$ mal, also $12 + 6 + 36 + 6 + 12 = 72$.

•So würde folgen; dass f^n von $B(f^2)$ im Allgemeinen:

$$\underset{nE}{3n} + \underset{\frac{1}{2}n(n-1)1}{\frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} \cdot 2 \cdot 3} + \underset{\frac{1}{6}n(n-1)(n-2)\delta}{\frac{n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot 6}$$

$= n[(n-1)(n-2) + 3(n-1) + 3] = n(n^2 + 2)$ mal be- •rührt wird.

•6. Nun haben wir zu sehen, wie oft $B(f^3)$ eine f^n berührt. Der •Schnitt mit E ist $B(C^3)$ mit 12δ, was anzeigt, das $12\ f^3$ die E be- •rühren.

— •Daher wird f^2 $2 \cdot 12 + x = 24 + x$ mal berührt, nämlich •für $f^2 = 2E$ zählt die 1 für x mal; in der That wird 1 4 mal be- •rührt, zählt jede für y (vorhin $= 3$), so ist $x = 4y$ ($= 4 \cdot 3 = 12$?).

— •Ein f_1^3 würde danach $3 \cdot 12 + 3 \cdot 4y + z$ mal berührt = •$36 + 36 + z = 72 + z$ mal; wobei für $f_1^3 = 3E$, die z mal auf δ •kommen. Für $f_1^3 = f^2 + E$, hat man $24 + 12 = 36$ (in f^2), 12 •(in E), $= 48$ und im Schnitt C^2 durch $B(C^3) = 10$ Berührungen •jede zu 3 gezählt, $= 30$, also $48 + 30 = 72 + z$, folglich auch •hier $z = 6$, d. h. die durch δ gehende f^3 zählt für 6 Berührungen, •so dass $B(f^3)$ eine f_1^3 im Allgemeinen

78 mal berührt.

— •Danach wird f^4 von $B(f^3) = \underset{4E}{4} \cdot 12 + \underset{6l}{6} \cdot 12 + \underset{4\delta}{4} \cdot 6$

$= 144$ mal berührt.

— •Und ebenso f^n von $B(f^3) = n \cdot 12 + \frac{n(n-1)}{1\ 2} \cdot 12 + \frac{6n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3}$

$= n[(n-1)(n-2) + 6(n-1) + 12]$

$= n(n^2 + 3n + 8)$ mal berührt.

•7. Der $B(f^n)$ berührt eine $E = 3(n-1)^2$ mal; eine $g = 2(n-1)$ •mal. Daher wird eine f^2, als $2E$ mit 1, $= 2 \cdot 3(n-1)^2 + 2(n-1)$ •$\times 3 = 6n(n-1)$ mal berührt.

— •Eine f^3 oder $3E$ mit $3l$ und δ wird

•$3 \cdot 3(n-1)^2 + 3 \cdot (2n-2) \times 3 + 6$ mal berührt.

— •Die f^4 oder $4E$ mit $6l$ und 4δ wird

•$4 \cdot 3(n-1)^2 + 6 \cdot (2n-2) \cdot 3 + 4 \cdot 6$ mal berührt.

— «Und eine f^m oder $mE + \frac{1}{2} m(m-1) l + \frac{m(m-1)(m-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} \delta$

wird $m \times 3(n-1)^2 + \frac{m(m-1)}{1 \cdot 2} \times 2(n-1) \cdot 3 +$

$\frac{m(m-1)(m-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} \times 6,$

$= m\,[3(n-1)^2 + 3(m-1)(n-1) + (m-1)(m-2)],$

$= m\,[(m-1)(m-2) + 3(n-1)(m+n-2)]$ mal berührt.

$\| = m[3(n-1)^2 + 2(n-1)(m-1) + (m-1)^2]$ nach

«Cima Bue (Schläfli).

«Für $m = n$ kommt:

$= 6\,n(n-1)^2$

«dass $f_1{}^n$ von $B(f^n) = n(n-1)(7n-8)$ mal berührt wird.

«*Daraus ist zu schliessen, dass im HN (f^n) der Ort der B. P. «oder der Hornpunkte*[1]) *δ eine R^2 ist, wo*

«$n \cdot x = 6\,n(n-1)^2$, also

«$x = 6(n-1)^2$, folglich

«*eine $R^{6(n-1)^2}$ ist.*

«Auch ist nun zu finden, wie oft eine R^y von $B(f^n)$ berührt wird.

«Der $HB(f^n)$ hat nothwendige n^3 Grundpunkte q; durch $\frac{(n+1)(n+2)(n+3)}{1 \cdot 2 \cdot 3} - 3$ derselben ist der Büschel bestimmt, und «damit auch die übrigen

$$n^3 - \frac{1}{6}(n+1)(n+2)(n+3) + 3 = \frac{n-1}{6}(5n^2 - n - 12)$$

«Punkte q. Oder man hat den Satz (analog, wie Curve in E):

«*Durch $\frac{1}{6}(n+1)(n+2)(n+3) - 3$ beliebig gegebene Punkte q «geht eine $S(f^n)$, welche Hornpunkte δ haben, und der Ort der letztern «ist eine Raumcurve 6 $(n-1)^{2ten}$ Grads, $R_1{}^{6n}$*, (— aber sie geht «nicht durch die q und hat sie zu dp, wie ich anfangs glaubte). Erst «bei $N(f^n)$, wenn es $\frac{1}{6}(n+1)(n+2)(n+3) - 4$ Grundpunkt q hat, «und der Ort der δ eine Fläche δ^z ist, *hat diese die q zu Horn- «punkten, weil zur Bestimmung einer f^n der angenommene hp für 4 «bestimmende Punkte zählt, also jeder jener q als hp angenommen «werden kann und dadurch die f^n gerade bestimmt ist.*

---

[1]) Siehe Brief von 30. April 1854. Hornpunkte = Knotenpunkte.

«8. Welche Modificationen treten ein, wenn der $B(f^n)$ ein besonderer wird? z. B. wenn, für $n = 2\nu$, er sich in einer $R^{\frac{1}{2}n^2}$ berührt, statt in R^{n^2} schneidet? wobei eine Doppel-f^ν durch $R^{\frac{1}{2}n^2}$ geht und zu $B(f^n)$ gehört. Diess ist dadurch bestimmt, dass man eine f^n und $f^\nu = \frac{1}{2}n$ annimmt; ihr Schnitt ist $R^{\frac{1}{2}n^2} = 2\nu^2$. «*Ist dabei der ganze Schnitt von f^ν_2 mit der f^m als Berührung anzusehen? oder nur diejenigen Punkte, in welchen $R^{\frac{1}{2}n^2}$ die f^m schneidet?*» Das wären $m \cdot \frac{1}{2}n^2$ Punkte δ, und die übrigen f^n in $B(f^n)$ berührt, dann die f^m nur noch

$$m[(m-1)(m-2) + 3(n-1)(m+n-2)] - \frac{1}{2}mn^2 \text{ mal.}$$

$$= m(m-1)(m-2) + 3m(m-1(n-1) + 3m(n-1)^2 - \frac{1}{2}mn^2$$

$$\left| \frac{1}{2}m(5n^2 - 12n + 6). \right.$$

«Für $B(f^2)$ insbesondere wird $f^\nu_2 = E$ und $R^{\frac{1}{2}n^2} = C^2$ in E «Schnitt von E mit $f^m = C^m$, und von C^2 mit f^m d. i. bloss mit C^m, «$= 2 \cdot m$ Punkte δ_1, so dass, wenn diese allein zählen, noch «$m[(m-1)(m-2) + 3m] - 2m = m(m^2 + 2) - 2m = m^3$ Punkte δ «bleiben.

«Daraus würde folgen, wenn $B(f^2)$ concentrische Kugeln sind «(also nach Poncelet E à l'infini und C^2 imaginär), «*dass jeder Punkt p der Mittelpunkt von m^3 Kugeln ist, welche eine gegebene f^m berühren*»; Oder: «*Dass aus jedem Punkte p m^3 Normalen auf die Fläche m^{ten} Grads gehen.*»

«Dies stimmt mit dem andern Prinzip überein, wenn f^m um 2 «Axen durch p unendlich kleine Drehungen macht; sie schneidet sich «selbst in 2 R. C., R^{m^2} und $R_1{}^{m^2}$, und diese schneiden einander in «dem m^3 Punkte δ. Also Terquem geirrt.

Schläfli an Steiner.

Mein theurer Freund!

Aus einem Brief von Ihnen an Ris bekomme ich zwei Aufgaben, an deren Stelle ich theils Schwereres, theils Mittheilungen erwartet hätte:

Ad 1° Flächen zweiten Grades, welche 6 Punkte gemein haben, sind ein spezieller Fall einer dreifachen Schaar; eine solche

ist durch 4 willkürlich gegebene Flächen bestimmt. Wird die dreifache Schaar durch irgend eine Ebene geschnitten, so sind auch die entstandenen Kegelschnitte eine dreifache Schaar, d. h. wenn vier derselben bekannt sind, so ist die Gesammtheit aller übrigen schon bestimmt, und wenn von irgend einem fünften z. B. drei Punkte gegeben sind, so ist er schon bestimmt. Wenn demnach in einer Ebene auch nur 5 Kegelschnitte beliebig gegeben sind, so gehen keine 5 Flächen zweiten Grades durch, welche einer dreifachen Schaar angehören, also in specie keine, welche 6 Punkte gemein haben. Sind aber in der Ebene nur 4 Kegelschnitte gegeben und von den 6 Punkten, welche die durchgelegten Flächen zweiten Grades gemein haben sollen nur drei beliebig gegeben, so durchlaufen die drei übrigen eine Curve.

Ad 2° Es kömmt hier Alles auf die Richtigkeit dieses Axioms an: «Wenn V das Polynom einer algebraischen Fläche bedeutet, welche den Durchschnitt zweier Flächen, deren Polynome F, f sein mögen, ganz enthält, so ist $V = F\varphi + f\Phi$, wo Φ und φ wieder zwei Polynome bedeuten.» Besteht dieses Axiom, so seien die vier Hülfspolynome, in fallender Reihe geordnet, Φ, φ, F, f von den Graden $m - p$, $m - n$, n, p. Man setze $S = \frac{1}{2} p (p^2 + 11) - (m - n) np - 1$.

Nehmen wir jetzt die Fläche V als beliebig gegeben an und verlangen von ihrem Polynom die obige Form, so ist die Zahl der nach Abzug aller Bedingungen noch übrigen verfügbaren Grössen

1° S, wenn $m - p > m - n \gtreqless n > p$.

2° $S - 1$, wenn $n = p \quad m > 2p$.

3° $S - 2$, wenn $n = p \quad m = 2p$.

Im ersten Fall hat S immer einen negativen Werth, die Fläche V ist also immer bornirt; z. B. für $m = 4$, $n = 2$, $p = 1$ ist $S = -1$, d. h. die Fläche vierten Grades ist einfach bornirt, wenn sie von einer Ebene in 4 Punkten berührt werden kann (wo dann die Ebene die Fläche in 2 Kegelschnitten schneidet). Im zweiten Fall ist $S - 1$ immer negativ, sobald $p \gtreqless 2$ genommen wird; für $p = 1$ ist die einzig mögliche freie Fläche diejenige dritten Grades, d. h. sie enthält die bekannten 27 Geraden. Die Fläche vierten Grades wird für $p = 1$ schon einfach bornirt; für $p = 2$ ist schon die Fläche 5. Grades vierfach bornirt, d. h. wenn sie eine $C^{2} \times^{2}$ enthalten soll. Im dritten Fall ist $S - 2 = 0$ für $p = 1$, die Fläche

zweiten Grades also frei, wenn sie Geraden enthalten soll; aber schon für $p = 2$ wird $S - 2 = -1$, d. h. die Fläche 4. Grades ist einfach bornirt, wenn sie Durchschnitte zweier Flächen zweiten Grades ($C^{2\times 2}$) enthalten soll; die Fläche 6. Grades wird 10 fach bornirt, wenn sie $C^{3\times 3}$ enthalten soll u. s. f.

Dass ich das erwähnte Axiom und andere ähnliche nicht beweisen kann, erschwert mir die Aufgabe, für Flächen und räumliche Curven etwas aufzustellen, was der Theorie der nothwendigen Punkte bei den ebenen Curven entspräche. Unter vielen zum Theil verwickelten Sätzen lege ich Ihnen folgenden zur Beurtheilung vor:

»Wenn durch die n p q Durchschnittspunkte von drei Flächen n^{ten}, p^{ten}, q^{ten} Grades eine Fläche m^{ten} Grades, die keiner der vorigen an Grad nachsteht, gelegt werden soll, so findet man die Zahl der nothwendigen Punkte auf folgendem Wege. Man entwickle den Ausdruck

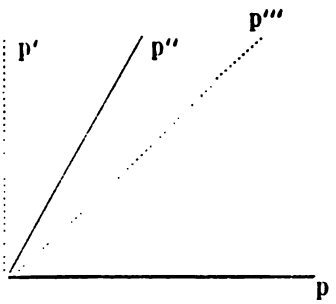
$$y^{-m-1}(y^n - 1)(y^p - 1)(y^q - 1),$$

lasse die Potenzen von y, welche negative Exponenten haben daraus weg, setze dann $y = 1 + x$ und entwickle nach den Potenzen von x; dann ist der Coefficient von x^3 die Zahl der nothwendigen Punkte.«

Vielleicht interessirt Sie folgender Satz über die Punkte einer freien Curve $m \times n^{ten}$ Grades, in denen sie von einer Ebene vierpunktig berührt wird. Sie liegen auf einer Fläche $[6(m + n) - 20]^{ten}$ Grades, so dass ihre Zahl $mn[6(m + n) - 20]$ beträgt; dieses ist ein Satz, weil dadurch unter den genannten Punkten $\frac{mn}{2}(m + n - 4) + 1$ nothwendig werden.

Es ist aber auch klar, dass die Fläche bei weitem nicht bestimmt ist. Unter den unzähligen möglichen Flächen kann man eine durch folgende Bedingungen angeben. Es seien A, B zwei Flächen m^{ten} und n^{ten} Grades, die sich in jener Curve schneiden, μ ein noch zu bestimmender Punkt. Seine in Beziehung auf A, B genommene Polarebenen a, b, die Polarflächen zweiten Grades α, β. Es sei ferner in Bezug auf die Basis B, wenn man α als Direktrix annimmt, P, die erste Polarenveloppe, dagegen P' die zweite Polarenveloppe für die Basis A und die Ebene b als Direktrix; endlich sei P'' der Ort jedes Pols, dessen in Bezug auf B genommene Polarebene seine in Bezug auf A genommene Polarfläche zweiten Grades berührt. Nimmt man nun in Bezug auf alle drei Flächen P, P', P'' als Basen die Polarebenen des Punktes μ, nämlich p, p', p'', so werden sich diese in einer

und derselben Geraden schneiden. Man lege eine vierte Ebene p‴ so durch, dass



$$\frac{\sin \measuredangle [p\ p'''']}{\sin < (p'''\ p'')} = 2\ \frac{\sin < (p\ p')}{\sin < (p''\ p')}$$

wird.

Wenn man dieselbe Construktion mit Vertauschung der Flächen A, B wiederholt, so erhalte man die Ebene q‴. Verlangt man nun, dass alle vier Ebenen a, b, p‴, q‴ einen Punkt gemein haben, so ergiebt sich als Ort des Punktes μ eine Fläche $[6\ (m + n) - 20]^{\text{ten}}$ Grades, welche die ursprüngliche Curve in den Punkten schneidet, wo sie von einer Ebene vierpunktig berührt wird. [Für $C^{2} \times {}^{2}$ sind es die Quadrupelebenen.]

Wenn eine Fläche m^{ten} und ein Flächenbüschel n^{ten} Grades gegeben sind, so enthält dieses

$$m\ [3\ (n - 1)^2 + 2\ (n - 1)\ (m - 1) + (m - 1)^2]$$

Flächen, welche jene berühren. Es mögen sich zwei Flächen F und f berühren, so schneiden sie sich in einer räumlichen Curve, welche den Berührungspunkt zum Doppelpunkt hat; man ziehe hier die zwei Tangenten an die Curve. Legt man nun noch eine Berührungsebene an derselben Stelle, so erhält man als Durchschnitte F und f zwei ebene Curven, welche hier auch jede einen Doppelpunkt haben, dem je ein Tangentenpaar zugehört. Alle drei Tangentenpaare sind in Involution.

Alle Tangenten einer $C^{m} \times {}^{n}$ bilden eine abwickelbare Fläche D, deren Grad $m\ n\ [m \mid n - 2]$ ist; alle Ebenen, welche die Curve in zwei verschiedenen Punkten berühren, erzeugen ebenfalls eine abwickelbare Fläche E. Ist r der Grad der Fläche D, so wird ihre Doppellinie von einer beliebigen Ebene in $\frac{1}{2}\ r\ [r - 4]$ Punkten geschnitten. An die Fläche E gehen durch irgend einen gegebenen Punkt

$$\frac{m\,n}{2}\,[m\,n\,(m+n-2)^2-10\,(m+n)+28]$$

Berührungsebenen.

Ihr Satz über Distanzen der Brennpunkte von drei, einem Dreiseit eingeschriebenen Kegelschnitten hat mich sehr gequält; ich habe ihn noch nicht gefunden und ersuche Sie daher, mir ihn sobald wie möglich zu schreiben. Von den Aussagen, die ich früher einmal über die Brennpunkte gethan, kann ich nicht zurückgehen. Es sind zwei Gegeneckenpaare eines umschriebenen Vierseits, deren drittes Gegeneckenpaar die zwei, allen Kreisen gemeinschaftlichen Punkte sind (haben Sie einen kurzen Namen für dieselben?); ist der Kegelschnitt gegeben, so ist das Vierseit durchaus bestimmt, wenngleich jede Seite mit sich selbst jeden beliebigen Winkel bildet und daher ihre Lage in der Ebene nicht ändert, wenn auch der Kegelschnitt um einen Brennpunkt herum gedreht wird.

Von meiner Wiener Abhandlung habe ich schon seit längerer Zeit einen Haufen dem Buchhändler zum Versenden übergeben, nach Zürich und Basel habe ich freilich noch keine geschickt, weil ich dazu einige Zeilen schreiben muss. Da keine Aussicht auf Abnahme der ungedruckten Abhandlung vorhanden ist, so will ich sie dem *Crelle* schicken, muss Sie aber ersuchen, dafür zu sorgen, dass er sie nicht unter das Eis fallen lässt. Die erste Begeisterung für diese n Dimensionen ist bei mir schon verflogen, obschon die Untersuchungen über Flächen mir auch nach jener Seite neue Wege aufzuschliessen scheinen; daher die Zögerung mich wieder in diese hirnverrückenden Vorstellungen hinein zu arbeiten, was doch geschehen muss, wenn ich einen Auszug dem *Liouville* zuschicken soll.

Ich gratulire Ihnen zu Ihrer wohlverdienten Auszeichnung und zu der gerechten Anerkennung, die Ihnen selbst Ihr Fachgenosse *Chasles* in so unumwundenen Ausdrücken ausspricht.

Erfüllen Sie mir den Wunsch und schreiben (Sie) mir recht bald einige Zeilen, namentlich über die Brennpunkte; auch Aufgaben; denn die zugesandten zähle ich Ihnen nicht. Die Frühlingsferien sind mir weggenommen, weil ich theils mit Examen, theils mit der Nationalvorsichtskasse zu thun habe.

Bern, den 2. April 1854.

L. Schläfli.

Steiner an Schläfli.

Berlin, 30. April 1854.

Mein lieber kräftiger Freund!

«Er hat andern geholfen, aber
«hilft sich selber nicht.»
«Der brave Mann denkt an sich
«selbst zuletzt.» Zoll.

«Dass ich Ihnen etwas über die Brennpunkte, der einem 3 Seit «eingeschriebenen Kegelschnitte gesagt haben soll, kann ich mir nicht «denken, denn ich weiss von nichts. In beiden Briefen sprechen Sie «von den 2 Grundpunkten eines Kreisbüschels, wovon ich auch keine «Silbe verstehe; wie kann ich behalten, was Sie mir je einst ge«sagt haben, da ich nicht einmal das weiss, was ich selbst ge«schrieben habe.

«Was Sie «*Untercurve*» nennen wollen, habe ich bereits früher *Theilcurve*» genannt; sie ist ein Theil des ganzen Schnitts, der «Ganz- oder «Vollcurve». «Unter» harmonirt mit «Ober», nicht mit «Voll».

«Den Namen «Hornpunkt» habe ich irgendwo aufgeschnappt, jetzt «finde ich ihn unpassend, und halte «*Knotenpunkt*» für angemessener, «natürlicher. Demgemäss hätte man weiter den «*Knotenkegel* K^2», der in Extreme übergehen kann: 1) sich auf eine Gerade K_0 reduziren, = «*Rückkehr-Knoten-Kante (Tangente)*», im «*Rückkehr-Knoten-punkt*», oder «*Rückkehrkante*» im «*Rückkehrknoten*»; 2) in zwei Ebenen 2 K^1 zerfallen, deren Schnittlinie eigentlich eine «*Knotenkante*» wäre; 3) die 2 Ebenen fallen zusammen 2 (K^1), = *ebener* oder

«*platter Knotenpunkt* mit *dreispitziger Knotenebene*

(auf diese kam ich auch schon früher, weiss im Augenblick nicht wobei, aber ich konnte sie nicht recht überwältigen). Zudem giebt es auch noch *Doppel-Rückkehrknoten* = *Selbstberührungsknoten*», z. B. bei der Ringfläche, die entsteht, wenn sich die Ebene eines Kreises (oder einer C^2 oder C^n) um eine Tangente desselben herumbewegt. Weiter *3 facher*, *n facher Knoten*, wenn er in jedem durchgehenden Schnitt ein 3- oder nfacher Punkt bewirkt. Ferner wäre danach auch die

Doppellinie füglich «*Knotenlinie*» zu nennen; dagegen müsste der arête de rebroussement, welche ich bisher so genannt habe, der Name Bindelinie», «*Bindecurve*» oder «*Selbstschnittscurve*» aller die Fläche bildenden Geraden, gegeben werden. — Sie sind Sprachkenner, machen Sie bessere Vorschläge. Bei Einführung neuer Namen ist Umsicht nöthig, sie müssen sachgemäss sein. Man sollte wissen, welche in deutschen Büchern bereits gebraucht worden sind.

«Mit der famosen R^{12} kann ich mich noch nicht beruhigen, vielmehr soll's erst recht drauf losgehen. Liege ich auch wie ein Halbtodter im Schneegestöber — so fasse ich meinen treuen, starken Bernhardiner beim Schwanz und er wird mich aus der dustern Kluft herausreissen. Der Schnitt der Basis f^3 mit ihrer Kernfläche f_0^4, *muss* allerlei schöne Eigenschaften haben, die meine Nase schon 1846 und 1850 witterte, aber nicht klar zu erkennen vermochte; Sie werden jetzt leicht triumphiren, selbst wenn mein Phantasie-Gebilde grossentheils falsch wäre. — Liegt ein Pol Q in R^{12}, so ist seine erste Polare ein Kegel P^2, dessen Scheitel der conjugirte Pol P ist, und die zweite Polare ist die Ebene E, welche die f^3 in Q und den Kegel P^2 längs des Strahls QP = t berührt. Dieser Strahl t hat die wesentliche Eigenschaft: 1) dass die erste Polare, f^2, jedes in ihm liegenden Pols die f^3 in Q berührt; 2) dass er die Rückkehrtangente (?) des Schnitts E^3, von E und f^3 im Punkt Q ist; 3) dass er die f_0^4 in P zwei- und die f^3 in Q dreipunktig berührt; und 4) dass sein Ort eine Fläche 30ten Grads, $= t^{30}$, ist, welche die 27 g zu Doppellinien hat, so dass der Schnitt von t^{30} mit f^3 aus $3\,R^{12} + 2 \cdot 27\,g = R^{90}$ besteht. Nun kann ich aber mit blossen Augen nicht erkennen: ob t Selbstschnitt der Ebene E und ob P Selbstschnitt des Strahls t sei? Der Ort des Punkts P, $= P^x$, geht durch die 54 Asymptotenpunkte π der 27 g, oder er berührt diese g in den π, so dass er also mit der f^3 im Ganzen 54 oder 108 Punkte gemein hat, und daher x = 18 oder = 36 sein muss (nach Ihrer Angabe, dass eine f^7 durch P^x gehe, wäre x = 28). Die P^x geht durch jeden der 10 Sylvester'schen Punkte dreimal. Da t die f_0^4 in P berührt und in Q schneidet, so muss sie noch in einem 4ten Punkte S schneiden, so dass der Schnitt von t^{30} mit f_0^4 aus $R^{12} + 2\,P^x + S^y$ besteht und $12 + 2x + y = 4 \cdot 30$, also wenn x = 36 auch y = 36 ist. Diese S^y muss auch durch die 54 π gehen, was aber nicht gut passt. — Dass t die f_0^4 in P 3punktig berührt, scheint auch nicht zu gehen? *Oder sind t und E = Tangente*

«*und Schmiegungsebene der R^{12} im Punkte Q? und haben nicht die «Polarkegel P^2 u. Q^2 von Q und P den Strahl t gemein?* so dass t «eine Doppeltangente der f_0^4 ist. Zum donnstig! es muss so was sein! «Die R^{12} ist charakteristisch für die Basis f^3; sie muss diejenigen Punkte «Q enthalten, welche in Rücksicht auf den Schnitt E^3 der Berührungs- «ebene E einzig sind in ihrer Art, also Rückkehrpunkte, und in wel- «chen allein die Polare f^2 eines nicht in f^3 selbst liegenden Pols die «letztere berühren kann. Denn in diesem Betracht ist die R^{12} für «die f^3 das, was für die C^3 ihre 9 Wendepunkte sind. — (Wie steht es «mit der Berührungsebene E_0 der f_0^4 in Q?) **Der Ort von t «ist = t^{30}.**

«Eben so muss es sich bei Basis f^m verhalten. Sie wird von «der Kernfläche $Q^{4(m-2)}$ in einer charakteristischen $R^{4m(m-2)}$ ge- «schnitten; für jeden Punkt Q in dieser muss die berührende Ebene «E eine absonderliche sein; ihr Schnitt E^m muss Q zum rp und den «Strahl QP = t zur rt haben; für jeden in t liegenden Pol muss «die erste Polare f^{m-1} die Basis f^m in Q berühren, so dass daher «der Ort von t eine Fläche m [3 $(m-2)^2$ + 2 $(m-2)$ $(m-1)$ «+ $(m-1)^2$] — m = 2 m $(m-2)$ $(3m-4)^{ten}$ Grads sein muss, «welche die f^m längs $R^{4m(m-2)}$ dreipunktig und die andere (erste) «Kernfläche $P^{4(m-2)^2}$ längs der Curve P^x zwei- (oder drei-) punktig «berührt u. s. w. Auf die Mensur! Los!

«Bei f^3 fallen in jede der 45 Ebenen △ 16 Trieder-Scheitel P, «die in einer C^4 liegen, welche die 3 g zu d t hat und sie in den «6 π berührt; die den 16 P conjugirten 16 Q liegen in einer R^6, «welche durch die 6 π geht (der ganzen C^4 ist die R^6 conjugirt). «Die 6 π liegen zu 3 in 4 Geraden l und sind die Berührungspunkte «je dreier solcher Schnitte C^2 der f^3, durch welche ein Kegel L^2 geht, «der die Ebene △ längs l berührt; liegen die Scheitel der 4 Kegel «L^2 in einer Geraden?

«Ich unterscheide die Punktensysteme (wie die Strahlsysteme) «in hyperbolische und elliptische, nachdem die Asymptotenzahlen[1]) π reell «oder imaginär sind. — Von den 3 g in jeder △ sind entweder 1) alle «3 hyperb., oder 2) nur eine hyperb. und die andern elliptisch. Wenn «alle 27 g reell: wie viele sind von jeder Art? ist die Anzahl jeder «Art nothwendig bestimmt, oder kann sie variren? und nach welcher «Regel? Können alle hyperbolisch sein? — Wie viele g werden zu- «gleich imaginär? giebt es dafür ein Gesetz?

[1]) Soll wohl heissen: Asymptotenpunkte.

«Die 6 Normalen N aus einem Punkte p auf f^2 liegen in einem «Kegel p^2, welcher auch durch den Mittelpunkt der f^2 geht. Wie «verhält es sich mit den m $(m^2 - m + 1)$ N aus p auf f^m?

«Da Sie nun die Polaren so tüchtig verschlungen haben, so «können Sie gelegentlich die weitern reciproken Kerncurven bestimmen, «d. h. den Ort des Pols P, dessen x^{te} Polare in Bezug auf die Basis «C^m einen Doppelpunkt Q hat, und den Ort dieses Q, dessen $(m - x - 1)^{te}$ «Polare jenen P zum d p hat. So viel ich mich im Augenblick er- «innere, ist es mir nicht gelungen. Ebenso sind die reciproken Kern- «flächen P^x und Q^y für die Fläche f^m aufzufinden. — *Die Kerncurven «und Kernflächen haben grosse Bedeutung: Denn sie sind Enveloppen «der Polar-Enveloppen andern Ranges für beliebige Directricen.* Z. B. «die Trippel- oder Kerncurve Co^3 der Basis C^3 wird von der 2ten «Polare Ao^2 jeder Geraden A in drei Punkten α berührt; ebenso von «der 2ten Polare Do^y der gegebenen Directrix D^r in 3 r Punkten α etc. «Da haben Sie wieder ein Staatsgeheimniss. — Daher ursprünglich «der Name «Kern», weil sich Alles um sie versammelt, sich an sie «anlehnt.

«Haben Sie den Urias-Zettel Herrn Prof. Ries gezeigt? was ich im «Vertrauen auf Ihre grosse Gewissenhaftigkeit getrost erwartete. Sie «schweigen darüber und Ries hat auch kein «Ja» unter Ihren Brief «gesetzt.

«Ich bin wieder für diesen Sommer um Urlaub eingekommen, «weiss aber selbst noch nicht recht, wo ich herumbummeln werde; «der Arzt hat mir nochmals Ems vorgeschlagen.

«Mit freundlichem Gruss

«Ihr

«*Steiner.*»

Schläfli an Steiner.[1])

«Um die Absendung dieses Briefs nicht zu lange zu verzögern, «will ich Ihnen nur kurz meine Ansichten über die *Untercurven* mit- «theilen, und die schwierige Ergründung Ihrer Fragen mit der erfor- «derlichen Zeit und Reife für einen späteren Brief vorbereiten. Es «seien A, B, C drei Polynome resp. von den Graden a, b, c; und A^1, «B^1, C^1 drei Polynome von den Graden $a+h$, $b+h$, $c+h$, so stellen «die Proportionen $A:B:C = A^1:B^1:C^1$ eine Untercurve vom Grade

[1]) Der Eingang fehlt.

„$h^2 + (a + b + c)\,h + bc + ca + ab$ dar. Hier ist freilich nur das „niedrigste Polynom fest, die übrigen bilden vielfache Schaaren. Das„selbe kann auch dadurch ausgedrückt werden, dass man verlangt, dass „alle im Schema $\left\| \begin{matrix} A \cdot B \cdot C \\ A^1 \cdot B^1 \cdot C^1 \end{matrix} \right\|$ enthaltenen Determinanten, $BC^1 - B^1C$, „$CA^1 - C^1A$, $AB^1 - A^1B$, verschwinden. Dieses scheint aber nur der „leichteste Fall einer allgemeinen Darstellungsweise von Untercurven „zu sein. Man kann sich nämlich ein Schema denken, wo jede Verticalzeile n Polynome und jede Horizontalzeile deren $n + 1$ enthält, in„dem zugleich die Grade der Polynome äquidifferente Zeilen bilden, „und dann verlangen, dass alle $n + 1$ Determinanten, welche durch „das Weglassen je einer Verticalzeile entstehen, zugleich verschwinden: „eine Untercurve wird diesen Bedingungen genügen. Man kann zwar „diese Darstellung auf die vorige einfachere zurückführen, aber nicht „ohne bedeutende Erhöhung der Grade der Ausdrücke und daherige „Verdunklung der Natur der Untercurve. Mit andern Worten: durch „eine Untercurve A gehen zwei Flächen p, q, und der übrige Theil „B ihres vollständigen Durchschnitts ist auch wieder nur eine Unter„curve, die sich ähnlich verhält, u. s. f., bis man erst die n^{te} Curve „als Vollcurve antrifft. Will man aber das Ganze in zwei Tempo ab„thun, so muss man jede der Flächen p, q mit einer passenden Fläche „zusammensetzen, so dass dann B durch die neu hinzutretenden Durchschnitte zur Vollcurve ergänzt wird, durch deren einmalige „Wegnahme aus dem vollständigen Durchschnitt der durch Zusammen„setzung verstärkten Flächen p und q sogleich die ursprüngliche „Untercurve A erhalten wird. Bei einer solchen Reduction zieht man „aber wohl den Knoten nur stärker zusammen, statt ihn zu lösen. — „Ob die erwähnte allgemeinere Darstellungsweise einer Untercurve „wirklich die allgemeinste ist, wage ich nicht zu entscheiden; und „wenn sie es auch wäre, so hätte man dann bei der Classifikation „der Untercurven immer noch artige zahlentheoretische Schwierigkeiten „zu überwinden.

„Die Frage über die abwickelbare Fläche S, welche eine freie „Fläche f^n längs eines ebenen Schnitts C^n berührt, habe ich noch „nicht ganz zweifellos entscheiden können. Der Grad $g = n\,(3n-5)$ „und die Classe $K = n\,(n-1)$ sind richtig. Wenn Sie unter Knoten„linie die arête de rebroussement verstehen, wo jede freie Ebene die „S mit Rückkehrpunkt schneidet, so können wir ihren Grad mit r be-

zeichnen, und haben $r = w + 3(g - K)$. Ist nun $w = o$, d. h. hat ein ebener Schnitt der S keine Wendepunkte, so folgt $r = 6n(n-2)$. Dieses scheint richtig, weil für jeden der $3n(n-2)$ Wendepunkte von C die erzeugende Gerade von S in die Ebene von C fällt und daher diese Ebene die *Knotenlinie berührt.* (Die Ebene der C berührt die Knotenlinie in den Wendepunkten der C; daher wird die S hier mit Wendepunkt sammt Wendungstangente geschnitten.) Die Formel $g(g-1) = K + 2d + 3r$ giebt nun

$$d = \frac{3}{2} n(n-2)(n+1)(3n-7)$$

als Grad der *Doppellinie* von S. Zieht man hievon die

$$\frac{3}{2} n(n-2)(3n^2 - 6n - 1)$$

Durchschnitte der Wendungstangenten von C ab, durch welche offenbar die Doppellinie geht, so bleiben noch

$$3n(n-2)(n-3)$$

Punkte übrig, in denen die Ebene der C die Doppellinie schneidet. Dieses sind die übrigen Punkte, in denen C von den Wendungstangenten geschnitten wird.

Ihre Sätze über die Evolute der C^n sind richtig. Der Satz über den Ort der Doppeltangenten eines B (C^n) ist mir noch zu schwer. Die Ortscurve der Brennpunkte der einem Dreiseit eingeschriebenen Kegelschnitte war mir bekannt; aber das Involutionsstrahlensystem haben Sie mir endlich verrathen. Den Satz über Brennpunktsdistanzen haben Sie in ihren gedruckten Schriften für das Vierseit ausgesprochen; aber ich meine von Ihnen mündlich gehört zu haben, dass er für drei einem Dreiseit eingeschriebene Kegelschnitte in allgemeinerer Form gelte. Zur Darstellung von Distanzen gebrauche ich ein Produkt von zwei dreizähligen [1]) Determinanten, worin die Coordinaten der gegebenen Punkte und überdiess noch diejenigen der zwei Grundpunkte aller Kreise vorkommen; aber selbst mit diesem Hülfsmittel konnte ich an den Brennpunktsdistanzen keine Relation herausbringen. — Sie haben gut gethan, einige der schwersten Aufgaben in Ihrem Briefe nicht anzustreichen, da sie wohl noch beträchtliche Zeit erfordern werden. — Wenn meine Angabe über eine gewisse Doppellinie Sie stutzig macht, so beruht dieses auf einem Missver-

[1]) Soll wohl heissen: dreizeiligen.

«ständniss, nämlich: alle Tangenten einer Vollcurve $C^{m\times n}$ bilden «eine abwickelbare Fläche vom Grade $r = mn\,(m+n-2)$; und «diese hat eine Doppellinie vom Grade $\frac{1}{2}r\,(r-4)$.

«Ich benutze den Raum des Papiers noch für einige Sätzchen.

«Wenn 3 Flächen m^{ten}, n^{ten}, p^{ten} Grades eine Vollcurve $C^{\alpha\times\beta}$ «gemein haben, so haben sie ausserdem noch «$mnp - \alpha\beta\,(m+n+p-\alpha-\beta)$ Durchschnittspunkte gemein.

«Wenn $m \geqq n \geqq p$, und es soll eine ebene Curve m^{ten} Grades «durch die np Durchschnittspunkte einer Curve n^{ten} und einer p^{ten} Gra- «des gelegt werden, so sind für jene höchste Curve von diesen Durch- «schnittspunkten $\frac{1}{2}(n+p-m-1)\,(n+p-m-2)$ nothwendig, «vorausgesetzt, dass $m \leqq n+p-3$ ist; sonst ist *keiner* nothwendig.

«Wenn $m \geqq n$, so dürfen auf einer Fläche F^n nur

$$\frac{1}{2}mn\,(m-n+4)+\frac{(n-1)\,(n-2)\,(n-3)}{2\cdot 3}$$

«beliebige Punkte gegeben werden, wenn eine freie f^m durchgehen soll.

«Wenn der Grad m nicht niedriger ist, als einer der Grade n «und p, und es soll durch Punkte einer Vollcurve $C^{n\times p}$, eine «Fläche F^m gelegt werden, so sind unter den Durchschnittspunkten «$\frac{1}{2}np\,(n+p-4)+1$ nothwendig, wenn $m > n+p-4$ ist; aber «nur $\frac{1}{2}np\,(n+p-4)+1-\binom{n+p-m-1}{3}$, wenn «$m \leqq n+p-4$ ist.

«Durch jede $C^{2\times 2}$ kann eine F^4 gelegt werden, deren Polynom «als Summe von vier Biquadraten darstellbar ist.

«Wird eine $C^{m\times n}$ von einem beliebigen Punkte aus auf eine «beliebige Ebene projicirt, so ist für die Projection $g = mn$, «$k = mn\,(m+n-2)$, $r = 0$, $w = 3mn\,(m+n-3)$, «$d = \frac{1}{2}mn\,(m-1)\,(n-1)$. Wenn aber der Mittelpunkt des «projicirenden Strahlenkegels der C^{mn} angehört, so gehen an g, k, «w, d, t resp. 1, 2, 3, $mn-2$, $2mn\,(m+n-2)-8$ Einheiten «verloren.

«Jede Tangente der $C^{m\times n}$ wird von $mn\,(m+n-2)-4$ «andern Tangenten geschnitten.

»Die Mahnungen am Schlusse Ihres Briefes will ich bald befolgen und danke Ihnen für die näheren Anweisungen. Da es bequemer ist, die Briefe nicht zu frankiren, so unterlasse ich es jetzt, aber dann dürfen auch Sie es nicht thun. Vom 19.—21. Apr. war ich an den Examen in Biel, vom 26.—29. muss ich an denen in Thun sein; Sie müssen sich daraus erklären, dass ich etwas unvollständig geantwortet habe, um bei den Arbeiten, die mir wegen der Examen obliegen, Sie nicht zu lange auf eine Antwort warten zu lassen. Ich bin diesen Augenblick ziemlich abgespannt und weiss Ihnen daher nichts zu berichten, als dass sich bis jetzt noch keine Studenten zu meinen Vorlesungen gemeldet haben.

»Unterlassen Sie es nicht, mir bald wieder zu schreiben, und genehmigen Sie die Versicherung der Hochachtung von

»Bern, den 23. April 1854. Ihrem dankbaren Schüler

L. Schläfli.«

Schläfli an Steiner.

»*Mein lieber Freund!*

»Da es Ihnen vielleicht dienlich ist, so beeile ich mich, Ihnen einige nähere Angaben über die Beziehung sämmtlicher *Cayley*'scher Strahlen zu Ihrem Fünfseit zuzusenden.

»Ich habe das Fünfseit sammt Axe auch analytisch behandelt und die Reduction bis zur Gleichung 3ten Grades fortgeführt, ungeachtet anfänglich die Fläche vom 8ten Grade zu sein scheint, weil die durch die Axe und jedes Eck des Fünfseits gelegten Ebenen noch dazu kommen.

»Ich bezeichne die fünf Seiten der Ordnung nach mit $a_1\ a_2\ a_3\ a_4\ a_5$, die Axe mit e. Durch die Punkte, in denen die Ebene $(a_3\ a_4)$ von den Strahlen a_1, e geschnitten wird, geht der Strahl b_1; durch die Punkte, in denen die Ebene $(a_1\ b_1)$ von b_5, b_2 geschnitten wird, geht c_1, u. s. f. Dann wird c_1 von c_3, c_4 geschnitten (ein *Satz!*), so dass $c_1\ c_3\ c_5\ c_2\ c_4$ ein neues Fünfseit ist. Durch die Punkte, wo die Ebene $(b_1\ e)$ von a_5, a_2, c_3, c_4 geschnitten wird, geht der Strahl d_1, u. s. f.; durch die Punkte, wo die Ebene $(a_2\ d_3)$ von a_5, c_3, c_4, d_5, d_2, d_4 geschnitten wird, geht $d_1{}^1$, u. s. f.; durch die Punkte endlich, wo die Ebene $(b_1\ d_1{}^1)$ von den übrigen Strahlen b und d^1 geschnitten wird, geht e^1. Also fünf a, fünf b, fünf c, zehn d oder d^1, zwei e, e^1, zusammen 27 Strahlen. Die Dreiseite sind: fünf $(a_3\ a_4\ b_1)$, fünf $(a_1$

„$b_1\ c_1$), fünf ($b_1\ c_5\ c_2$), zehn ($a_1\ d_5\ d'_2$), zehn ($c_1\ d_5\ d'_4$), zehn ($b_1\ d_1\ e$) „oder ($b_1\ d_1'\ e'$), zusammen 45. — Alle 12 zum Paar $e_1\ e'$ gehören„den Fünfseite ergeben sich durch Permutation der fünf Strahlen b; „ist z. B. $b_1\ b_2\ b_3\ b_4\ b_5$ die gewählte Permutation, so geht durch b_1, „b_3, b_4 die Seite a_1, durch $b_2\ b_4\ b_5$ die Seite a_2, u. s. f. ($b_2\ b_3\ b_1\ b_4\ b_5$) „giebt $a_4\ c_4\ c_1\ c_3\ a_3$ (fünf solche) ($b_2\ b_1\ b_3\ b_4\ b_5$) giebt $c_3\ c_5\ a_5\ a_4\ a_3$ (fünf „solche); endlich giebt ($b_1\ b_3\ b_5\ b_2\ b_4$) das einzige Fünfseit $c_1\ c_3\ c_5\ c_2\ c_4$.

„Mit der F^3 hängt auch folgender Satz zusammen, von dem ich „vergeblich einen elementaren Beweis gesucht habe.

„Durch einen Strahl a_1 gehen fünf beliebige Strahlen b_2, b_3, b_4, „b_5, b_6. Lässt man nun von diesen der Ordnung nach je einen weg, „so geht durch die 4 übrigen ausser a_1 immer noch ein Strahl, und „man erhält so die fünf Strahlen a_2, a_3, a_4, a_5, a_6. Nun kann durch „a_3, a_4, a_5, a_6 ausser b_2 noch ein Strahl gelegt werden; dann wird „dieser (b_1) von selbst auch durch a_2 gehen.

„Werden nämlich auf a_1 vier beliebige Punkte, und auf jedem „der durchgehenden Strahlen b_2, b_3, b_4, b_5, b_6 deren beliebige drei „gegeben, so ist durch alle 19 Punkte eine F^3 bestimmt, und man „erkennt sogleich, dass alle sechs Strahlen ganz darein fallen, u. s. f.

„Ich nenne dieses System von 2×6 *Cayley*'sche Strahlen, wo je „einer der einen Hälfte den gleichnamigen der andern nicht, aber „alle fünf übrigen schneidet, während die sechs Strahlen derselben „Hälfte sich nicht schneiden, — einen *Doppelsechser*. Die F^3 hat „deren 36. — Der gemeinschaftliche dritte Strahl der Ebenen ($a_1\ b_2$) „und ($a_2\ b_1$) heisse c_{12}. Man hat dann 30 Dreiseite ($a_1\ b_2\ c_{12}$) und „15 ($c_{12}\ c_{34}\ c_{56}$). Von den übrigen Doppelsechsern haben 20 die Form

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & c_{56} & c_{46} & c_{45} \\ c_{23} & c_{13} & c_{12} & b_4 & b_5 & b_6 \end{pmatrix}$$ und 15 die Form $$\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_{23} & c_{24} & c_{25} & c_{26} \\ a_2 & b_2 & c_{13} & c_{14} & c_{15} & c_{16} \end{pmatrix}$$

„Jeder Doppelsechser enthält 20 Hyperboloide (Doppeldreier), und „jedes Hyperboloid ist zweien Doppelsechsern gemein.

„Die 40 Gruppen von je drei Triederpaaren theilen sich in Be„ziehung auf den gegebenen Doppelsechser in zwei Haufen.

„Der erste Haufen enthält 10 Gruppen wie

c_{12}	b_2	a_1
a_2	c_{23}	b_3
b_1	a_3	c_{13}

c_{45}	b_5	a_4
a_5	c_{56}	b_6
b_4	a_6	c_{46}

c_{14}	c_{25}	c_{36}
c_{26}	c_{34}	c_{15}
c_{35}	c_{16}	c_{24}

ıd 30 Gruppen wie

a_3	b_5	c_{35}
b_6	a_4	c_{46}
c_{36}	c_{45}	c_{12}

a_5	b_1	c_{15}
b_2	a_6	c_{26}
c_{25}	c_{16}	c_{34}

a_1	b_3	c_{13}
b_4	a_2	c_{24}
c_{14}	c_{23}	c_{56}

»Jede Gruppe des ersten Haufens entspricht einer Theilung der echs Zeiger in zwei Hälften wie (123, 456); und je zwei Gruppen les zweiten Haufens (die sich nur durch Perm. von a, b unterscheiden) einer Theilung in drei Paare wie (12, 34, 56). — Die ünfseite ordnen sich so: Zu $a_1\ b_1$ gehören 12 wie $c_{24}\ c_{35}\ c_{46}\ c_{52}$ $_{63}$, zu $a_1\ a_2$ 12 wie $c_{35}\ a_5\ c_{45}\ a_4\ c_{46}$, zu $a_1\ c_{23}$ sechs wie $a_5\ c_{35}\ c_{26}$ $_{34}\ c_{25}$ und sechs wie $c_{35}\ a_5\ b_1\ a_6\ c_{24}$; zu $c_{12}\ c_{13}$ sechs wie $c_{15}\ a_5$ $_4\ a_6\ b_5$ und sechs wie $b_4\ a_5\ c_{15}\ c_{23}\ c_{14}$.

»Wie gefällt Ihnen dieser Doppelsechser? 12 Strahlen bilden ein an 6 Stellen schadhaftes Gitter, jeder der 15 übrigen entspricht zweien Maschen derselben.

»Haben Sie so etwas unter dem Systematisiren verstanden? In der Hoffnung einer baldigen Antwort bezeugt Ihnen hiemit seine Hochachtung

Ihr dankbarer Schüler

L. Schläfli.«

Bern, den 2. Mai 1854.

Schläfli an Steiner.

»*Hochgeschätzter Freund und Lehrer!*

»Was jene bornirte Curve vierten Grades mit drei Doppelpunkten betrifft, wo zugleich jeder von einem Doppelpunkt ausgehende Strahl von der Gegenseite des Doppelpunktendreiecks in Beziehung auf die zwei übrigen Durchschnittspunkte der Curve harmonisch getheilt wird, so folgt daraus nothwendig, dass jede Doppelpunktstangente zugleich Wendungstangente ist, dass also hier jeder Doppelpunkt *acht* Wendepunkte verschlingt, was die volle Zahl 24 giebt. Diese auf der Hand liegende Bemerkung habe ich das letzte Mal zu machen vergessen.

»In Betreff der *Cayley'schen* Geraden auf der Fläche dritten Grades habe ich einstweilen Folgendes gefunden. Denkt man sich

»einen durch zwei Ebenendreier bestimmten Flächenbüschel dritten »Grades, und wählt eine einzelne Fläche $f = x\,y\,z + \lambda tuv$ heraus, so »zählen die 6 Ebenen x, y, z, t, u, v für 18 Data und der Coeffi»cient λ für eines, zusammen 19. Folglich kann jede freie Fläche »dritten Grades auf diese Weise erzeugt werden. (Man hat freilich »so erst 9 in der Fläche liegende Geraden). Wird der Scheitel des »einen Ebenendreiers als Pol genommen, so ist seine Polarfläche ein »Kegel zweiten Grades, der durch die Kanten des andern Ebenen»dreiers geht. Die in der Fläche liegende Gerade (x t) z. B. werde »von den Ebenen y, z in B, C und von den Ebenen u, v in E, F ge»schnitten; dann seien P, Q die Asymptotenpunkte des von jenen »zwei Punktpaaren bestimmten involutorischen Systems (oder B C P Q »und E F P Q harmonisch); so wird die Kernfläche (vierten Grades) die »Gerade (xt) in P und in Q berühren. Wird P als Pol genommen, so »ist Q der Scheitel des Polarkegels; dieser geht durch die Gerade »(xt) und durch die Gerade, welche von Q ausgehend die Kanten (yz) »und (uv) schneidet. — Liegt ausser den erwähnten 9 Geraden noch »irgend eine Gerade auf der Fläche, so muss sie durch drei von den »schon bekannten Geraden, wie z. B. durch (xt), (yu), (zv), gehen, »also auf der durch (xt), (yu), (zv) bestimmten Fläche zweiten Grades »liegen. Die Rechnung zeigt nun wirklich, dass diese Fläche die $f^{(3)}$ »noch in 3 neuen Geraden schneidet. Da es aber im Ganzen 6 solche »Combinationen, wie (xt), (yu), (zv), giebt, so bekömmt man $6 \times 3 =$ »18 neue Geraden; im Ganzen $9 + 18 = 27$.

»Die freie Fläche dritten Grades enthält also 27 Geraden. Wird »eine Transversalebene um eine solche Gerade herumgedreht, so »schneidet sie die $f^{(3)}$ im Allgemeinen noch in einem Kegelschnitt; »dieser erscheint aber im Besondern *fünfmal* als Geradenpaar. Es »giebt also 45 ebene Schnitte, welche Dreiseite sind. Die zwei »Punkte, welche jene Gerade mit dem Kegelschnitt der um sie sich »drehenden Schnittebene gemein hat, bilden ein *Involutionssystem*, »in dessen Asymptotenpunkten P, Q die Kernfläche (4) von jener Ge»den berührt wird [1]).

Schläfli an Steiner.

»*Mein lieber Freund!*

»Um den Briefwechsel nicht zu lange zu unterbrechen, schreibe »ich Ihnen hier nur über einige wenige Fragen Ihres letzten Briefs.

[1]) Hier bricht der Brief ab, die Unterschrift fehlt.

leren Beantwortung aber mehr Arbeit gekostet hat, als Sie wohl gelacht haben werden. Wie ich hintenher erkenne, hätte ich freilich durch etwas mehr synthetische Ueberlegung an Zeit ersparen können.

«Was vorerst die Frage auf dem kleinen Papierstreifen betrifft, so liegen die sechs Scheitel je dreier zusammengehöriger Triederpaare nicht in einer Ebene. Dieser Dreier veranlasst mich zu einer Bemerkung: wenn man nämlich aus jedem Paare nur ein Trieder nimmt, so hat man eine Gruppe von 9 Ebenen, welche die F^3 in den 27 Geraden schneidet; es giebt also 320 solche Gruppen; zur wirklichen Bestimmung der Cayley'schen Geraden käme aber alles darauf an, eine durchgehende Fläche neunten Grades zu finden, d. h. die 220 Coefficienten ihrer Gleichung aus den 20 Coefficienten der gegebenen Gleichung der F^3 auf rationalem Wege herzuleiten. So lange dieses nicht gethan ist, sind auch die 27 Geraden nicht gefunden.

«Die Bedingungen für die hyperbolische Eigenschaft einer jeden reellen Geraden der F^3 können zwar, wenn schon ein Triederpaar bekannt ist, ziemlich einfach ausgedrückt werden, sind aber unter sich verschieden; und ich erkenne einstweilen zwischen denselben keinen andern Zusammenhang, als den, welchen Sie selbst schon ausgesprochen haben. Die Frage hängt mit derjenigen nach der Realität der Geraden nicht zusammen. Ich werde übrigens auf diesen Gegenstand noch ferner Acht geben.

«Die Classification hingegen der reellen Flächen dritten Grades in Beziehung auf die Anzahl ihrer reellen Geraden ist mir vollständig gelungen, und ich freue mich Ihnen hierüber sichern Bericht geben zu können. Die Gränzfälle, in denen die Fläche aufhört frei zu sein, sind hier ausgeschlossen; nach dem gleichen Eintheilungsgrunde würde ich z. B. nur zwei Gattungen von Flächen zweiten Grades annehmen. — Die Fläche dritten Grades zählt nur fünf Gattungen.

«A. Alle 27 Geraden und 45 Ebenen sind reell. (27 G, 45 E.)

«B. 15 G, 15 E. Die 12 imaginären Geraden bilden einen Doppelsechser

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 & a_6 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 & b_5 & b_6 \end{pmatrix}$$

wo je eine Gerade der einen Reihe der Zugeordneten der andern Reihe conjugirt ist, wesshalb keine der imaginären Geraden einen reellen Punkt haben kann. Durch je zwei Paare zugeordneter Strahlen

»(wie $a_1 b_2$, $a_2 b_1$) geht ein reeller (c_{12}), und so oft sich die 6 »Zeiger in drei Paare abtheilen lassen, hat man ein reelles Dreiseit »(wie c_{12}, c_{34}, c_{56}), ihre Zahl daher 15. Durch jede reelle Gerade »gehen 3 reelle und zwei imaginäre Ebenen.

»C. 7 G, 5 E. Durch eine bestimmte reelle Gerade gehen 5 »reelle Ebenen, von denen aber nur 3 auch vollkommene Dreiseite ent»halten; die 2 andern haben mit der Fläche ausser jener Geraden jede »nur noch einen isolirten Berührungspunkt gemein, wo sich zwei »conjugirte Seiten schneiden.

»D. 3 G, 13 E. Ein einziges reelles Dreiseit, durch dessen jede »Seite noch vier reelle Ebenen gehen, also 12 Paare conjugirter Ge»raden, die sich schneiden.

»E. 3 G, 7 E. Ein einziges reelles Dreiseit, durch dessen jede »Seite nur noch zwei reelle Ebenen gehen, also 6 Paare conjugirter »Geraden, die sich schneiden.

»Diese Aufzählung erschöpft. Vielleicht interessirt es Sie, zu »sehen, wie diese Gattungen mit den Formen der Triederpaare zu»sammenhängen. Es seien u, v, w die Polynome des einen, x, y, z die »des andern Trieders; sie zählen für 18 Data; giebt man das 19te Datum, »den Factor, der beide Trieder verbindet, einem der Polynome, so kann »die F^3 durch die Gleichung $u\,v\,w + x\,y\,z = 0$ dargestellt werden. »Die Polynome können aber reell oder imaginär sein; und es frägt »sich, welche Formen dieser Gleichung sind unter der Voraussetzung »einer reellen Fläche überhaupt möglich. Die Antwort auf diese Frage, »die auf den ersten Blick ebenso schwierig erscheint, als die Be»stimmung der 27 Geraden selbst, ist in folgender erschöpfender Auf»zählung enthalten.

I. u, v, w, x, y, z reell.

II. u mit x, v mit y, w mit z conjugirt.

III. u, v, w, x reell, y mit z conjugirt.

IV. u, x reell, v mit w, y mit z conjugirt.

V. u, x reell; die imaginären Ebenen v, w haben jede ihren reellen Strahl in x, ebenso haben die imaginären y, z ihre reellen Strahlen in u.

VI. u, x reell; nur u wird von y, z in reellen Strahlen geschnitten; x von v, w bloss in conjugirten.

VII. u, x reell; aber weder u noch x haben ein reelles Dreiseit.

VIII. u mit x conjugirt; v hat mit y, w mit z einen reellen Punkt gemein.

IX. Nur u ist reell und schneidet x in einem reellen, y, z in conjugirten Strahlen; und nur y hat auch noch mit jeder der Ebenen v, w einen reellen Punkt gemein.

X. Keine Ebene reell und keine zwei conjugirt (wie bei allen folgenden Formen); u hat mit x einen reellen Punkt, v mit y einen reellen Strahl, und w mit z einen reellen Strahl gemein.

XI. Jede Ebene des einen Trieders hat mit jeder des andern einen reellen Punkt gemein.

XII. u hat mit x einen reellen Punkt gemein, überdiess u mit y, u mit z, x mit v, x mit w.

XIII. u hat mit x einen reellen Punkt gemein, v mit y und w mit z.

Ich nenne zwei Formen aequivalent, wenn jede in die andere transformirt werden kann. So sind II, V äquivalent und finden sich in den Gattungen B und C; IV, VI, VIII in C und E; III, VII in D und E; IX, XII, XIII nur in E. Isolirt sind die Formen I in A und B; X in C, XI in D. — Diese Formen von Triederpaaren kommen zu Dreiern vereinigt in den verschiedenen Flächengattungen in folgender Weise vor:

A hat 40 Dreier (I. I. I);

B hat 10 (I. II. II) und 30 (V. V. V);

C hat 4 (II. II. IV), 12 (V, VIII. VIII) und 24 (VI. X. X);

D hat 16 (III. XI. XI) und 24 (VII. VII. VII);

E hat 2 (IV. IV. IV), 4 (III. XIII. XIII), 6 (VII. VIII. VIII), 12 (VI. XII. XII) und 16 (IX. IX. IX).

Die Triederpaarformen X bis XIII hätten, wie ich eben einsehe, etwas schärfer definirt werden sollen, es hätte angegeben werden sollen, wenn drei reelle Punkte in einer Geraden liegen.

Was Sie über den Durchschnitt R der Basis f^m mit ihrer zweiten Kernfläche $Q^{4(m-2)}$ anführen, ist alles richtig. Wenn Q die Curve R durchläuft, so beschreibt P eine Curve $6m(m-2)^2$ten Grades. Dass t die Fläche $P^{4(m-2)^2}$ zweipunktig berührt, ist ganz natürlich, weil die Berührungsebene der f^m in Q zugleich die Fläche P in P berührt; aber ich glaube durchaus nicht, dass sie die Curve $P^{6m(m-2)^2}$ berührt. Wenn dieses für $m = 3$ eintreffen sollte, so müsste die Tangente der R in Q eine erzeugende Gerade des Polarkegels von P sein, was ich nicht glaube. Die Fläche $t^{2m(m-2)(3m-4)}$ ist eine *abwickelbare*: aber ihre Bindecurve ist mir auch für $m = 3$ noch unbekannt. Wenn auf der f^m ein Punkt R^1 unendlich nahe bei dem in R befindlichen Punkt Q liegt, so schneiden sich die Be-

«rührungsebenen der f in Q und Q^1 immer in der Rückkehrtangente t, «nach welcher Richtung auch Q^1 abweichen mag. Für $m = 3$ hat «der Polarkegel von P nichts mit t zu thun; jener kann diesen «Strahl t nur dann enthalten, wenn P in die Fläche f^3 fällt. Die t «kann im Allgemeinen nicht Tangente der R sein, sie wird es nur «für die 54 Asymptotenpunkte. Die P^{18} geht einfach durch die 54 «Asymptotenpunkte. Ich denke, der Schnitt von t^{30} mit q^4 besteht «aus $R^{12} + 2\ P^{18} + S^{72}$, und diese S muss allerdings durch die 54 π «gehen. Die Schmiegungsebene der R^{12} ist kein leichter Frass! — (Basis «f^m) Q beliebig auf der zweiten Kernfläche $q^{4(m-2)}$. Die Berührungs- «ebene der Kernfläche q in Q ist zugleich Berührungsebene der zweiten «Polarfläche von P in diesem Punkt Q. — Ich erstaune, dass Sie «mittelst der abwickelbaren Fläche t^{30} die 27 Geraden wirklich con- «struirt haben. Denn es ist klar, dass die Gleichung der t^{30} auf rationalem «Wege gefunden werden kann; wenn man dann aus (f^3, t^{30}) und «(f^3, q^4) eine Coordinate eliminirt, so ist jene Resultante durch den «Cubus von dieser theilbar, und der Quotient das Quadrat des Productes «aller 27 Geraden. Ob man vielleicht von hier aus zu der sehnlich «gewünschten Gleichung des 9ten Grades gelangen kann. — Was ich «von einer f^7 geschwatzt habe, weiss ich nicht mehr; von zwei Grund- «punkten eines Kreis*büschels* habe ich nie gesprochen, wohl aber von «den zwei festen allen Kreisen gemeinschaftlichen Punkten. Ich werde «trachten, mit den rückständigen Sachen aus Ihren beiden Briefen «noch vollends aufzuräumen.

«Uriaszettel gezeigt. *Ris* bei Anfang des Semesters als Rector «mit Geschäften beladen, trägt mir den Gruss auf und verspricht Ihnen «etwas später zu schreiben. Sende an Crelle tom. I der ∞^n und «bitte Sie allenfalls bei ihm zu speichen[1]). Wenn Sie aber Berlin ver- «lassen, wünsche Ihre Adresse zu wissen und bitte überhaupt recht «bald zu antworten. — Nach Wien etwas zu schicken (über Resultante «u. nothwendige P^n bei Flächen) wird wohl vergeblich sein; dem «Liouville werde schicken, sobald der Bernhardiner etwas frei ge- «worden. 113 — 113 = 0.

«Mit freundlichem Gruss

«*L. Schläfli.*

«Muzzopoli il 23 Majo 1854.»

---

[1]) Zu sorgen, dass Crelle vorwärts macht!

Schläfli an Steiner.

«*Mein lieber Freund!*

«Es thut mir leid, dass Sie sich die vergebliche Mühe genommen haben, zweimal über denselben Gegenstand zu schreiben. Bei der grossen Eile, die mich drängte, Ihnen zu antworten, habe ich einiges unbeantwortet gelassen, was ich jetzt nachholen will. (Bei Ihrem Brief vom 30. April war es die Frage, ob vielleicht die 6 Scheitel des Triederpaardreiers in einer Ebene liegen, die mir zuerst auffiel und mich fast rasend machte (7.—13. Mai), weil die algebraische Entwicklung in's Aschgraue gieng, bis ich mich endlich zu einer numerischen Untersuchung entschloss, welche entschieden negativ ausfiel. Dann sprach mich die Eintheilung der F^3 nach Gattungen hinsichtlich der Realität ihrer Geraden besonders an und dauerte 14.—21. Mai; mein anfänglicher Plan war zu weit angelegt weil ich sicher sein wollte, alles zu erschöpfen; ich habe jetzt freilich einige Andeutungen, dass einfache synthetische Betrachtungen hinreichen mögen, um sich zu überzeugen, dass es nur die erwähnten fünf Gattungen giebt; aber bei meinem Verfahren machten mir z. B. quadratische Gleichungen mit imaginären Coefficienten viel zu schaffen, wie auch, da ich nur mit Triederpaaren operieren konnte, die grosse Mannigfaltigkeit ihrer denkbaren Formen, bis endlich die bemerkte Aequivalenz einiger derselben mir aus der Noth half.) — In Zukunft möge es als Bestätigung gelten, wenn ich eine Ihrer Aussagen nicht wiederhole; aber das, was ich noch nicht untersucht habe, werde ich erwähnen. — Hinsichtlich der $R^{4(n-2)n}$ zeigt, wie ich glaube, die Anschauung, dass, da wo die hyperboloidische Beschaffenheit der f^n in die ellipsoidische übergeht, also conisch oder wenn man will cylindrisch wird, einmal die Rückkehrkante t (gleichsam erzeugende Gerade des Cylinders) eine abwickelbare Fläche beschreibt, zweitens im Allgemeinen nicht mit der Tangente der R zusammenfällt, dass vielmehr wenn dieses geschieht, der Rückkehrpunkt in einen Selbstberührungspunkt ausartet; ist Q ein solcher Punkt, so geht dann die *dritte* Polarfläche des conjugirten Pols P durch diesen Q; und es giebt $2n(n-2)(11n-24)$ solche Punkte auf der f^n. Wie die Fläche f^n aussieht, da wo beide Zweige des Selbstberührungspunkts conjugirt imaginär sind und sich nur in einem reellen Punkt berühren, weiss ich nicht anzugeben. — $Fl.^4$, einem Dreiseitsschnitt der f^3 zugeordnet, Ort des Scheitels L eines Kegels ^{2},

«der die f^6 in drei Kegelschnitten, deren Ebenen durch die Seiten «des $\underline{\Delta}$ gehen, schneidet, schneidet diese Ebene $\underline{\Delta}$ in derselben C^4 «wie die Kernfläche. Da nun diese C^4 die Diagonalen (Seiten des $\underline{\Delta}$) «eines Vierseits in dessen 6 Ecken berührt, so müssen die 4 übrigen «Durchschnitte der C^4 und des Vierseits in einer *Geraden* liegen. «Fällt L in einen solchen Durchschnitt, so berührt der Kegel die «Ebene $\underline{\Delta}$ längs der Seite des Vierseits. Fällt aber L in ein Vierseits- «eck π, so degenerirt der Kegel in die Ebene $\underline{\Delta}$ und die Ebene, «welche f^3 in π berührt; heisst a die $\underline{\Delta}$seite, worauf die Zugeord- «neten π, π^1, b, c die zwei übrigen, so ist der durch a gehende «Kegelschnitt der, welcher a in π berührt; der durch b gehende ist «$a + c$, der durch c gehende $a + b$, und der Durchschnitt ihrer (mit «$\underline{\Delta}$ zusammenfallenden) Ebenen ist die vom Eck (bc) nach π gehende «Gerade. — Wenn Q diese C^4 durchläuft, so beschreibt der conjugirte «P eine Theilcurve R^6, welche die Ebene $\underline{\Delta}$ in den 6 π schneidet. «— Vielleicht ist der Grad der mit $R^{4n(n-2)}$ conjugirten Curve im «letzten Brief unter die Oblate[1]) gekommen; sie ist eine $P^{6n(n-2)^2}$.

«— *Normalen aus A auf die f^n.* R^{n^2-n+1} Ort des Pols P, dessen «Polarebene auf der Geraden AP senkrecht steht. Durch diese geht «eine Doppelschaar von Flächen n^{ten} Grades, worunter eine A zum «Knotenpunkt hat und durch die $(n-1)^3$ ersten Grundpolarpunkte «der unendlich entfernten Ebene geht. Bei der f^2 geht durch die R^3 «unter anderm auch ein Kegel ^{2}, worin die drei Hauptaxen der f^2 «liegen. Die R^3 hat drei den Hauptaxen parallele Asymptoten; es «seien A, B, C die Längen der Hauptaxen des Ellipsoids, a, b, c die «auf diese bezogenen Coordinaten des Punkts A, von wo die Normalen «ausgehen; dann sind die Gleichungen der mit der Axe A (oder x) «parallelen Asymptote:

$$y = \frac{B^2}{B^2 - A^2}\, b, \qquad z = \frac{C^2}{C^2 - A^2}\, c.$$

«(Dass die R^{n^2-n+1} durch A geht und ihre Tangente hier auf «der Polarebene von A senkrecht ist, versteht sich von selbst.) Beim «Paraboloid geht die R^3 einfach durch den Berührungspunkt der un- «endlich entfernten Ebene, die entsprechende Asymptote ist die Haupt- «axe selbst. Ueber die zwei andern Asymptoten bin ich im Unklaren; «wenn $2x = \frac{y^2}{p} + \frac{z^2}{q}$ die Gleichung der Fläche ist, so bekomme ich

---

[1]) D. h. Schläfli hat ihn nicht lesen können.

»für die mit der Axe der y parallelen Asymptote nur eine Gleichung,
»nämlich x=a—p, und für die mit der Axe der z parallele: x=a—q;
»wo die Abscisse a des Punkts A sich auf den Scheitel des Parabo-
»loids bezieht. (Doch wahrscheinlich für jene noch $z = \frac{qc}{q-p}$ und
»für diese noch $y = \frac{pb}{p-q}$.) Für die Umdrehungsfläche ^{2} reducirt
»sich die R^3 auf einen in der Meridianebene von A befindlichen Kegel-
»schnitt und die unendlich entfernte Gerade einer zur Axe senkrechten
»Ebene, für die Kugel auf die von A nach dem Centrum gehende
»Gerade, der Rest unbestimmt in der unendlich entfernten Ebene. —
»Die Projectionen der R^3 auf die Hauptebenen der f^2 sind gleichseitige
»Hyperbeln.

»*Eine räumliche Curve* scheint mir am allgemeinsten dargestellt
»zu werden, wenn man n Gleichungen von allerlei Graden, homogen
»in Beziehung auf n—1 zu eliminirende Grössen λ, μ etc. setzt, dann
»erst jeder von diesen einen beliebigen impliciten Dimensionswerth
»beilegt und nun statt der Coefficienten allerlei homogene Polynome
»in x, y, z, w (räumlichen Coordinaten) von allerlei Graden, doch so,
»dass wenn neben diesen dem angenommenen impliciten Dimensions-
»werth einer jeden der λ, μ, ... auch Rechnung getragen wird, alle
»Glieder einer und derselben Gleichung neuerdings dieselbe Dimen-
»sion erhalten. Wäre z. B. $[x^2 + 5xy + \text{etc.}]\ \lambda^p \mu^q$ ein Glied einer
»Gleichung, so wäre diese in Beziehung λ, μ, ... allein homogen und
»vom Grade $p + q$, aber, wenn man λ, μ, ... die impliciten Dimen-
»sionen α, β, ... beigelegt hat, in Beziehung auf x, y, ... λ, ...
»zusammen von der Dimension $2 + \alpha p + \beta q$, und diese Zahl müsste
»für alle Glieder der Gleichung dieselbe sein. Lässt man aus dem
»System eine Gleichung weg, so entspricht der Resultante der übrigen
»eine Fläche. Da aber nicht jede Lösung, welche zwei solche Re-
»sultanten annullirt, eo ipso auch dem ganzen Systeme genügt, so wird
»der Durchschnitt der ihnen entsprechenden Flächen mehr als die
»wahre Theilcurve R des Systems enthalten. Am durchsichtigsten
»wird die Sache, wenn wir alle Gleichungen in Beziehung auf λ, μ, ...
»linear annehmen; ich schreibe in diesem Falle die Polynome = Co-
»efficienten von λ, μ, ... in einer und derselben Gleichung in eine
»Verticalzeile und erhalte ein rechteckiges Schema mit n Verticalzeilen
»(Zahl der Gleichungen) und n—1 Horizontalzeilen (Zahl der λ, μ, ...
»deren Verhältnisse zu eliminiren sind). Wenn ich nun im Schema

«statt der Polynome in x, y, z, w bloss ihre Grade hinschreibe und «so das Schema

$$\begin{Vmatrix} a_1+b_1 \,.\, a_2+b_1 \,.\, a_3+b_1 \ldots\ldots a_n+b_1 \\ a_1+b_2 \,.\, a_2+b_2 \,.\, a_3+b_2 \ldots\ldots a_n+b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_1+b_{n-1} \,.\, a_2+b_{n-1} \,.\, a_3+b_{n-1} \ldots a_n+b_{n-1} \end{Vmatrix}$$

«erhalte, dann die Summe der Zahlen $a_1, a_2, \ldots a_n$ mit A_n, der $b_1, b_2, \ldots$ «b_{n-1} mit B_{n-1} und die Summe der binären Produkte mit $\mathfrak{A}_n$, $\mathfrak{B}_{n-1}$ «bezeichne, so ist der Grad der Curve R: $\mathfrak{A}_n + A_n B_{n-1} + B^2_{n-1} - \mathfrak{B}_{n-1}$. «Wenn im Schema eine Constante statt eines Polynoms vorkommt, so «ist dieses so viel, als wenn man die betreffende Horizontal- und Verti«calzeile durchstriche; denn so kann dann das Schema reducirt werden. «Lücken scheinen Beschränkungen mitzubringen, z. B. Zerfallen der «Curve in zwei. Für die paar ersten Grade hat man folgende Schemate:

$R^3 \begin{Vmatrix} 1\,.\,1\,.\,1 \\ 1\,.\,1\,.\,1 \end{Vmatrix}$; $R^4 \begin{Vmatrix} 2\,.\,2 \end{Vmatrix}$; $R^5 \begin{Vmatrix} 1\,.\,1\,.\,2 \\ 1\,.\,1\,.\,2 \end{Vmatrix}$; $R^6 \begin{Vmatrix} 2\,.\,3 \end{Vmatrix}$ u. $\begin{Vmatrix} 1\,.\,1\,.\,1\,.\,1 \\ 1\,.\,1\,.\,1\,.\,1 \\ 1\,.\,1\,.\,1\,.\,1 \end{Vmatrix}$;

$R^7 \begin{Vmatrix} 1\,.\,1\,.\,3 \\ 1\,.\,1\,.\,3 \end{Vmatrix}$ u. $\begin{Vmatrix} 1\,.\,1\,.\,1 \\ 2\,.\,2\,.\,2 \end{Vmatrix}$; $R^8 \begin{Vmatrix} 2\,.\,4 \end{Vmatrix}$ u. $\begin{Vmatrix} 1\,.\,2\,.\,2 \\ 1\,.\,2\,.\,2 \end{Vmatrix}$. Lassen Sie mich

«Ihren fünf geometrischen Grundgebilden als VI^tes die Fläche erster «Classe, den Punkt mit allen durchgehenden Ebenen, als *Ebenenbusch* «hinzufügen und zwei solche Büsche *perspectivisch* nennen, wenn sie «irgend eine feste Ebene in denselben Geraden schneiden, *projectivisch* «wenn sie aus dieser gegenseitigen Lage verrückt sind. Dann sagt «das Schema der R^3, 1° dass sie durch drei projectivische Ebenen«büschel erzeugt wird, 2° dass wenn durch zwei feste Punkte A, B «der R^3 und jeweilen durch dieselbe veränderliche Sehne der R^3 die «zwei Ebenen a, b gelegt werden (a durch A und die Sehne), die so «gebildeten Ebenenbüsche A und B projectivisch sind; jeder Punkt «der R^3 ist Scheitel eines Kegels ^{2}, der durch sie geht. — Die R^5 «entsteht nach dem Schema aus projectivischen zwei Ebenenbüscheln «und einem Flächenbüschel ^{2}; sie kann daher sowohl als Durchschnitt «einer f^2 und f^3 mit Weglassung einer Geraden, wie auch als Durch«schnitt zweier f^3 mit Weglassung einer $R^4 \| 2\,.\,2 \|$ gefasst werden; «das Zerfallen dieser letzten scheint mir etwas Spezielles. Wie Sie «eine R^5 construiren, durch die keine f^2 geht, vermag ich nicht zu «errathen. Die durch meine R^5 gehende f^2 ist einzig, nämlich die «durch die zwei projectivischen Ebenenbüschel bestimmte, und alle «ihre Geraden γ, welche mit den Axen dieser Büschel zur gleichen

·Schaar gehören, schneiden die R^5 in drei Punkten; durch jeden ·Punkt der R^5 scheinen aber noch andere Geraden von dieser Eigen·schaft zu gehen (vielleicht 4 ?). — $(f^2, f^3) = g + R^5$; die R^5 soll ·feststehen, so ist auch f^2 fest; g kann diese durchlaufen: aber ich ·halte für jetzt g fest, nehme zu f^2 eine beliebige Ebene E hinzu, ·um mit der f^3 einen Büschel ^{3} zu bestimmen; wenn ich nun aus ·dem Büschel eine f_1^3 herausnehme, so habe ich sie mit 4-facher ·Freiheit gewählt; eine *Cayley*'sche Gerade, die g nicht schneidet, ·bewegt sich also mit 4-facher Freiheit, d. h. kann mit jeder beliebig ·gegebenen Geraden zusammenfallen; da die g selbst eine einfache ·Bewegung hat, so ist die durch R^5 gehende f^3 *fünffach* unbestimmt. ·Sie können also zu der R^5 jede Gerade l, welche Sie wollen, hinzu·nehmen, und dann auf die angegebene Weise eine f^3 erzeugen. — ·Dass mein ganzer hier angelegter Plan noch Stümperei ist, ersehe ·ich aus Ihrer R^4, in welcher die f^3 von jedem durch zwei sich nicht ·schneidende *Cayley*'schen Geraden gelegten Hyperboloid geschnitten ·wird; sie passt nicht in die Form $\| 2 . 2 \|$, weil kein anderes Hyper·boloid durchgeht; Sie sehen dieses aus dem speziellen Falle, wo ·diese R^4 sich in eine *Cayley*'sche Gerade verwandelt, die von drei ·andern unter sich freien *Cayley*'schen Geraden geschnitten wird. Ich ·kann bis jetzt diese R^4 nur als eine R^5, aus der vermöge einer be·sondern Abhängigkeit der Hülfspolynome eine Gerade sich ablöst, ·darstellen. — Auf mein Schema der Theilcurve R^6 passt nur $(f^3, f_1^3) = R_1^3 + R^6$. Sie wird erzeugt durch 4 projectivische Ebenenbüsche, wenn man dieselben durch die Bedingung, dass je 4 entsprechende Ebenen einen Punkt P gemein haben, zu einfachen Schaaren degradirt; der Punkt P beschreibt dann die R^6. Was Sie von den Geraden anführen, welche die R^6 in drei Punkten schneiden, habe ich noch begriffen; für meine R^6 halte ich es im Allgemeinen für ·unstatthaft; denn wenn der erste Durchschnittspunkt A gegeben ist, erhalte ich als Ort des zweiten eine von A ausgehende Gerade, von der ich nicht einzusehen vermag, dass sie die R^6 noch einmal trifft.

·Die $R^3 \begin{vmatrix} 1.1.1 \\ 1.1.1 \end{vmatrix}$ ist durch 12, die $R^4 \,|2.2|$ durch 16, die $R^5 \begin{vmatrix} 1.1.2 \\ 1.1.2 \end{vmatrix}$ durch 21, die $R^6 \,|2.3|$ durch 24, die $R^6 \begin{vmatrix} 1.1.1.1 \\ 1.1.1.1 \\ 1.1.1.1 \end{vmatrix}$ durch 27 Data, die $R^7 \begin{vmatrix} 1.1.1 \\ 2.2.2 \end{vmatrix}$ durch 28, die $R^7 \begin{vmatrix} 1.1.3 \\ 1.1.3 \end{vmatrix}$ durch 32

«Data bestimmt. Ein einfaches Datum wäre etwa eine Gerade, die von «der R geschnitten werden soll; ein gegebener Punkt zählt für 2 Data; «aber es dürfen im Allgemeinen nicht lauter Punkte gegeben werden.

«Die f^8 kann durch das Schema $\begin{vmatrix} 1.1.1 \\ 1.1.1 \\ 1.1.1 \end{vmatrix}$ dargestellt werden und «enthält vermöge desselben eine Doppelschaar von R^3 und noch eine «davon geschiedene; die f^8 wird demnach erzeugt durch 3 projec- «tivische Ebenenbüsche. Da das Schema mit Rücksicht auf Trans- «formation nur 19 Data zählt, so ist seine f^8 die allgemeine. Es «seien auf der f^8 die Punkte A, B, C, P, P^1, P^{11}, P^{111} und noch 12 «andere gegeben; man beabsichtigt A, B, C zu Centren projectivischer «Büsche zu machen. Die 4 durch AP, AP^1, AP^{11}, AP^{111} gehenden Ebenen «des Busches A ermangeln noch jede einer Bestimmung, u. s. f.; es sind «also im Ganzen noch 12 Data unbekannt; diese werden durch die «12 übrigen Punkte just bestimmt. Da nun die Projectivität zweier «Büsche durch 4 Ebenen in jedem festgesetzt wird, so kann man «von jetzt an so viele Punkte der f^8 construiren als man will. Das «Triederpaar $uvw + xyz = o$ ist in diesem Schema begriffen, näm- «lich als $\begin{vmatrix} \cdot & u & x \\ y & \cdot & v \\ w & z & \cdot \end{vmatrix}$. Das Schema $\begin{vmatrix} 1.1.1.1 \\ 1.1.1.1 \\ 1.1.1.1 \\ 1.1.1.1 \end{vmatrix}$, welches die f^4 geben «sollte, zählt leider nur 33 Data statt 34; dieses Schema enthält aber «eine dreifache Schaar von R^6 und noch eine solche; die freie f^4 «aber wahrscheinlich nicht.

«Es sei P ein Pol, dessen x^{te} Polare in Beziehung auf C^m einen «Doppelpunkt Q hat, so sind die Grade der Orte von P und Q resp. «$3x(m-1-x)^2$ und $3x^2(m-1-x)$; für Flächen $4x(m-1-x)^3$ «und $4x^8(m-1-x)$. — Die Orts $\left.\begin{matrix}\text{curve}\\ \text{fläche}\end{matrix}\right\}$ Q hat mit der $(x+1)^{ten}$ Po- «lare von P Punkt und $\left.\begin{matrix}\text{Tangente}\\ \text{Ber. Eb.}\end{matrix}\right\}$ gemein, diejenige von P mit der «$(m-x)^{ten}$ Polare von Q. — Das Geheimniss der Kerncurven und «-Flächen war mir schon bekannt.

«Ich glaube nun so ziemlich mit den schuldigen Antworten auf- «geräumt zu haben; nur etwas über Evoluten und Doppeltangenten ist «noch übrig geblieben.

»Mir schwebt die Frage vor: welche Curve auf der f^n enthält die »Berührungspunkte der Ebenen, welche die f^n in zwei gesonderten »Punkten berühren? — Die P^{18} bei der f^3 trifft jede *Sylvester'sche* »Ebene mit 6 dreifachen Punkten, was ja sehr gut zu dem ohnehin »sichern Grad passt. — Helfen Sie mir zu einer f^9, welche durch die »27g geht!

»Ich habe möglichst geeilt, Ihnen zu antworten, damit dieser »Brief Sie noch vor Ihrer Abreise in Berlin erreiche; und wünsche, »dass Sie mir dann Ihre Adresse geben. In Ems sind Sie näher bei »der Schweiz; vielleicht könnte ich in den Herbstferien Sie dort »besuchen.

»Prof. *Rettig* hat mir einen freundlichen Gruss an Sie aufge»tragen, nehmen Sie auch einen von Ihrem diesen Augenblick Cay»lisch-Sylvestrisch-polarisch-schwabblig-verrückten

»Bern, den 27. Mai 1854. *L. Schläfli.*

»Abends gegen 6 Uhr.

»Ihren Brief vom 22. Mai erhielt ich gestern den 26. Abends »um 4 Uhr!«

Schläfli an Steiner.

»*Mein lieber Freund!*

»(7. Juni.) Täglich und stündlich Ihrer Antwort entgegensehend, »ergreife ich schon jetzt die Feder, um sogleich nach Kennt»niss Ihrer Adresse Ihnen meine Bemerkungen zusenden zu »können. Wie es mir nämlich fast immer geht, so habe ich auch »dieses Mal meinen letzten Brief zu ergänzen und theilweise zu »berichtigen.

»Ich sprach von *projectivischen Ebenenbüschen*, — ich will sie »fortan lieber *collinear* nennen, — und gab die Definition, dass sie »in eine solche *(perspectivische)* Lage versetzt werden können, dass »alle Durchschnitte je zweier entsprechender Ebenen in eine und die»selbe Ebene fallen. Es fragte sich aber noch, ob dieses immer aus»führbar sei, wenn zwei Ebenenbüsche nach meiner analytischen Vor»stellung collinear sind. Vorerst war klar, dass sie in der perspec»tivischen Lage einen gleichen und gemeinschaftlichen Ebenenbüschel »enthalten, dessen Lage ihre Mittelpunkte verbindet; und umgekehrt, »wenn zwei collineare Büsche auch nur einen in beiden gleichen »Ebenenbüschel enthalten, so war leicht zu zeigen, dass man nur

»diese zwei Büschsel zur Congruenz bringen darf, indem man die »Mittelpunkte der Büsche getrennt erhält, um diese in die perspec»tivische Lage zu versetzen. Es fragte sich also nur noch: enthalten »zwei (in analytischem Sinne) collineare Ebenenbüsche immer wenig»stens *einen* gleichen Ebenenbüschel? Die Antwort war: es giebt immer »6 Axen gleicher Ebenenbüschel; und diese werden so construirt: »Es seien h, k die Asymptotenkegel aller um die Mittelpunkte A, B »der zwei gegebenen collinearen Ebenenbüsche beschriebenen Kugeln »(d. h. Kugeln mit nullem Halbmesser); k^1 sei der Kegel, welcher im »Busche A dem Kegel k des Busches B entspricht. Nun lege man »an h, k^1 die 4 gemeinschaftlichen Berührungsebenen, so sind die 6 »Kanten dieses vierflächigen Ecks die Axen derjenigen Ebenenbüschel »in A, denen gleiche Ebenenbüschel in B entsprechen. Ist die col»lineare Verwandtschaft beider Büsche eine reelle, so haben auch die »Gleichungen beider Kegel h, k^1 lauter reelle Coefficienten; daher »sind ihre 4 gemeinschaftlichen Berührungsebenen *conjugirt*-imaginär; »folglich immer *zwei* Gegenkanten *reell*, die 4 übrigen Kanten imaginär.

»Ich war erstaunt zu finden, dass die Erzeugung der f^8 mittelst »dreier collinearen Ebenenbüsche jeweilen mit einem bestimmten »Doppelsechser *Cayley'scher* Geraden zusammenhängt, so dass von »dieser Seite her keine Hoffnung übrig ist, zu 19 gegebenen Punk»ten einen beliebigen 20sten zu finden. Denn wenn wir auch unter den »19 gegebenen Punkten drei A, A^1, A^{11}, als Mittelpunkte collinearer »Büsche setzen, und dann vier andere Punkte K, L, M, N hinzunehmen, »so drehen sich die 3×4 Ebenen, mit denen wir die collineare »Verwandtschaft anfangen wollen, um die 3×4 Strahlen AK, AL, »AM, AN, etc.; und um die 12 Unbekannten, die ihre Lage fixiren, »zu finden, müssen wir schon 4 sich nicht schneidende *Cayley'sche* »Gerade kennen. — Sind mit Bezug auf das Schema der 3×3 an»fänglichen Ebenen

	K	L	M
A	x	y	z
A^1	x^1	y^1	z^1
A^{11}	x^{11}	y^{11}	z^{11}

»(wo wenigstens 4 Buchstaben, wie z. B. y^1, z^1, y^{11}, z^{11}, nicht reine »Perpendikel bedeuten, sondern noch gewisse Factoren mit sich führen),

$$\left\{\begin{array}{l} \alpha x + \alpha^1 x^1 + \alpha^{11} x^{11} = 0 \\ \alpha y + \alpha^1 y^1 + \alpha^{11} y^{11} = 0 \\ \alpha z + \alpha^1 z^1 + \alpha^{11} z^{11} = 0 \end{array}\right\}$$

drei entsprechende Ebenen, welche in B sich schneiden, so dürfen ihre Polynome unverändert, wie sie hier stehen, z. B. mit der Horizontalzeile A vertauscht werden; u. s. f., was ich nur andeuten will, um nicht weitläufig zu werden. D. h. wie, wenn A, A^1, A^{11} als Mittelpunkte collinearer Büsche feststehen, die auf f^3 liegenden Punkte K, L, M, welche die 3×3 anfänglichen Ebenen des Schemas bestimmen, durch irgend drei andere N, P, Q ersetzt werden können, so können auch umgekehrt irgend drei unter allen mittelst der collinearen Büsche A, A^1, A^{11} bestimmten Punkte, z. B. K, L, M als Mittelpunkte collinearer Büsche gebraucht werden, um die Punkte A, A^1, A^{11} in Fluss zu bringen, und z. B. die Punkte B, B^1, B^{11} an ihre Stelle zu setzen. Wir haben jetzt ein neues Schema der f^3, wo die Verticalzeilen den Punkten N, P, Q, die Horizontalzeilen den Punkten B, B^1, B^{11} entsprechen, und zwar haben wir es mittelst 12 unbestimmter Substitutionscoefficienten erhalten. Aber trotz der 12fachen Variabilität umfasst der Haufe von Schematen, welche durch lineare Transformation, sowohl der Horizontal- als der Verticalzeilen aus einem anfänglichen Schema hervorgehen, noch nicht alle Schemate der f^3; sondern es giebt 36 getrennte solche Haufen, wo kein Uebergang aus einem in einen andern durch lineare Transformationen möglich ist; und jeder Haufe ist an einen Doppelsechser *Cayley*'scher Geraden gebunden. — Halten wir nämlich wieder A, A^1, A^{11} als Mittelpunkte collinearer Büsche fest und verlangen zwei Verhältnisse $\varkappa : \lambda : \mu$, für welche die drei entsprechenden Ebenen

$$p = \varkappa x + \lambda y + \mu z = 0,$$
$$p^1 = \varkappa x^1 + \lambda y^1 + \mu z^1 = 0,$$
$$p^{11} = \varkappa x^{11} + \lambda y^{11} + \mu z^{11} = 0,$$

welche den Punkt N bestimmen sollten, sich in *einer* Geraden B schneiden, so ist die Aufgabe vom 6ten Grade, wir erhalten daher eine Sechserreihe sich nicht schneidender Geraden b_1, b_2, b_3, b_4, b_5, b_6; und können das anfängliche Schema

$$\begin{vmatrix} p \,.\, y \,.\, z \\ p^1 \,.\, y^1 \,.\, z^1 \\ p^{11} \,.\, y^{11} \,.\, z^{11} \end{vmatrix}$$

durch $= 0$ ersetzen. Weil aber die Polynome p, p^1, p^{11} nicht mehr unter sich unabhängig sind, so giebt es eine identische Relation

$$\alpha p + \alpha^1 p^1 + \alpha^{11} p^{11} = 0,$$

und diese geht, wenn wir $\alpha x + \alpha^1 x^1 + \alpha^{11} x^{11} = t$,

$$\alpha y + \alpha^1 y^1 + \alpha^{11} y^{11} = u,$$
$$\alpha z + \alpha^1 z^1 + \alpha^{11} z^{11} = v \text{ setzen,}$$

in $\varkappa t + \lambda u + \mu v = 0$ über.

»Daher schneiden sich auch die drei entsprechenden Ebenen t, »u, v der Büsche K, L, M in einer und derselben Geraden a, »welche der vorigen b conjugirt ist und sie nicht schneidet. Wenn »also die der vorigen ähnliche Aufgabe, welche der Vertauschung »von Horizontal und Vertical entspricht, die 6 Geraden a_1, a_2, a_3, »a_4, a_5, a_6 liefert, so dürfen wir annehmen, dass jede von diesen »mit der gleichvielten der Sechserreihe b conjugirtr sei; und es »ist klar, dass man nicht wieder eine Gleichung 6ten Gades auf»zulösen braucht, sondern dass alle Geraden der zweiten Aufgabe auf »linearem Wege aus denen der ersten erhalten werden. Es ist ferner »leicht zu zeigen, dass z. B. a_1 von den 5 nicht conjugirten Geraden »$b_2, \ldots b_6$ der andern Reihe geschnitten wird. Ich nenne die Sechser»reihe a *den Horizontalzeilen* des Schemas *entsprechend*, weil z. B. »im äquivalenten Schema die obige Gerade die erste Horizontalzeile

$$\begin{vmatrix} t \,.\, u \,.\, v \\ x^1\, y^1\, z^1 \\ x^{11}\, y^{11}\, z^{11} \end{vmatrix}$$

»annullirt; die conjugirte Reihe b entspricht den Verticalzeilen. Das »einfachste Merkmal, dass zwei Gerade beider Reihen, wie a_1 und b_1 »conjugirt sind, besteht darin, dass, wenn man so transformirt, dass »eine Horizontalzeile des Schemas durch a_1 und eine Verticalzeile »durch b_1 annullirt wird, im Kreuzungspunkt beider Zeilen eine *Lücke* »(Null statt eines Polynoms) entsteht. Transformirt man das Schema »so, dass seine drei Horizontalzeilen der Reihe nach von den Geraden »a_1, a_2, a_3 und seine drei Verticalzeilen von b_1, b_2, b_3 annullirt werden, »so fallen auf die Diagonale des Schemas drei Lücken; die Deter»minante verwandelt sich in die Summe *zweier* Produkte, und man »hat ein *Triederpaar*.

»Mit dieser Anschauung hängt die Anordnung der auf f^3 liegen»den Curven R^3 innig zusammen. Heben wir nämlich aus den colli»nearen Büschen A, A^1, A^{11} irgend drei projectivische Ebenenbüschel »heraus, so erzeugen diese eine R^3; sie bildet eine Doppelschaar, die »ich der horizontalen Richtung des Schemas oder der Sechserreihe a »entsprechend nenne. Von K, L, M aus erhalten wir die conjugirte »Doppelschaar. — Jene R^3 schneidet keine der 6 Geraden der ent»sprechenden Reihe a; sie schneidet jede Gerade der conjugirten »Reihe b zweimal, endlich jede der 15 übrigen Geraden c_{12}, etc. nur »einmal. Irgend zwei R^3 aus conjugirten Doppelschaaren schneiden »sich in 5 Punkten und liegen zusammen auf einem Hyperboloid;

»zwei R^3, deren entsprechende Sechserreihen keine Gerade gemein »haben ohne jedoch conjugirt zu sein, schneiden sich in 4 Punkten; »in 3, wenn die Sechserreihen *eine;* in 2, wenn dieselben *drei* Ge»rade gemein haben; endlich zwei R^3 derselben Doppelschaar schnei»den sich nur in einem Punkt. Durch 2 beliebige Punkte auf der »Fläche ist die R^3 bestimmt; aber es gehen deren 72 durch.

»Die R^3 ist eine sehr hübsche Curve; sie hat einmal gar keinen »ausgezeichneten Punkt; sodann spielt die Schaar ihrer Schmiegungs»ebenen als *Abwickelbare* ganz dieselbe Rolle wie die Schaar ihrer »Punkte als Raumcurve. Durch einen freien Punkt gehen 3 Schmieg»ungsebenen. Durch irgend zwei Durchschnitte von je zwei Schmieg»ungsebenen geht eine der Abwickelbaren eingeschriebene Fläche »zweiten Grades; u. s. w. Folgende Aufgaben, 1. wenn 6 Punkte, »2. wenn 5 Punkte und 1 Sehne, 3. wenn 3 Punkte und 3 Sehnen, »4. wenn 2 Punkte und 4 Sehnen gegeben sind, die R^3 zu construiren, »sind leicht zu lösen. Durch 4 Punkte und 2 Sehnen wird keine »ächte R^3 bestimmt, sondern nur etwa ein Kegelschnitt und eine Ge»rade, die aber jenen *nicht* schneidet, und daher keine R^3 mit ihm »ausmacht. Die übrigen Aufgaben, 5. durch 1 Punkt und 5 Sehnen; »6. durch 6 Sehnen eine R^3 zu legen, konnte ich nicht lösen.

»Unter den 12 Punkten, in denen die Vollcurve $R^4 \| 2 . 2 \|$ von »einer f^3 geschnitten wird, ist einer nothwendig.« Können Sie diesen »Satz beweisen? Wenn doch diese fundamentale Schwierigkeit nur »erst in einem speziellen Falle überwunden wäre! Dann Hoffnung »auf Verallgemeinerung.

»Durch irgend 4 auf der f^3 gegebene Punkte gehen 27 Curven »$R^4 \| 2 . 2 \|$, welche den 27 Geraden entsprechen. Alle auf der f^3 »gezogenen Vollcurven R^4 zerfallen also in 27 geschiedene Haufen. »Zwei Curven desselben Haufens schneiden sich auch in 4 Punkten, »diese liegen in einer Ebene, und der vierte ist nothwendig, es geht »nämlich ein schon durch die drei Punkte bestimmter Büschel durch. »Wird aber der vierte Punkt beliebig auf der durch die drei ersten »gelegten ebenen C^3 gesetzt, so zerfällt die R^4 in die entsprechende »*Cayley*'sche Gerade und diese C^3. Zwei Curven R^4 aus verschiedenen »Haufen schneiden sich entweder in 6 oder in 5 Punkten, je nachdem »die entsprechenden *Cayley*'schen Geraden sich schneiden oder nicht; »im ersten Falle geht die durch die 6 Punkte bestimmte R^6 durch »den Schnittpunkt der zwei *Cayley*'schen Geraden und hat die dritte »das Dreiseit ergänzende Gerade zur Sehne. Da die Gerade a, welche

«den Haufen der R^4 bestimmt, in 16 Sechserreihen vorkömmt, so «kann die R^4 dieses Haufens auf 16 Arten in eine R^3 und diejenige «Sehne derselben, welche mit a in Beziehung auf die entsprechende «Sechserreihe conjugirt ist, sich auflösen. Sie kann ferner auf 5 «Arten sich in zwei Kegelschnitte, die zwei Punkte gemein haben, «auflösen. U. s. w. 16 Schnittpunkte der 4 Trippelebenen [1]) ausge- «zeichnet. Durch irgend einen gegebenen Punkt gehen 2 Sehnen. «Alle Ebenen, welche in zwei getrennten Punkten die R^4 berühren, «bilden eine Abwickelbare (A^8) achter Classe, welche in 4 Kegel K^2 «zerfällt, deren Scheitel die Tripelpunkte [1]) sind. Die von den Tan- «genten gebildete Abwickelbare ist eine A^{12} achten Grades. In einer «beliebigen Ebene liegen 38 Durchschnitte von je zwei Schmiegungs- «ebenen der R^4.

«Die famose Theilcurve R^4 [(2 . 3)—(1 . 1)—(1 . 1)] ist nicht «so spröd, wie ich anfangs glaubte; sie zählt nur 16 Data, wie die «vorige (*nicht* 18!) und ist daher durch 8 Punkte bestimmt, nur «weiss ich nicht, wie viele Lösungen es dann giebt. Für ihre ebene «Projection ist $k = 6$, $d = 3$, $w = 6$, $t = 4$. Diese R^4 hat nur 4 «Punkte, wo sie von einer Ebene 4punktig berührt wird. Ihre Ab- «wickelbare A^6 ist zugleich vom 6ten Grade und hat eine Doppellinie «6ten Grades. In jeder beliebigen Ebene liegen nur 6 Durchschnitte «je zweier Schmiegungsebenen der R^4. Ich vermuthe, dass die ge- «nannte Doppellinie R^6 ihrem Charakter nach von der A^6 sich nur «durch Vertauschung von Grad und Classe unterscheide; sicher ist, «dass sie von jeder Tangente der R^4 nur zweimal geschnitten wird. «Legen wir hingegen an die R^4 alle Berührungsebenen, welche die- «selbe in zwei verschiedenen Punkten berühren, so machen diese eine «Abwickelbare A^{12}, welche die R^4 zur Doppellinie hat und als Ebenen- «schaar wahrscheinlich dasselbe ist, wie diese R^4 als Punktschaar; «sie wäre demnach vom 6ten Grade; ich kann dieses aber nicht be- «weisen. — Von einem gewissen Gesichtspunkt aus erscheint diese «R^4 als Glied einer Progression, welche mit der Geraden, dem Kegel- «schnitt und der R^3 anfängt. Setzt man nämlich die vier räumlichen «Coordinaten gleich ganzen Functionen einer einzigen Variabeln und «erhöht ihren Grad nach und nach von 1 bis 4, so erhält man die «schon genannten Linien und zuletzt die Theilcurve R^4 und zwar «ohne Beschränkung ihrer Natur. Sie passt auch in die allgemeine

[1]) Soll wohl heissen Quadrupelebenen.

Darstellungsform freier Raumcurven, über die ich Ihnen früher geschrieben habe. Wenn nämlich t bis z lineare Polynome der 4 räumlichen Coordinaten bedeuten, so wird die Curve rein durch das System $[t\lambda^3 + u\lambda\mu + v\mu^3 = 0,\ w\lambda + x\mu = 0,\ y\lambda + z\mu = 0]$ dargestellt, wo das Verhältniss $\lambda : \mu$ zu eliminiren ist, ohne dass man etwas auszuschliessen braucht. Das System kann immer so transformirt werden, dass die Polynome w, x, y, z einem beliebigen schiefen Vierseit des festen Hyperboloids auf dem die R^4 liegt, entsprechen und dass zugleich u wegfällt, die erste Gleichung also bloss $t\lambda^3 + v\mu^3 = 0$ ist. Man kann daher die Curve auch als das Erzeugniss dreier Ebenenbüschel betrachten, von denen aber nur zwei unter sich projectivisch sind, beim dritten hingegen das projectivische Verhältniss die Reihe der Quadrate durchläuft, wenn es bei den übrigen nach einer arithmetischen Reihe erster Ordnung variirt. — Um die Curve R^4 auf dem festen Hyperboloid zu bestimmen, reichen 7 Punkte hin, und die Aufgabe hat nur 2 Lösungen je nach der Geradenschaar, auf welche man die Curve bezieht. Sie schneidet nämlich alle Geraden der einen Schaar dreimal, diejenigen der andern nur einmal. Irgend zwei Curven R^4 auf dem Hyperboloid haben 6 oder 10 Punkte gemein, je nachdem sie zum gleichen oder zu verschiedenen Haufen gehören. Die durchgehende f^3 ist 6fach unbestimmt, sie kann durch je zwei beliebige Gerade derselben Schaar des Hyperboloids gelegt werden oder kann auch eine allein zur Doppelgeraden haben.

(6. Juli.) Ich habe mich schauderhaft lang mit den Raumcurven gequält und desshalb mit der Antwort gezögert, weil ich wenigstens noch mit den Curven 6ten Grades aufräumen wollte. Ich bin zwar noch nicht sicher, dass ich alle R^6 vollständig habe.

Ich schicke einige allgemeine Bemerkungen voraus. — Bei allen bis jetzt betrachteten auf der f^2 oder f^3 liegenden Curven habe ich immer gefunden, dass sie die durchgehende f^3 beschränken; es ist daher keine Hoffnung vorhanden, von dieser Seite her etwas für die f^3 zu leisten, was der Entdeckung der 27 Geraden auf der f^3 einigermassen ähnlich wäre. Wenn ich lauter Polynome zweiten Grades anwenden will, so brauche ich deren f ü n f, um die allgemeine f^3 zu construiren, und dann ist das System viel zu beweglich, als dass man etwas Vernünftiges daran sehen könnte. Kurz, die f^3 ist eine sehr harte Nuss. — Ich bezeichne die Raumcurven nach Grad (oben) und Classe (unten); es giebt aber solche von gleichem Grad

»und gleicher Classe, die dennoch streng geschieden sind. Wenn »für die Flächen f^m, f^n, welche die Vollcurve bilden, keine Längs»berührungen stattfinden, und die Vollcurve in mehrere bekannte Theil»curven und eine unbekannte R_λ^α zerfällt, so finde ich die Classe λ »auf folgendem Wege. Es sei Θ die Zahl der Knoten dieser R^α, d. h. »der Punkte, in denen sie von den übrigen Theilcurven geschnitten »wird (leicht zu ermitteln), so ist $\lambda + \Theta = \alpha\ (m + n - 2)$. »Wenn die R_λ^n keinen ausserordentlichen Punkt (d p oder r p) hat, »so ist λ immer gerade. Durch irgend einen Punkt gehen »$\frac{n\,(n-1)}{2} - \frac{\lambda}{2}$ Sehnen; von jedem Punkt der Curve aus gehen »$\frac{(n-1)\,(n-2)}{2} - \frac{\lambda}{2} - 1$ Strahlen, welche die Curve im »Ganzen in drei Punkten scheiden. Durch irgend einen Punkt gehen »$3\,(\lambda - n)$ Schmiegungsebenen und $4\,n + \frac{1}{2}\,\lambda\,(\lambda - 10)$ »Doppelberührungsebenen; die von diesen umhüllte Abwickelbare »hat die R_ν^n zur $(\lambda - 4)$ fachen Linie. Die Doppellinie, der von »den Schmiegungsebenen umhüllten Abwickelbaren ist vom Grade »$\frac{1}{2}\,\lambda\,(\lambda - 4)$. Die Curve R_λ^n hat $6\,\lambda - 8\,n$ *Planpunkte* (wo eine Ebene »4 punktig berührt). — Die Zahl der *nothwendigen Punkte* einer Theil»curve wird durch folgenden Satz bestimmt: »Wenn eine Vollcurve »in i Theilcurven zerfällt, so ist die Summe der diesen entsprechen»den Zahlen nothwendiger Punkte sammt der Anzahl aller Knoten um »$i - 1$ grösser als die der Vollcurve entsprechende Zahl nothwendi»ger Punkte.« Diese letzte Zahl wird durch die Formel

$$\frac{1}{2}\,np\,(n + p - 4) + 1 - \varepsilon \binom{n + p - m - 1}{3}$$

»ausgedrückt mit Bezug auf Vollcurve $C^{n,p}$ und Fläche f^m $(m \geqq n \geqq p)$: »$\varepsilon = 0$, wenn $m > n + p - 4$, und $= 1$, wenn $m \leqq n + p - 4$.

»Dieser Satz lässt mich aber bei Längsberührungen im Stich. — »Unter den wenigen Gattungen von Raumcurven, die ich jetzt aufzählen »will, sind manche, die ich nicht durch ein geschlossenes System von »Gleichungen, worin zu eliminirende Hülfsgrössen vorkommen, so »darzustellen vermag, dass das System der Theilcurve äquivalent ist, »ohne dass man von der Gesammtheit seiner Lösungen etwas auszu»schliessen braucht. Es bleibt daher nichts anders übrig, als sie nach

«den niedrigsten durchgehenden Flächen zu ordnen, was doch be-
«denklich ist. Auch scheint uns die f^3 für die Fortsetzung dieser
«angefangenen Betrachtung der Raumcurven ein unübersteigliches
«Hinderniss in den Weg zu legen. In folgender Uebersicht bezeichnet
«e die Zahl der Elemente oder Bestimmungsstücke, p die Zahl der noth-
«wendigen Punkte, wenn es nöthig ist, mit einem untern Zeiger, der
«den Grad der schneidenden Fläche anzeigt.

«R_4^3 ($e = 12$, $p = o$); R_6^4 ($e = 16$, $p = 0$); R_8^4 ($e = 16$, $p = 1$);

«R_8^5 ($e = 20$, $p = 0$) entsteht, wenn zwei f^3 eine R_4^3 und eine «diese nicht treffende Gerade gemein haben. Die R_8^5 ($e = 18$), «welche entsteht, wenn eine f^4 mit einer f^2 drei Gerade derselben «Schaar gemein hat, betrachte ich als speziellen Fall der vorigen

«R_{10}^5 ($e = 20$, $p = 1$) entsteht, wenn zwei f^3 eine R_6^4 gemein «haben. (Kein System!)

«R_{12}^5 ($e = 20$, $p = 2$) entsteht, wenn eine f^2 und eine f^3 eine Ge-«rade gemein haben.

«R_{10}^6 ($e = 24$, $p = 0$); eine einzige f^3 geht durch (als Basis); die «Curve schneidet alle Geraden des entsprechenden Sechsers «4 mal, die des conjugirten nicht, und jede der 15 übrigen Ge-«raden 2 mal; sie ist durch 5 Punkte auf der Basis bestimmt. «Die durchgelegte f^4 schneidet die Basis in einer conjugirten S_{10}^6. «Zwei R_4^3 desselben Haufens können zusammen für eine solche «Curve gelten.

«Diesen untergeordnet R_{10}^6 ($e = 23$), wenn eine f^3 und eine «f^4 eine Gerade gemein haben, die in jener Doppelgerade, in dieser «dreifache Gerade ist; R_{10}^6 ($e = 20$), wenn eine f^5 durch «4 Gerade derselben Schaar einer f^2 geht; ist auf der f^2 durch «11 Punkte bestimmt und trifft alle Geraden der einen Schaar «5 mal, die der andern 1 mal.

«R_{10}^6 ($e = 23$, $p_3 = 1$, $p_4, \ldots = 0$), wenn zwei f^3 sich längs «einer Geraden berühren und eine freie Gerade (einfach) gemein «haben. Legt man eine f^4 durch die R, so enthält sie noth-«wendig die erste Gerade und schneidet jede f^3 in einer R_{10}^5 «die das Geradenpaar nicht trifft. (Kein System!)

«R_{12}^6 ($e = 24$, $p = 1$), wenn zwei f^3 drei freie Gerade a, a', a'' «gemein haben. Die eine f^3 sei Basis, und werde von der «durch a, a', a'' gehenden f^2 in b, b', b'' geschnitten. Geht «nun eine f^4 durch die R_{12}^6, so schneidet sie die Basis noch in

«einer S_{12}^6, die zu b, b', b'' gehört und mit der vorigen «Curve 18 Punkte gemein hat.

«R_{14}^6 (e = 24, p = 2), wenn zwei f^8 einen Kegelschnitt und eine «freie Gerade gemein haben. (Kein System!)

«R_{16}^6 (e = 24, p = 3), wenn zwei f^8 eine R_4^3 gemein haben; ist «durch 8 Punkte auf der Basis f^8 bestimmt, trifft alle Geraden «eines Sechsers 3 mal, die des conjugirten Sechsers nur 1 mal, «die 15 übrigen Geraden 2 mal; und wird durch vier collineare «Ebenenbüsche erzeugt.

«R_{16}^6 (e = 23, p = 3), wenn eine f^2 und eine f^4 zwei freie Ge- «rade gemein haben.

«R_{18}^6 (e = 24, p = 4) = $C^{2\cdot 3}$ Vollcurve.

«Wie tief kann die Classe einer R^n hinabgehen, wenn diese «ausserordentliche Punkte hat? Ohne solche scheint $2(n-1)$ die «niedrigste Classe zu sein. Diese $R_{2(n-1)}^n$ entsteht immer, wenn man «alle 4 Coordinaten als ganze Functionen n^{ten} Grades einer Variabeln «setzt, und hat 4n Elemente; sie verläuft in einem einzigen reellen «Zuge und kehrt in sich zurück; was ich von den höhern Classen «nicht glaube, obschon ich es nicht beweisen kann. Von der R_8^4 ist «leicht nachzuweisen, dass sie aus zwei getrennten Zügen bestehen «kann, ebenso von der ebenen C^3; wie ist es bei der ebenen C^4? —— «Ich habe auch das Zerfallen der einzelnen Raumcurven studirt, weil «ich es für den Uebergang zu höhern Curven nothwendig finde; doch «darüber einzutreten, ist zu weitläufig; ich will nur erwähnen, dass «eine R_8^4 auf der Basis f^3 allmählig übergehen kann in eine C^3 und «eine einmal schneidende Gerade; ferner dass nicht jede Gruppe durch «Knoten vereinigter Raumcurven als specieller Fall einer untheilbaren «Raumcurve angesehen werden darf; denn z. B. eine C^4 sammt einer «einmal schneidenden Geraden wäre eine R_{14}^5, und doch glaube ich «nicht, dass es eine untheilbare R_{11}^5 gebe.

«*Satz.* Wenn $m \leqq n$ und die Basis f^n enthält eine Gerade g, «und man verlangt, dass eine f^m die Basis längs g berühre, so zählt «dieses der f^m für $2m + n$ gegebene Punkte.

«Im Café du Mont ist das Erdgeschoss frei; Sie können 8 Tage «vor Ihrer Ankunft das Logis bestellen, und ich ersuche Sie mir dar- «über zu schreiben. Wenn Sie unerwartet ankämen, könnten Sie «nicht schon am ersten Tage hier logiren. Es freut mich sehr, Sie «wieder zu sehen; nur muss ich Ihnen mittheilen, dass ich der Na- «tionalvorsichtscasse die Uebernahme einer mir wahrscheinlich zu-

fallenden Arbeit, die vielleicht 3 Wochen, Ende Juli bis in den August hinein, ansprechen wird, zugesagt habe; doch, bevor ich sie definitiv erhalte, soll darüber geschwiegen werden. Es bleibt mir also nichts andres übrig, als diese Arbeit Hals über Kopf zu beendigen, damit ich etwa am Ende August mit ungetheiltem Interesse Ihrem Umgang und den von Ihnen in Aussicht gestellten mathematischen Bemühungen leben kann. — Die Vorsicht wegen Einsendung einer Abhandlung über Flächen an *Liouville* ist mir schon vor Ihrem Briefe in den Sinn gekommen, und ich werde mich vorher mit Ihnen darüber besprechen. Meine Ansicht ist, dass wir die Anfänge einer Theorie der ganzen Functionen vor uns haben, so wie die Zahlenlehre eine Theorie der ganzen Zahlen ist, und dass jene ein starkes Bedürfniss ist, weil es in allen Zweigen der Analyse doch zuletzt immer auf geschickte Behandlung der ganzen Functionen ankömmt.

»In der letzten Zeit befinde ich mich etwas leidend und weniger lebendig als im Mai und Juni; ich wollte, ich könnte etwa am Fusse des Ochsen [1]) eine Milchkur machen; doch wird nun kaum etwas daraus werden. — *Crelle* hat mir den Empfang meiner Zusendung noch immer nicht angezeigt; vielleicht wäre es gut, wenn Sie ihn mahnten.

»Ich wünsche, dass die Kur Ihnen gut zuschlage; und verzeihen Sie, dass ich erst so spät schreibe und Ihnen zumuthe, während der Cur einen so lang schwatzenden Brief zu lesen.

»Sie freundlich grüssend

Ihr dankbarer Schüler

L. Schläfli.«

Café du Mont, den 7. Juli 1854.

Steiner an Schläfli.

Vom hohen Olymp [2]) 1ter August 1854.

»*Lieber Freund!*

»Seit dem 20ten vorigen Monats bin ich hier. Nach Homburg hielt ich mich je einen Tag in Baden-Baden, Freiburg (bei *Oettinger*) [3]) und Basel auf, leider war *Rudolf Merian* zur Zeit in Bern. Ihren furchtbaren Brief habe ich in Homburg nicht gelesen; hier bin ich auch noch nicht dazu gekommen; es fehlt mir an Comfort, die Zimmer

[1]) Ein Berg der Stockhorn-Kette.

[2]) Rigi-Scheideck.

[3]) Oettinger Ludwig geboren 7. V. 1767 Professor der Mathematik in Freiburg im Breisgau.

«sind zu klein, ohne Sopha und Tisch, im Gastzimmer kann ich «nicht nachdenken, wie Sie. Diesen Brief schreibe ich in der Nähe «des Getümmels im grossen Saal. Hätten Sie Zeit und den Rigi «nicht schon abgegrast, so könnten Sie auf 2 Tage herkommen. Es «ist keiner hier, der was vom Grasen versteht. Ich werde wenigstens «noch bis zum 10ten hier bleiben, vielleicht bis zum 17ten, nach- «dem ich gute Wirkung spüre. Etwas Stärkung fühle ich schon. «Heute ist straub [1]) Wetter, dass man bis jetzt, 11 Uhr, noch nicht «aus dem Haus gehen kann. Ob ich über Luzern direct nach Bern «komme oder durch Unterwalden (was ich noch nicht gesehen) über «den Brünig, Interlaken, Thun gehen werde, weiss noch nicht; zum «Letztern fehlt mir ein kleines Ränzel und gutes Wetter. Die Pen- «sion ist hier billig, ich bezahle nur 4 Fränkli per Tag. Wenn das «schlechte Wetter anhält, so werde ich wohl anfangen müssen, mir «etwas Geometrie in Erinnerung zu bringen. Ich habe einige Manu- «scripte und Notizen mitgenommen. — Ist die Wohnung, die im du «Mont [2]) zu haben wäre, für mich geeignet? 1) gegen Morgen oder «Mittag; 2) ruhig und ohne Tabakrauch; 3) mit Sopha! — Da Sie «keine Bedürfnisse und daher kein Urtheil haben, so wird es wohl «besser sein, wenn ich erst im Adler absteige und selbst sehe.

«Wenn Sie nichts zu thun haben, so können Sie über Thun und «die beiden Seen in anderthalb Tagen hier sein; von Gersau steigen «Sie in 2 Stunden hinauf. Sind Ihnen die Vorsichts-Kassen-Rech- «nungen schon zugestellt, so rechnen Sie wie der Tüfel, dass Sie «bis zum 18ten oder 20ten August fertig sind. Indessen reiben Sie «sich nicht auf, damit Sie nicht auch matt werden, wie Ihr entkräf- «teter Freund

Steiner.»

Schläfli an Steiner.

«*Lieber Freund!*

«Es dauert mich, dass Sie in meinem letzten Brief die Auf- «zählung der Raumcurven bis zum 6ten Grad inclusive und den «schlechten Trost, den ich für höhere Curven beifüge, nicht ange- «sehen haben.

[1]) Straub = schlechtes.

[2]) Ein Café bei Bern, wo Schläfli wohnte.

«Wenn Sie lange genug auf dem Rigi blieben, so wäre es mög-
«lich, dass ich hinkäme; aber zuvor muss ich die fatale Bürde ab-
«geworfen haben, und wenn diess bis zum 20ten geschieht, bin ich
«daher froh. Doch ich denke, Sie seien früher in Bern als ich auf
«dem Rigi. Wenn Sie aber den Rigi verlassen, möchte ich Sie
«bitten, es mir zu schreiben, damit nicht etwa mein Brief oder ich
«selbst Sie verfehle.

«Ihr Logis hier auf dem Mont hat alle Eigenschaften, die Sie
«von ihm verlangen; es ist das grosse Zimmer ebener Erde gegen
«den Gurten hin gerichtet; ein Sopha kömmt hinein; Stille und
«Rauchlosigkeit non plus ultra. Wenn Sie wenige Tage vorher be-
«stellen, brauchen Sie nicht im Adler abzusteigen.

«Ich vermuthe, dass Sie Herrn *Crelle* wegen seines Stillschwei-
«gens über den Empfang meiner Abhandlung geschrieben haben; ich
«wollte gerne, Sie hätten mir dieses angezeigt. Denn nun erhalte ich
«einen Brief von *Crelle*, datirt vom 28. Juli, nach welchem alles in
«Ordnung ist, kurz nach dem ich am 31. Juli einen frankirten Mahn-
«brief hatte abgehen lassen. Wird indess nicht viel schaden!

«Meine für *Liouville* bestimmte Abhandlung über intégrales
«sphériques d'ordre n ist am 1. August durch Gefälligkeit direct nach
«Strassburg abgegangen und wird von dort nach Paris spedirt wer-
«den, wird aber Herrn *Liouville* kaum mehr dort antreffen. Das
«Ding ist etwa 35 starke Quartseiten lang geworden und hat mich die
«Redaction saure Mühe gekostet. Musste wiederholt umgegossen wer-
«den, weil ich die Darstellung immer wieder zu schwerfällig fand.
«Jetzt hoffe ich, wird es ein Franzose leidlich lesen können. Wegen
«der Unterdrückung der Beweise habe ich mich bei *Liouville* durch
«deren unvermeidliche Weitläufigkeit entschuldigt, ungeachtet sie an
«sich leicht und rein constructiv seien. Mich dünkt, die Sache sollte
«den *Liouville* um so mehr interessiren, da er selbst schon so Man-
«ches auf n Dimensionen übergetragen hat. Bin begierig, was er da-
«rauf antworten wird. Ich habe noch allerlei, worüber ich ihm gerne
«schreiben möchte, z. B. über orthog. Flächen, wo ich sehe, dass
«*Serret* in einem Irrthum steckt, ungeachtet er schöne Sachen darüber
«geliefert hat. Ich hoffe, Sie werden es nicht missbilligen, dass ich
«*Liouville* ganz kurz gefragt habe, wo *Cayley* seine 27 Geraden publi-
«cirt habe.

«Mit herzlichem Gruss

Ihr dankbarer Schüler

«Bern, den 4. August 1854. *L. Schläfli.*«

Steiner an Schläfli.

Sonntag, 20. August.

«Herr Schläfli wird bis zum 23ten oder 24ten hier erwartet, in-«dem ich meinen Aufenthalt bis dahin verlängere, weil mir ätherische «Luft gut anschlägt.

«Rechnung weg! Dienstag abgereisst!

J. St.»

Rigi-Scheideck. Gersau, 20. VIII. 1854.

Schläfli an Steiner.

«*Lieber Freund!*

«Wenn die Liquidationsrechnung nächsten Freitag den 25ten fertig «ist, bin ich froh; eher will ich sterben, als dieses Geschäft unbe-«endigt verlassen. Leider schreiben Sie mir nicht, wie lange Sie Ihren «Aufenthalt auf dem Rigi noch fortsetzen wollen. In Erwartung einer «baldigen Antwort grüsst Sie

Ihr

L. Schläfli.»

Bern, den 21. August 1854.
Montag Abends.

Schläfli ist dann auf den Rigi zum Besuch, *Borchardt* war auch da. (Siehe Brief 21. Febr. 1855, Steiner an Schläfli.)

Schläfli an Steiner.

«Sie haben vermuthlich eine fortgesetzte Redaction des Ganzen «von mir erwartet; aber leider bin ich an Einzelnem stecken ge-«blieben. Uebrigens würde ich kaum im Stande sein, in der Dis-«kussion der Flächen dritten Grades fortzuschreiten. Später vielleicht «Mehreres. Den Auftrag an Chelini und andere Sachen mehr werde «nächstens besorgen; Ihre Ernennung zum Lynkeus in Bund und In-«telligenz gelesen.

«Mit meinen Vorlesungen steht es nicht so übel als Sie glaub-«ten; 4 Zuhörer in den Elementen, 1 in der anal. Geometrie, 1 in «der Mechanik; wöchentlich 12 Stunden, aufgeweckte Jünglinge, die «Freude an der Sache haben.

«Fast hätte ich vergessen, Sie vor dem Pentaeder beim Flächen-«netz zweiten Grades zu *warnen* (im gewöhnlichen Sinne!); die 10 «Ebenenpaare hingegen will ich Ihnen gerne zugeben. — Ich habe «endlich eine Definition des geraden Kegels gefunden; er berührt

»den mit ihm concentrischen Asymptotenkegel einer Kugel längs zweier »Strahlen.

»Was macht Boreas bei Ihnen? uns hat er einen frühen Winter »gebracht; gegenwärtig ist Alles weiss mit Ausnahme der sonnigen »Halden; am 25. Oct. Abends hatten wir einen heftigen Sturm, der »zwar die Bäume stehen liess; wohl nur local. — Die drei Hefte von »Crelle 48 habe ich hier auch gesehen.

»Ich wünsche recht bald wieder von Ihren schätzbaren Nach»richten zu erhalten.

»Mit herzlichem Gruss

»Ihr dankbarer Schüler

L. Schläfli.«

Bern, den 15. November 1854.

Schläfli an Steiner.

»*Lieber Freund!*

»Sie werden denken, ich befolge das Beispiel *Goldbach's* dass »ich schon wieder eine kecke Behauptung meines letzten Briefes »zurücknehmen muss. Indess enthält doch auch wieder das dort Ge»sagte die Mittel in sich, den Irrthum aufzudecken. „*Ein beliebiges* »*Flächengebüsch zweiten Grades kann nicht als im Netze erster* »*Polaren einer Basis dritten Grades enthalten gedacht werden*“; seiner »Knotencurve R^6 kömmt daher im Allgemeinen *kein* Pentaeder zu; »und wenn im Besondern ein solches existirt, so ist es nicht fest.

»Es ist nämlich klar, dass wenn die Ebene, in der die Pole des »Gebüsches sich bewegen, dreifach gezählt, mit der Basis 3ten Grades »einen Büschel bestimmt, dann auch jede beliebige Fläche dieses »Büschels gebraucht werden kann als Basis zur Darstellung des Ge»büsches [2], ohne dass die Pole sich ändern. Nimmt man nun die in »meinem letzten Briefe beschriebene Bewegung der Pole und der »Basis hinzu, so erscheint im Ganzen diese Basis als beliebige Fläche »einer Doppelschaar; man kann sie z. B. nöthigen, durch zwei ge»gebene Punkte zu gehen. Die Basis darf daher nur 17 Unbekannte »zählen, die 3 Pole zählen 9, und die Bedingungen sind 3 . 9; also »übertreffen die Bedingungen die Zahl der Unbekannten um 1; d. h. »drei Flächen zweiten Grades unterliegen *einer* Bedingung, wenn sie »erste Polaren einer Basis sein sollen. — Die Sache wird auch von »anderer Seite her bestätigt. Gebraucht man nur die Coordinaten

«eines Pols als Unbekannte, so erhält man mittelst des Kreuzfeuers «leicht diejenigen der zwei andern Pole als lineare Functionen jener «ersten; und wenn man nun auf diese zwei Pole das Kreuzfeuer an- «wendet, so erhält man schliesslich 4 lineare Gleichungen für 3 Un- «bekannte, also zu viel. Ist aber die Bedingungsgleichung zwischen «den Constanten der drei gegebenen Flächen zweiten Grades erfüllt, «so reduziren sich diese 4 Gleichungen, vermöge ihrer eigenthüm- «lichen Beschaffenheit, sogleich auf 2 (statt auf 3); und jener erste «Pol wird nun doch nicht bestimmt, sondern bewegt sich auf einer «Geraden. Die Sache ist analytisch mir jetzt sehr klar; aber geo- «metrisch kann ich es so leicht darstellen.

«Ich glaubte mit dieser Rücknahme eilen zu müssen, weil ein «so massiver Irrthum Ihre ganze Redaction verderben könnte.

«Leben Sie wohl!

«Ihr treuer

L. Schläfli.»

Bern, den 18. Nov. 1854.

Steiner an Schläfli.

«*Lieber Freund!*

«Ich glaube Ihnen noch meine Ansichten über Ihre 5 Er- «zeugungsarten der Flächen dritten Grades mittheilen zu sollen. Ich «habe mich schon früher dahin geäussert, dass nur die IV (Fünfseit «mit Axe) ganz abgesondert sei; die zwei andern allgemeinern hin- «gegen, — nämlich II, Construction mittelst zwei projectivischer «Büschel 1ten und 2ten Grades, und die in Ihrem damaligen Manuscript nicht «ausdrücklich hervorgehobene Construction mittelst dreier projektivi- «scher Ebenengebüsche, — sich in der Construction V mittelst des Doppel- «trieders, als der beiderseitigen grössten Specialisirung vereinigen. «Ist nämlich $uvw+xyz=o$ die Gleichung der Fläche in Beziehung «auf ein Doppeltrieder und bedeuten α, β, γ arbiträre Factoren, so «kann dieselbe Fläche 1^0 als Erzeugniss der Büschel $u-\alpha x=0$, «$yz+\alpha vw=0$, und 2^0 als solches den Ebenenbüsche $\beta u+\gamma x=0$, «$\alpha y+\gamma v=0$, $\alpha w+\beta z=0$ dargestellt werden. Von den letztern «ist freilich jedes Gebüsch in einen Ebenenbüschel ausgeartet, aber «ihre gegenseitige Beziehung ist doch diejenige dreier projectivischen «Ebenengebüsche; und diese Beziehung erscheint sogleich in ihrer «gewöhnlichen Weise, sobald wir die drei Gleichungen mit drei Fac-

orenreihen λ, μ, ν; λ', μ', ν'; λ'', μ'', ν'' multipliciren und addiren; lenn wir erhalten so die drei projectivischen Ebenengebüsche:

$$\alpha(\mu\, y + \nu\, w) + \beta(\lambda\, u + \nu\, z) + \gamma(\lambda\, x + \mu\, v) = 0,$$
$$\alpha(\mu' y + \nu' w) + \beta(\lambda' u + \nu' z) + \gamma(\lambda' x + \mu' v) = 0,$$
$$\alpha(\mu'' y + \nu'' w) + \beta(\lambda'' u + \nu'' z) + \gamma(\lambda'' x + \mu'' v) = 0.$$

«Sie fragen nun bei II, wie die 16 übrigen Geraden gefunden werden können. Die Antwort ist einfach die, dass man zuerst die Construction II auf die I (Fläche als Pampolare) zurückführen muss. — Es seien e, e', e'' drei Ebenen des einen Büschels, h, h', h'' die drei entsprechenden Hyperboloide des andern Büschels; eine beliebige feste Ebene d wird hinzugenommen und irgend ein Punkt P auf der erzeugten f^3 fixirt. Nun legt man durch die zwei Kegelschnitte, in denen h von d und e geschnitten wird, und durch P ein neues Hyperboloid K, durch die Kegelschnitte (h', d), (h', e') und P ein zweites K' und endlich ebenso ein drittes K''; dann werden die zwei projectivischen Büschel (e, e', e'') und (K, K', K'') wieder dieselbe f^3 erzeugen. Für die Zurückführung von II auf I kömmt es jetzt darauf an, der Hülfsebene d eine bestimmte Lage anzuweisen. Man wähle im Ebenenbüschel eine der fünf, z. B. e, welche ihr zugehöriges Hyperboloid h im Punkte A berührt. Dann bilden die in Beziehung auf h, h', h'' genommenen Polaren von A, nämlich e, p' p'' einen mit dem Ebenenbüschel (e, e', e'') nicht nur projectivischen, sondern perspectivischen Büschel; daher erzeugen beide Büschel eine Ebene; diese ist die verlangte d. Jetzt verursacht nur noch die Wahl des Punkts P auf der f^3 einige Schwierigkeit. Wenn auch e' das zugehörige h' im Punkte B berührt, so lege man durch den Kegelschnitt (d, h') aus dem Scheitel B einen Kegel; dann wird dieser auch das Geradenpaar (e', h') enthalten und das gesuchte K' sein. Wiederholt sich dasselbe für e'', h'', so findet man wieder einen Kegel K''; und nun ist durch K', K'' die Grundcurve des neuen Büschels (K, K', K'') zweiten Grades bestimmt. Jetzt sind e, e', e'' Polaren von A in Beziehung auf K, K', K'' geworden; die 4 übrigen Berührungspunkte einer Ebene e''' mit dem zugehörigen Hyperboloid h''', ausser A, bilden das Quadrupel des neuen Büschels (K, K', K''), und seine Grundcurve R^4 geht nun durch die 8 neuen Ecken der durch jede Gerade des Paars (e, h) geführten Dreiseitsschnitte. Bei der analytischen Behandlung bedarf man des Punkts P zur nähern Bestimmung des neuen Hyperboloidsbüschels nicht, und daher genügt es für die beabsichtigte Zurück-

»führung, nur eine Ebene e, welche ihr Hyperboloid in A berührt,
»zu kennen. Diese Einfachheit weiss ich aber auf synthetischem
»Wege nicht zu erreichen.

»Der eigentliche Gegenstand, der mir interessant genug schien,
»um diesen Brief zu veranlassen, ist die Zurückführung der Construc-
»tion mittelst dreier projectivischer Ebenengebüsche auf Ihre Er-
»zeugungsart III mittelst einer Polebene und eines Hyperboloidge-
»büsches. Man wählt in den drei projectivischen Gebüschen drei mal
»drei Ebenen, die sich entsprechen, und sucht für diese die drei
»Pole; diese zählen analytisch für 3×4 Coordinaten; da es aber nur
»auf ihre Verhältnisse ankömmt, so sind bloss 11 Unbekannte zu zählen.
»Die Umwendung des Kreuzfeuers giebt zwischen diesen bloss lineare
»Gleichungen; also bleiben 2 Unbekannte frei, und die durch die
»drei Pole gelegte Ebene bekömmt *doppelte* Beweglichkeit, sie um-
»hüllt also eine Fläche Φ. Die Constanten in der Gleichung der Pol-
»ebene sind in Beziehung auf die 2 freien Unbekannten vom dritten
»Grade. Daher ist die Fläche Φ von der 9ten Klasse und vom 12ten
»Grade. Obschon in den Ausdrücken dritten Grades, welche in der
»Gleichung der Ebene vorkommen, bei einer passenden Darstellung
»die Cuben fehlen, und daher Besonderheiten eintreten, welche die
»Elimination erleichtern, so zeigt doch die nahe bis zur völligen Ent-
»wicklung des Polynoms Φ (nach Grad) fortgeführte Rechnung, dass
»diese Fläche wirklich vom 12ten Grade ist. Sie bezieht sich natür-
»lich nur auf den einen Sechser des *Gitters* $\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 & a_6 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 & b_5 & b_6 \end{pmatrix}$
»und hat die 15 Geraden, welche je zwei Ecken, wie $(a_1\ b_2)$ und
»$(a_2\ b_1)$ verbinden (also keine *Cayley*'schen), zu Doppelgeraden. Sie
»mag aber sonst noch Doppellinien haben, die ich nicht kenne???
»Die nähere Untersuchung scheint mir der Arbeit nicht werth.

»Hat man einmal die Polebene fixirt, so ist darum das Hyperbo-
»loid, welches dem ersten Ebenengebüsch als Basis entspricht, doch
»noch nicht völlig bestimmt; man bekömmt nämlich statt eines Hyper-
»boloids einen ganzen Büschel von solchen, welche sich alle längs
»eines in der Polebene befindlichen Kegelschnitts berühren (einander
»umschrieben sind). Ebenso verhält es sich mit dem zweiten und mit
»dem dritten Hyperboloid; jedes kann in seinem Büschel nach Belieben
»gewählt werden, auf eine von der Wahl der zwei übrigen durchaus
»unabhängige Weise. Von den 8 Grundpunkten der drei Basen kann
»also einer ganz frei im Raume gelöst werde. Somit figuriren in der

besprochenen Zurückführung auf III im Ganzen 5 willkürliche Grössen, wovon 2 der Polebene und je eine jedem Hyperboloid zufallen. Hieraus ist es zu erklären, warum die Construktion der f^3 als Pampolare scheinbar zu viele Constanten (Elemente) mit sich führt; nämlich die Polebene zählt deren 3, und die 7 Grundpunkte, welche hinreichen um das Hyperboloidgebüsch zu bestimmen, $7 \cdot 3 = 21$, zusammen 24. Zieht man aber hievon die 5 willkürlichen Elemente ab, so bleibt die richtige Zahl 19; und nun erst ist es sicher bewiesen dass die fraglichen Pampolare die allgemeine Fläche dritten Grades ist.

«Ich füge noch einiges bei, wo ich nicht mehr weiss, ob in Ihrem Manuscript x, y standen oder nicht. § 4. II. Der Ort der Berührungspunkte des B^m und B^n ist eine Curve vom Grade

$$3m^2 + 4mn + 3n^2 - 6m - 6n + 2.$$

«III. f^m und Geb.^{n}. Die Berührungspunkte liegen da, wo die f^m von einer Fläche $(m + 3n - 4)^{ten}$ Grades geschnitten wird; IV. B^m, Geb.^{n} Ortsfläche vom Grade $2m + 3n - 4$.

«Beim Flächennetz zweiten Grades weiss ich über die gegenseitige Lage der 10 Ebenenpaare durchaus nichts anzugeben. Ich glaube wenigstens, dass irgend 2 von den 10 Durchschnittsgeraden (die also auf der Knotenfläche f^4 liegen) sich treffen. Das ist gewiss, wenn 6 Gerade nach Belieben im Raume angenommen sind, so sind die 4 übrigen durch sie bestimmt.

«Ich verwundere mich, noch keinen Brief von Ihnen erhalten zu haben. Seit heute Vormittag ist die Temperatur gestiegen, und wir haben heftigen Westwind mit Regen.

«Ich hoffe, dass diese Zeilen Sie in guter Gesundheit antreffen. Leben Sie wohl und schreiben Sie auch einmal wieder.

«Ihr dankbarer Schüler

L. Schläfli.»

Bern, Mittwoch den 29. Nov. 1854.

Steiner an Schläfli.

«*Lieber Freund!*

«Dienstag Abends um 8 Uhr reiste ich von Uzistorf ab und kam Donnerstag morgens um $10\frac{1}{2}$ Uhr in Berlin an. Ich war erstaunt zu sehen, wie gröblich mich mein schlechtes Gedächtniss getäuscht hatte; denn statt dem 27ten war schon am 2ten November die Reihe

«an mir. Deshalb ging ich selben Tags 4 Uhr Nachmittags in die «Sitzung und war so glücklich, den grossen Anatomen *Müller* bereit «zu finden, den 2ten November an meiner Stelle zu lesen, so dass ich «nun erst am 14ten December den *Donnstigs* Vortrag zu halten brauche. «Bis dahin werden Sie nun noch gute Launen und helle Blicke in «Rücksicht der Resultanten und Determinanten haben, besonders wenn «Sie endlich warm sitzen. Die Hauptsachen wünschte ich aber doch «bis 15. — 18. November zu erhalten; Nachträge können bis zum «8ten December von Bern *abgehen*. — Mit der Arbeit habe ich selbst «noch nicht begonnen, weil allerlei häusliche und andere Geschäfte «mich hinderten. Den Anfang meiner Vorlesungen habe ich auf den «6ten November hinaus geschoben.

«Von *Crelle*'s Journ. fand ich das 2te, 3te und 4te Heft des 48ten «Bandes vor; das 2te enthält acht Aufsätze von *Raabe*, das 3te zwei «von *Heine* (ersten Ranges). 1. «Untersuchungen über ganze Func- «tionen,» 2. «Fernere Untersuchungen über ganze Functionen».

«Bei meiner Ankunft fand ich ferner auch ein Schreiben nebst «Diplom und Statuten der Accademia Romana Pontificia de' nuove «Lincei vor, was besagt, dass dieselbe mich schon am 22ten September «1853 zu ihrem correspondirenden Mitgliede ernannt hat. Diese Ehre «werde ich vornehmlich unserm Freunde *Chelini*[1]) zu danken haben, «da er *ordentliches Mitglied* ist, wie das Verzeichniss zeigt. Sie «könnten demselben gelegentlich wieder einmal schreiben, ihm meine «Freude und Dank melden, und ihm erzählen, dass ich Sie diesen «Sommer (Herbst) besucht habe, was Sie und was wir zusammen «treiben, etc. Es wird mir schwer werden, das Dankschreiben an «die Akademie anfertigen zu lassen; doch es hat noch Zeit. Leider «weiss ich nicht, ob die Akademie bedeutend ist, oder nur wie die «Naturforschende Gesellschaft in der Schweiz; sie beschäftigt sich «mit «lo studio, il progresso e la propagazione delle scienze», also «exakten Wissenschaften. *Böckh* sagt: «Lincei» käme von Linkeus, «der durch ein Eichenbrett sehen konnte. Ist die Akademie nicht «ganz ohne, so könnte das Faktum in einer Bernerzeitung erwähnt «werden, nicht gerade aus Eitelkeit, sondern mehr aus Thierquälerei, «nämlich der Thiere des Museums, die uns schnöde behandelten. «Sprechen Sie mit *Rettig* oder *Ries*.

«Gruss an *Mutz*, *Ries*, *Rettig*, Herr und Frau *Leuenberger*,[2]) etc.

[1]) Steiner schreibt «Chilini».

[2]) Leuenberger, † Mai 1871, war Professor der Rechte in Bern. Rettig war Professor der Philologie in Bern, lebt jetzt noch daselbst.

«Beim Redigiren wird sich wohl Anlass finden, Ihnen bald wieder zu schreiben. Indessen leben Sie wohl, d. h. gehen Sie fleissig zu Ihrer geliebten Gräfin [1]).

«Ihr dankbarer

J. Steiner.»

Berlin, 30. November 1854.

1855.

Die nachfolgenden Fragen Steiner's sind undatirt [2]):

Fragen an den Cima-Rüssel.

«1. Hat der aus einem Punkt in einer Fläche dieser umschriebene «Kegel die zugehörige Berührungsebene zur *Doppelebene* und berührt «er dieselbe längs der beiden Tangenten ihrer Schnittcurve? Und «wenn nun die Ebene mit *Rückkehrpunkten* berührt: ist sie dann eine «*Wendeebene* des Kegels (oder Rückkehrebene?); oder wenn sie mit «*Selbstberührung* schneidet, ist sie dann eine *Selbstberührungsebene* «des Kegels?

«2. Wenn sich zwei f in 1 Punkt berühren, so hat die ihnen «gemeinsam umschriebene Abweichung die Berührungsebene zur «Doppelebene und berührt sie längs der beiden Tangenten der Schnitt«curve der Flächen — ? Sie wird *Wende-* (?) *und Selbstberührungs«ebene*, wenn der Punkt ein *Rückkehr-* oder *Selbstberührungspunkt* «der Curve ist? Die Rückkehrtangente ist dann eine Asymptote in «der Involution; ist es die Selbstberührungs-Tangente auch?

«3. Der Knotenkegel n^{ten} Grads = K sendet n (n + 1) Zweige durch den Knotenpunkt, deren Tangenten, T, in K fallen; berührt eine E den K längs einer T, so hat ihre Schnittcurve mit der f^m diese T zum Selbstberührungspunkt; und für die vorhergehenden und noch folgenden, den K berührenden Ebenen, wechselt (ändert sich) die Richtung der Rückkehrtangente ihres Schnittes. Geht E frei durch T, so hat ihr Schnitt (ein Zweig desselben) die T zur wt im Kp; geht E durch zwei T eben so beide.

«4. Sie sagen bloss; «Bei einer Doppelschaar von Flächen giebt es etc.», müsste da nicht beigefügt werden «bei einer Doppelschaar von Flächen *gleichen Grads oder gleicher Klasse* giebt es etc. oder liegt *gleichen Grads* oder *gleicher Klasse* schon im Begriff der Schaar? —

[1]) Gemeint ist das Café Gräf, wo Schläfli jahrelang, d. h. bis 1876, in Pension war.

[2]) Sie beziehen sich zum Teil auf den Brief Steiners vom 25. Febr. 1855.

«Kann man bei einer Doppelschaar von «drei successiven Flächen» «sprechen, da jede gleichsam von einer Schaar **umgeben ist?**

«5. Wenn der Knotenkegel 2ten Grads **reell oder imaginär** sein «kann, so muss es doch zwischen beiden einen **Uebergangsfall geben**, «wo der Knotenpunkt *paraboloidisch* oder ein ***Rückkehrknotenpunkt*** «wird, indem der Kegel sich auf eine einzige **Gerade reducirt**, die «Rückkehrtangente des Schnitts jeder durch sie **gehenden** Ebene ist. «Besteht der Kegel aus 2 Ebenen, die *reell* oder ***imaginär*** **sind**, und «dem entsprechend der Knotenpunkt *hyperbolisch* oder ***elliptisch***, und «beim Uebergang, wo die Ebenen zusammenfallen, ***parabolisch***, so «muss zwischen diesem dem hiesigen elliptischen und dem vorigen «*paraboloidischen* Knotenpunkt wohl noch ein Unterschied obwalten.

«Wenn Ihr Phantasiegebilde über den in 2 E zerfallenen Knoten- «kegel Realität haben soll, so muss folgendes unterschieden werden. «Beim wirklichen Kegel: *hyperboloidischer* und *ellipsoidischer* Knoten- «punkt, und bei den donnstigs 2 Ebenen: *hyperbolischer* und *ellipti- «scher*. Der Uebergangsfall zwischen erstern muss dann ein *paraboloi- «discher* oder Rückkehrknotenpunkt sein, indem der ....

«6. Braucht man «*Schaar*» nicht zu definiren? Wenn Sie sagen «eine Doppelschaar von Flächen» muss da nicht zugesetzt werden «*gleichen Grads*» oder «*gleicher Klasse*»; liegt dies schon drin? «‖Steht schon oben 4.‖

«7. Da die *Klasse* der doppelt umschriebenen Abwickelbaren bei «f^m bekannt, so muss auch der *Grad* ihrer Berührungscurve daraus «zu finden sein. Denn gehen durch $P\mu$ Doppelebenen, so schneidet «seine Polare f^{m-1} jene B. C R^x in 2μ Punkten, so dass also «$(m-1)x = 2\mu$, oder $x = \frac{2\mu}{m-1}$ ist. Aber nun ist die Frage: ob R^x «nicht in *Theilcurven* zerfalle? wie z. B. bei $n = 3$, wo $R^x = R^{27}$ aus «27 Geraden besteht, was die Formel aber nicht anzuzeigen vermag, «sondern nur, da $\mu = 27$ ist, auch $x = \frac{2 \cdot 27}{3-1} = 27$ giebt.

«8. *Bei gegebenen f^m und f^n* ist die *gemeinschaftlich-umschriebene «Abwickelbare* von der $m(m-1)^2 \times n(n-1)^{2\text{ten}}$ Klasse (weil «die beiden aus P den Flächen umschriebenen Kegel beziehlich von «der $m(m-1)^2$ und $n(n-1)^{2\text{ten}}$ Klasse sind, und daher «$mn(m-1)^2(m-1)^2$ gemeinsam berührende Ebenen haben); ihre «Berührungscurven $M\mu$, $N\nu$ mit den Flächen werden daher von den «Polaren f^{m-1}, f^{n-1} beziehlich in $n(n-1)^2$ $m(m-1)^2$

m (m — 1)² n (n — 1)² Punkten geschnitten, so dass

$$\mu = m\,(m-1)\,n\,(n-1)^2,$$
$$\nu = m\,(m-1)^2\,n\,(n-1)$$

sein muss. Wären die gegebenen Flächen von der m^{ten} und n^{ten} Klasse, so wäre die Abwickelbare nur von der $m\,n^{ten}$ Klasse und für ihre beiden Berührungscurven [1]) gilt folgendes: Ist die Klasse = m, so ist ihr Grade = m (m = 1)²; also Grad der ersten Polare = m (m — 1)² — 1; daher $\mu = \frac{m\,n}{m\,(m-1)^2-1}$ und $\nu = \frac{m\,n}{n\,(n-1)^2-1}$; was auch richtig sein kann, weils für m = n = 2 stimmt; aber für m = 3 und n = 2 schon Unsinn giebt.

9. Den Berührungscurven der gemeinschaftlich umschriebenen Abwickelbaren entsprechen die längs der Schnittcurve zweier Flächen f^m und f^n diesen umschriebenen Abwickelbaren. Da die Curve vom m nten Grad ist, so wird sie von den Polaren f^{m-1} und f^{n-1} jedes Pols in m n (m — 1) und m n (n — 1) Punkten geschnitten und daher sind die Abwickelbaren beziehlich von der m n (m — 1)ten und m n (n — 1)ten Klasse. Daher müssen auch bei zwei Flächen m^{ter} und n^{ter} Klasse, die Berührungscurven der gemeinschaftlich umschriebenen Abwickelbaren, vom beziehlich m n (m — 1)ten und m n (n — 1)ten Grad sein. — Da nun durch P nur m n gemeinsame Ebenen der f^m und f^n (Klasse) gehen und die erste Polare von P auf f^m eine $f^{m(m-1)^2-1}$ ist, also die Berührungscurve $M^\mu = M^{n\,m\,(m-1)}$ in [m (m — 1)² — 1] × n m (m — 1) Punkten schneiden sollte statt nur in m n: so müssen die übrigen durch die *Doppel-* und *Rückkehrlinie* der f^m absorbirt werden; also d l und r l absorbiren = m n [(m — 1) [m (m — 1)² — 1] — 1] = m n [m (m — 1)³ — (m — 1) — 1] = n m² [(m — 1)³ — 1] Punkte; und daraus sollte folgen, wie vielfach d L und r l oder L_d und L_r für die Polare $f^{m(m-1)^2-1}$ zählen.

$$\frac{n\,m^2\,[(m-1)^3-1)}{n\,m\,(m-1)} = \varkappa L_d + \gamma L_r = \frac{m\,[(m-1)^3-1]}{m-1}$$

Nimmt man 2 Polaren $f^{m(m-1)^2-1}$ von 2 P auf f_k^m, so haben ihre Schnittcurven mit f_k^m nur m freie Punkte, statt

$$m\,(m-1)^2 \times [m\,(m-1)^2-1]^2,$$

so dass durch L_d und L_r absorbirt werden = m [(m — 1)² [m (m — 1)² — 1] — 1] = m [m (m — 1)⁴ — (m — 1)² 1].

[1]) Das Concept ist hier unklar.

«10. Hat f^m einen $KK = K^n$, so zerfällt der aus dem Kp ihr «umschriebene $K^{m(m-1)}$ in den $(n+1)$ fachen K^n und in einen $K_0^{m(m-1)-n(n+1)}$. Beim Maximum für n, bei $n = m-1$, wird also $K_0 = 0$, sowie auch 1^2 Polare $f^{m-1} = K^n = K^{m-1}$.»

Schläfli an Steiner (undatirt).

«*Lieber Freund!*

«Ich beeile mich, einige Irrthümer zu zerstören, in denen wir beide «befangen waren.

«I. In Beziehung auf eine f^3 sei A ein *Sylvester*'scher Punkt, «durch den die Kanten b, c, d gehen; a seine Gegenkante, auf ihr die «Punkte B, C, D. Die Polarebene von A berührt die Kernfläche längs «der ganzen a. Also berührt die letzte Polarenveloppe von a (der «Knotenkegel A der Kernfläche) die Kernfläche längs den drei Geraden «b, c, d und schneidet sie daher in einem *Kegelschnitt,* dessen Ebene «durch a geht.

«Auf der Kernfläche Q einer freien Basis f^n liegen $10\,(n-2)^3$ «Knotenpunkte A, deren vorletzte Polaren in zwei Ebenen zerfallen, «deren Kante a heissen soll; die Polarebene von A berührt die Kern- «fläche P längs der Kante a. Die Classe der Kernfläche Q ist somit «$4\,(n-2)\,(11\,n^2 - 52\,n + 61)$ und die Classe ihres ebenen Schnitts «$4\,(n-2)\,(4n-9)$. Die Kernfläche P ist von der Classe $4\,(n-1)^2\,(n-2)$, «ihr ebener Schnitt von der Classe $6\,(n-1)\,(n-2)^2$. — Es «giebt eine Schaar erster Polaren, deren Knotenkegel in zwei Ebenen «zerfällt; der entsprechende Pol durchläuft die Rückkehrlinie der Kern- «fläche P, für deren Grad ich $30\,(n-2)^2\,(n-3)$ gefunden habe(?). Es «giebt ferner eine Schaar erster Polaren mit zwei Knotenpunkten; der «Pol durchläuft also die *Doppellinie* der Kernfläche P; wenn der an- «gegebene Grad der Rückkehrlinie richtig ist, so muss diese Doppel- «linie vom Grade

$$2\,(n-2)^2\,(n-3)\,(4\,n^3 - 20\,n^2 + 36\,n - 45)$$

«sein. Für eine Basis f^4 hätte also die Kernfläche P eine Doppellinie «280ten Grades und eine Rückkehrlinie 120ten Grades. Bei der Unter- «suchung des Verhaltens dieser singulären Curven der Kernfläche P «zu ihrer Geraden a verwickelte ich mich aber in schreiende Wider- «sprüche. Ich bediente mich dazu des folgenden Satzes, den ich im «Allgemeinen für unzweifelhaft halte. «Ein Flächenbüschel n^{ten} Grades, «dessen sämmtliche Flächen einen Knotenpunkt K gemein haben, zählt

»4 (n—1)^3 — 11 Flächen, welche noch einen zweiten Knotenpunkt »haben, und 3 Flächen, deren Knotenkegel in K ein Ebenenpaar ist.«

»III. Jedem Gebüsch zweiten Grades entspricht ein *festes* Pentaeder; »in Beziehung auf jede Fläche des Gebüschs geht die Polare eines »Ecks A von den 10 des Pentaeders durch die Gegenkante a. In »Beziehung auf den Gebüschs-Kegel, dessen Scheitel A ist, sind die »von hier ausgehenden Kanten b, c, d ein harmonisches Tripel.

»Alle 10 Ecken des Pentaeders liegen auf der R^6 (Tangenten- »fläche vom 16ten Grade und von der 30sten Classe), der Knotencurve »des Gebüschs; aber sonst giebt es kein Pentaeder von dieser Eigen- »schaft. Die Basen dritten Grades, deren jede das gegebene Gebüsch »in ihrem Netze erster Polaren enthält, bilden eine Schaar, von der »durch jeden Punkt des Raums 4 Flächen gehen, und haben jenes »Pentaeder als *Sylvester*'sches gemein. Ist λ ein Faktor, der von Fläche »zu Fläche sich ändert, und sind v, w, x, y, z die Polynome des Pentaeders, »so ist die Gleichung irgend einer Fläche der Schaar

$$\frac{v^3}{\lambda A + A'} + \frac{w^3}{\lambda B + B'} + \frac{x^3}{\lambda C + C'} + \frac{y^3}{\lambda D + D'} + \frac{z^3}{\lambda E + E'} = 0;$$

»der Pol irgend einer bestimmten Fläche des Gebüschs bewegt sich »in einer Geraden, wenn die Base sich ändert. Die entsprechenden Kern- »flächen bilden einen Büschel, dessen Grundcurve aus jener R^6 und den »10 Kanten des Pentaeders besteht. Die Umhüllungsfläche der Schaar »von Basen dritten Grades ist vom 18ten Grade und der 216ten Classe, »hat eine Doppellinie 45ten Grades und als Umhüllte ihrer erzeugenden »Curven 9ten Grades eine R^{27}, welche jede Pentaederebene in 9 Punkten »dreipunktig passirt und als die charakterische *Rückkehrlinie* bezeichnet »werden kann; ausserdem aber hat die Umhüllungsfläche in jeder Pen- »taederebene eine C^8 als Rückkehrlinie, welche dreimal gezählt als er- »zeugende Curve auftritt, und im Schnitt der Pentaederebene mit der »Umhüllungsfläche nur zweimal zählt; dieser Schnitt besteht nämlich »noch aus einer C^{12}, die jene 9 Punkte zu Rückkehrpunkten hat, in »denen sie von der C^8 berührt wird.

»So viel in Beziehung auf jene zwei Irrthümer, die R^5, in der »die Kernfläche der f^6 von einem ihrer Knotenkegel geschnitten werden »sollte — und das längs der Knotencurve eines Büschels zweiten Grades »fortrückende Pentaeder. — Ich lege Ihnen nun hier zur Beurtheilung »vor die Art, wie ich ein Flächennetz n^{ten} Grades zu behandeln ge- »dächte.

»Wenn ein Netz von Flächen n^{ten} Grades gegeben ist, so kann

»man irgend 5 desselben auswählen, von denen keine 4 einem und »demselben Gebüsch angehören. Dann lasse man in einem räumlichen »System von Punkten irgend 5 Punkte, von denen keine 4 in einer »Ebene liegen, jenen 5 Flächen entsprechen. Verlangt man nun, dass »jeder Fläche des Netzes ein Punkt des räumlichen Systems in der »Weise entspreche, dass die Punkte in einer Geraden liegen, so oft »die Flächen einen Büschel bilden, so ist diese Aufgabe möglich und »völlig bestimmt; und zugleich werden je 4 Flächen eines Büschels »dasselbe perspectivische Doppelverhältniss haben, wie die 4 ent»sprechenden in einer Geraden liegenden Punkte. Der einer Fläche »des Netzes entsprechende Punkt soll ihr *reciproker* Punkt heissen.

»Für irgend einen Pol P bilden nun die ersten Polaren (und da»her überhaupt die irgendwievielten) aller Flächen des Netzes wieder »ein Netz, welchem genau das vorige räumliche Punktsystem entspricht. »Verlangt man jetzt, dass das Netz der ersten Polaren einen Grund»punkt X habe, so wird der Pol P genöthigt, sich auf einer Fläche »$4(n-1)^{\text{ten}}$ Grades (*Polfläche*) zu bewegen, während der Grundpunkt X »eine Fläche 4 $(n-1)^{\text{ten}}$ Grades (*Knotenfläche*) durchläuft. Die letztere »ist zugleich der Ort aller Punkte X, deren Polarebenen in Beziehung »auf sämmtliche Flächen des Netzes durch einen und denselben Punkt »P gehen.

»Verlangt man ferner, dass eine Fläche φ des Netzes einen »Knotenpunkt habe, so bewegt sich ihr reciproker Punkt A auf einer »Fläche 4 $(n-1)^{\text{ten}}$ Grades (*reciproke Fläche*), und der Knotenpunkt »X liegt nothwendig auf der schon erwähnten Knotenfläche. Man könnte »noch denjenigen zu X und P reciproken Punkt B anzeichnen, für des»sen Netzfläche φ (ohne Knotenpunkt und nicht durch X gehend) die »erste Polare von P den Grundpunkt X zum Knotenpunkt hat.

»Ich will nun der Reihe nach an die reciproke Fläche in A, »an die Knotenfläche in X und an die Polfläche in P *Berührungsebenen* »legen. 1° Alle Flächen des Netzes, welche durch X gehen, bilden »ein Gebüsch und haben den Strahl XP zur gemeinschaftlichen Tan»gente; ihre reciproken Punkte liegen also in einer Ebene, und diese »berührt die reciproke Fläche in A. Wenn insbesondere die reciproken »Punkte in einer durch A gehenden Tangente der reciproken Fläche »liegen, so bilden die zugehörigen Flächen des Netzes einen Büschel »und berühren sich alle in X. Umgekehrt: je zwei Flächen des Netzes »können sich nirgends berühren, als auf der Knotenfläche, z. B. in X, »und der Strahl, welcher ihre reciproken Punkte verbindet, wird dann

»die reciproke Fläche im zugeordneten Punkte A berühren. 2° Die »erste Polare von P in Beziehung auf die Fläche des Netzes, welche »den zugeordneten Punkt X zum Knotenpunkt hat, berührt die Polfläche »in X; oder, was auf dasselbe hinauskömmt, die Polarebene von P »in Beziehung auf den Knotenkegel der genannten Fläche φ ist die Be»rührungsebene der Knotenfläche in X. 3° Die letzte Polare des Punkts »X in Beziehung auf die Fläche φ des Netzes, für welche die erste »Polare von P den Knotenpunkt X hat, ist die Berührungsebene der »Polfläche in P.

»Hat *im Besondern* das ursprüngliche Netz einen Grundpunkt X, »so geht die Knotenfläche durch diesen und hat ihn zum Knotenpunkt; »ebenso die Polfläche, indem dann P und X zusammenfallen; endlich »hat auch die reciproke Fläche den reciproken Punkt A zum Knoten»punkt. Bei der Knotenfläche und der Polfläche fällt der Knotenkegel »mit demjenigen der entsprechenden Fläche φ des Netzes zusammen; »und wenn X und P sich unendlich wenig vom Grundpunkt entfernen, »so liegen sie in einem und demselben Strahl des Knotenkegels. Legt »man nun durch einen solchen eine Berührungsebene an den Knoten»kegel, so bilden alle Flächen des Netzes, welche diese Ebene im »Grundpunkt berühren, einen Büschel, dessen reciproke Punkte den »entsprechenden Strahl des Knotenkegels der reciproken Fläche in A »bilden.

»Verlangt man, dass die letzten Polaren eines Punkts X in Be»ziehung auf alle Flächen des Netzes sich in einer Geraden schneiden, »so unterwirft man den Punkt X vier unter sich unabhängigen Bedin»gungen; es wird also im Allgemeinen keinen solchen Punkt X geben, »dessen zugehöriger Pol sich in einer Geraden bewegen kann, und »daher kann die Knotenfläche keinen Knotenpunkt haben.

»Beim Flächengebüsch n^{ten} Grades will ich ähnliche Zeichen ge»brauchen, wie beim Netz; nur haben wir jetzt statt des Poles P einen »Polstrahl p, in dem alle Polarebenen des Punktes X sich schneiden; »ein einzelner Punkt auf p möge P heissen. Die von p beschriebene »geradlinige Fläche heisse *Polfläche*. Die von X beschriebene *Knoten»curve* ist vom $6\,(n-1)^{2ten}$ Grade, ihre Tangentenfläche ist vom Grad »$4\,(n-1)^2\,(7n-10)$ und von der Classe $6\,(n-1)^2\,(14n-23)$. Die »Tangente der Knotencurve in X ist der Polstrahl der Ebene (Xp) in »Beziehung auf den Knotenkegel der Gebüschfläche in X, d. h. die »Grundcurve des Büschels erster Polaren von p in Beziehung auf die »Fläche des Gebüschs, welche X zum Knotenpunkt hat, berührt die

»Knotencurve in X. Ist ein Punkt P auf p gegeben, durch den man »eine Berührungsebene an die Polfläche legen soll, so wird das gege»bene Flächengebüsch einen Büschel enthalten, in Beziehung auf welche »die ersten Polaren von P die Knotencurve in X berühren; dann ist »die gemeinschaftliche letzte Polare von X in Beziehung auf alle ur»sprünglichen Flächen des genannten Büschels die verlangte Berührungs»ebene. Die reciproken Punkte aller durch X gehenden Gebüschflächen »liegen auf der Tangente der *reciproken Curve* in A; diese ebene Curve »ist vom Grade 4 $(n-1)^3$. — Die geradlinige Polfläche ist von Grad »und Classe 8 $(n-1)^8$.

»Mittelst des schiefen Fünfseits $a_1\ a_2\ a_3\ a_4\ a_5$ und der Axe e können »also Geraden, wie folgt, linear construirt werden. b_1 geht durch die »Punkte, in denen die Ebene $(a_3\ a_4)$ von a_1 und e geschnitten wird; »c_1 durch die Punkte, in denen die Ebene $(a_1\ b_1)$ von b_5, b_2 geschnitten »wird; d_1 durch die Punkte, in denen die Ebene $(b_1\ e)$ von a_5, a_2, c_3, »c_4 geschnitten wird; d_1' ist Durchschnitt der Ebenen $(a_2\ d_3)$, $(a_5\ d_4)$, »$(c_3\ d_5)$, $(c_4\ d_2)$; endlich e′ Durchschnitt der Ebenen $(b_1\ d_1')$, $(b_2\ d_2')$, »etc. Resultat: 5 Dreiseite $(a_3\ a_4\ b_1)$, 5 $(a_1\ b_1\ c_1)$, 5 $(b_1\ c_5\ c_2)$, 10 $(a_1\ d_5\ d_2')$, »10 $(c_1\ d_3\ d_4')$, 5 $(b_1\ d_1\ e)$, 5 $(b_1\ d_1'\ e')$.«

Steiner an Schläfli.

»*Monsignore, treuer Freund!* (28. Januar 55.)

»Dass Sie denken, ich sei böse, geschieht Ihnen ganz recht. »Ich möchte es sein, über mich und Sie. Die schöne Hoffnung mit »der ich nach Bern kam, ist nun dahin; ich habe auch im Dezember »keine Abhandlung vorgelegt. Hätten Sie doch damals nur meine »aphoristischen Sätze revidirt, worum ich Sie bat, so war die Sache »abgethan. Jetzt sehe ich nicht wo ein wo aus. Geistige Kraftlosig»keit und körperliche Leiden machen die Vollendung der Arbeit fast »unmöglich, zumal da ich auf den Zopf anbiss, den Gegenstand nach »Ihren Andeutungen vollständiger zu behandeln. Länger als 2 Monate »quälte ich mich mit leidigen Spezialitäten ab, ohne Sie zu bewäl»tigen und ohne sie los zu werden; diese Bemühungen wechseln ab »oder werden unterbrochen durch Schmerzen, Einschlafen, Luft»schlösser über Crimm, Donau und ganze Türkei. Schon in Bern »— wie Sie wissen — hatte ich etwas Rheumatismen (durch das Ge»mäuer — oder Beaujolais?), der auf der Reise und hier steigend »fortdauerte und gleich am folgenden Tage, wo ich Ihnen schrieb,

in heftiges Podagra ausartete, das mich 12 Tage zu Hause bannte. Nachdem ich 9 Tage wieder aushinkte, kam ein noch stärkerer Anfall, der mich einmal vor Schmerz brüllen machte und wieder 10 Tage ins Zimmer bannte; und so gieng es fort, dass ich bis jetzt in 5 *Stören* das Zimmer hüten und die Vorlesungen aussetzen musste. Da ich die letztern, der Leiden wegen, erst am 15. November begann und auch gleich wieder unterbrach, so habe ich wenig Zuhörer, nur 6—8, wovon nur 4 regelmässig kommen. Wenn oft auch die Schmerzen vorüber, so kann ich doch tagelang nicht ausgehen, weil die Füsse so geschwollen sind, dass sie nicht in die Stiefel gehen. — Dabei hat mich etwas frappirt: welches ist das *Einzige* Mittel, das diese Art Schmerzen lindert?! — Ihre Lieblingsblume — die Kiltblume!

«Was ich Ihnen vor 2 Monaten schreiben wollte, ist halb vergessen oder liegt verworren in meinem Kopf, wiewohl ich stets an derselben Sache geknabert habe (darob auch die Redaction ausgesetzt — seit 8. November — soll aber nächstens wieder beginnen). Da ich schwer dazu komme meine früheren Manuscripte oder Ihre Briefe gehörig nachzulesen, so wäre es möglich, dass ich hier Fragen aufwerfe, die einfältig sind, oder die Sie schon erledigt, oder gar allgemeiner beantwortet haben. Schad't nichts.

«1. Der Name «*Gebüsch*» geht nicht, denn es ist ein Netz, gleich dem in der Ebene, ein *Plannetz*, oder ein *einfaches* Netz entgegen dem *vollständigen*. Oder kann man es *Netzbasis* nennen? wie 3 Punkte A, B, C die Basis des Tetraeders A B C D bestimmen. Aber dann fordert die Bezeichnung 2 Buchstaben = N b (f^n). Das Wort *Netz* sollte aber vorkommen: als *Netzbasis*, he?

«2. Die singuläre Ebene, die eine Fläche längs einer Curve berührt, ist fast nicht zu benennen; kann man sie *Dehnebene* heissen da sie das Widerspiel des Knotenpunkts ist? dann hiesse jene Curve die *Dehncurve*, *Dehnkegelschnitt*.

«3. Wo Sie sagen: «Der *Knotenkegel* zerfalle in zwei *Ebenen*», schien mir, er reducire sich auf die *Schnittlinie* der Ebenen auf die Knotenkante, ohne dass der Scheitel des Kegels seine Existenz aufgiebt. Dass der Schnitt jeder dieser zwei Ebenen mit der f^n drei freie Zweige durch den Knotenpunkt sendet, vermag ich nicht anzuschauen, vielmehr kommen mir die Ebenen als diejenigen vor, deren Schnitt sich im Knotenpunkt *selbst berührt*, die Knotenkante zur *Selbstberührungstangente* hat. Die zwei Ebenen sind gewisser-

«massen *Wendeebenen* der f^n, daher der Wechsel von dem einen Paar «ihrer Scheitelwinkel in das andere. — (Der Schnitt C^n jeder 3ten durch «den Knotenpunkt gehenden Ebene mit f^n hat ihre Schnitte mit den «zwei Ebenen zu Tangenten im Knotenpunkt. Wollte was sagen, aber «ist nichts.)

«Den einen der zwei Irrthümer, die Sie im Brief vom 15. No- «vember zerstören, hatte ich bereits selbst bemerkt, nämlich: «dass «der *Sylvester*'sche Knotenkegel die Kernfläche P^4 längs dreier Geraden «berührt.» Ich (komme) bei Betrachtung der 2ten Polar-Enveloppe einer «Ebene in Bezug auf Basis f^3, die 3ten Grads und 4. Klasse ist und «4 Kp hat, darauf, wo ebenfalls jeder Knotenkegel längs der 3 «Strahlen die nach den übrigen 3 Kp gehen, berührt. — Den Plan «zur Behandlung des Netzes $N(f^n)$, habe ich schon früher entworfen, «und werde seiner Zeit Ihrem gewaltigen Rüssel das Nöthige unter- «breiten.

«4. Zu den Flächen gehört wohl auch noch das: Eine einfache «Schaar gerader Linien liegen in einer speziellen Fläche, die *geradlinig* «heissen soll (surface réglée); die Doppelschaar der sie berührenden «Ebenen, besteht aus der Schaar Ebenenbüschel, die jene Geraden «zu Axen haben. Diese Fläche hat ferner die Eigenthümlichkeit: 1) «dass ihr Grad und ihre Klasse gleich sind; 2) dass auch ihre Polar- «figur (auf Basis f^2) ihr an Grad und Klasse gleich ist. Es giebt nur «eine Fläche, die zwei Schaaren Gerade hat (Hyperboloid), die andern «können nur höchstens zwei Gerade haben, die nicht zur Schaar ge- «hören.

«5. Ich wollte synthetisch die Zahl der Punkte finden, durch die «C^n und f^n bestimmt sind, nach Art der unbestimmten Coefficienten; «sagen Sie, ob ich den folgenden Beweis geben darf, ohne mich lächer- «lich zu machen, indem doch ein analytischer Grund dahinter steckt. «Gesetzt jede C^n werde durch dieselbe Zahl $= N$ gegebenen Punkte «a bestimmt. Liegen von denselben $n+1$ in einer Geraden C', so «muss die Curve zerfallen in $C' + C^{n-1}$, und es muss C^{n-1} durch die «übrigen $N-n-1$ Punkte a bestimmt sein; folglich erfordert die um «*einen* Grad höhere Curve zu ihrer Bestimmung so viele Punkte mehr, «als der Grad der niedrigern $+2$ beträgt. Da nun die Linie 1ten «Grads durch 2 Punkte bestimmt ist: so erfordert die 2ten Grads um «$1+2=3$ mehr, $=5$, die 3ten Grads wieder um $2+2$ mehr «u. s. w., folglich ist C^n durch $2+3+4+\cdots+n+1=$ «$\frac{1}{2}(n+1)(n+2)-1$ Punkte bestimmt. — Jede f^n werde durch

eine gleiche Zahl N Punkte bestimmt. Liegen von denselben $\frac{1}{2}(n+1)(n+2)$ in einer Ebene f^1, so muss f^n aus $f^1 + f^{n-1}$ bestehen, und somit f^{n-1} durch die $N - \frac{1}{2}(n+1)(n+2)$ übrigen Punkte bestimmt sein; d. h. eine f^{x+1} erfordert zu ihrer Bestimmung $\frac{1}{2}(x+2)(x+3)$ Punkte mehr als eine f^x; nun erfordert f^1 nur 3 Punkte, die f^2 mehr $\frac{1}{2}(1+2)(1+3)$, u. s. w., so dass also f^n durch $3 + 6 + \cdots + \frac{1}{2}(n+1)(n+2) =$

$$\frac{1}{6}(n+1)(n+2)(n+3) - 1$$

Punkte bestimmt ist, $= \frac{1}{6}(n+1)^{3|1} - 1$. *Schweins*[1]) und Consorten schreiben eine Facultät $(a+u)(a+2u)\cdots$ $(a+nu)$ kurz $(a+u)^{n|u}$ und ebenso $(a-u)(a-2u)\cdots(a-nu) =$ $(a-u)^{n|-u}$; $\frac{(a+1)(a+2)\cdots(a+n)}{1\cdot 2\cdot\cdots\cdot n} = \frac{(a+1)^{n|1}}{1^{n|1}}$, etc.

6. Daraus (5.) entsprang folgendes Verfahren um Ihre zwei Sätze (nebst andern analogen) zu beweisen. Die zu bestimmende Fläche f^n zerfällt in 2 Theile, etwa $f^\alpha + f^\beta$ $(\alpha+\beta=n)$, sobald die gegebenen $\frac{1}{6}(n+1)^{3|1} - 1$ Punkte a sämmtlich in diesen zwei Flächen liegen, jedoch dürfen auf keiner weniger Punkte liegen, als ihre Bestimmung erheischt, also beziehlich nicht weniger als

$$\frac{1}{6}(\alpha+1)^{3|1} - 1 \text{ und } \frac{1}{6}(\beta+1)^{3|1} - 1;$$ daher bleiben

$$\frac{1}{6}(n+1)^{3|1} - 1 - \left[\frac{1}{6}(\alpha+1)^{3|1} - 1 + \frac{1}{6}(\beta+1)^{3|1} - 1\right] =$$

$$\frac{1}{2}\alpha\beta(n+4) = \frac{1}{2}\alpha(n-\alpha)(n+4)$$

Punkte frei, d. h. nach Belieben auf die beiden Flächen f^α, f^β zu vertheilen, und es ist ihre Zahl zugleich *die Zahl der Bedingungen, damit f^n in diese zwei Flächen zerfällt.* Diese Zahl ist also um

---

[1]) Schweins, Franz Ferdinand, geb. 24. III 1780 † 15. VII. 1856 Professor der Mathematik in Heidelberg. Lehrer Steiners.

«so grösser, je mehr α und β sich $\frac{1}{2}$n nähern, oder je kleiner ihr «Unterschied. — Wie geht's nun weiter? — Soll f^n in $f^\alpha + f^\beta + f^\gamma$ «zerfallen, so ist die Zahl der Bedingungen

$$= (\alpha + \beta + \gamma + 4)\ (\alpha\beta + \alpha\gamma + \beta\gamma) - \alpha\beta\gamma;$$

«und soll f^n in n Ebenen zerfallen, so ist die Zahl der Bedingungen,

$$= \frac{1}{6}\ (n+1)^{3|1} - 1 - 3n = \frac{1}{6} n\ (n-1)\ (n-7).$$ [1])

«Von den f^n bestimmenden Punkten dürfen also auf einer ge- «gegebenen Fläche f^α höchstens nur

$$\frac{1}{6}\ (n+1)^{3\,1} - \frac{1}{6}\ (\beta+1)^{3|1} = \frac{1}{2}\alpha\beta\ (n+4) + \frac{1}{6}\ (\alpha-1)^{3|1} - 1$$

$$= \frac{1}{2}\ \alpha\ (n-\alpha)\ (n+4) - 1 + \frac{1}{6}\ (\alpha+1)^{3|1}$$

«frei gewählt werden; (denn nähme man darauf nur einen Punkt «mehr an, so wäre durch die übrigen die andere Theilfläche f^3 nicht «mehr bestimmt, also auch die ganze f^n ($= f^\alpha + f^\beta$) nicht). Lässt man «nun von dieser höchsten Zahl Punkte auf f^α einen Punkt ganz weg, «so ist f^n nicht mehr bestimmt, sondern es findet ein $B(f^n)$ statt, «worin $f^\alpha + f^\beta$ ein spezielles Glied ist, so dass die Grundcurve des- «selben aus zwei Theilen $R^{\alpha n} + R^{\beta n}$ besteht, die auf f^α und f^β liegen, «durch die auf diesen befindlichen gegebenen respective

«$\frac{1}{2}\ \alpha\ (n-\alpha)\ (n+4) + \frac{1}{6}(\alpha+1)^{3|1} - 2$ Punkte a und

«$\frac{1}{6}\ (\beta+1)^{3|1} - 1$ Punkte b gehen. Wird nun einer der Punkte b im «beliebig versetzt, so ändert sich die Fläche f^β und es entsteht ein Raume «neuer Flächenbüschel, ($B_1\ f^n$), sowie auch eine neue Curve $R_1{}^{\beta n}$, statt «$R^{\beta n}$, aber wohin auch jener Punkt gerückt werden mag, immer bleibt «er in irgend einer Fläche des vorigen Büschels, so dass also beide «Büschel diese Fläche gemein haben, und folglich auch deren Schnitt «mit der Fläche f^α, jene $R^{\alpha n}$, ein gemeinschaftlicher Theil der Grund- «curven beider Büschel ist. Da man aus der neuen Fläche f^β aufs «Neue einen Punkt versetzen kann und dadurch zu einem neuen «Büschel $B_2\ (f^n)$ gelangt, der durch die nämliche Curve $R^{\alpha n}$ auf f^α «geht, so ist dadurch Ihr Satz erwiesen: «*dass auf einer Fläche f^α nur*

[1]) Hier hatte Steiner im Concept noch folgende bezeichnende Stelle:
«Mangen Sie das und geben's mir gut gekaut wieder, auch das «folgende; denn sowie Formeln kommen, bin ich blödsinnig.»

$\frac{1}{2}\alpha(n-\alpha)(n+4)-2+\frac{1}{6}(\alpha+1)^{3|1}$ *Punkte a gewählt werden dürfen, wenn eine* f^n *durchgehen soll»; und «dass alle durchgehenden* f^n, *die* $\left[\frac{1}{6}(n-\alpha+1)^{3|1}-2\right]$*fache Schaar* f^n, *die* f^α *in der nämlichen Vollkurve* $R^{\alpha n}$ *schneiden, die somit durch jene Punkte bestimmt ist.»* — Wird ferner einer der Punkte α aus der Fläche f^α beliebig in Raum versetzt und nachher ganz weggelassen, so entsteht ein $G(f^n)$, und werden sodann die Punkte b (auf $f\beta$) einer nach der andern versetzt, so schliesst man weiter: «dass alle f^n, die durch gegebene $\frac{1}{2}\alpha(n-\alpha)(n+4)-3+\frac{1}{6}(\alpha+1)^{3|1}$ Punkte a auf einer f^α gehen auch noch durch $\frac{1}{2}\alpha n(n+\alpha-4)+1-\frac{1}{6}(\alpha-1)^{3|-1}$ nothwendige Punkte a auf dieser Fläche f^α gehen»; oder «dass jede Vollcurve $R^{n\alpha}$, die durch jene Punkte a geht, die Fläche f^α auch noch in diesen nothwendigen Punkten a_0 durchbohrt.»

«7. Ich glaube früher bei ebenen Curven gefunden zu haben: «dass wenn C^n durch die $\alpha\beta$ Schnittpunkte a von C^α und C^β gehen soll, $n>\alpha>\beta$, dann die Zahl der Nothwendigen

$$=\frac{1}{2}(\alpha+\beta-n-1)(\alpha+\beta-n-2)$$ sei; d. h. geht C^n durch

$$«\alpha\beta-\frac{1}{2}(\alpha+\beta-n-1)(\alpha+\beta-n-2)$$

der $\alpha\beta$ Punkte a, so geht sie auch durch die übrigen. Die C^n ist daher bestimmt, wenn sie, ausser durch die $\alpha\beta$ Punkte a, noch durch andere gegebene

$$«\frac{1}{2}n(n+3)+\frac{1}{2}(\alpha+\beta-n-1)(\alpha+\beta-n-2)-\alpha\beta=$$

$$(n+1)(n+2)-\frac{1}{2}(\alpha+\beta)(2n+3)+\frac{1}{2}(\alpha^2+\beta^2)-1$$

Punkte b gehen soll; also bei $\alpha=\beta$, durch

$«(n+1)(n+2)-\alpha(2n+3)+\alpha^2-1$, und bei $\alpha=\beta=n-1$ durch 5 Punkte b gehen soll, was nur für $n=2$ nicht stimmt. — Um die analogen Sätze für die Flächen zu finden, habe ich mich wochenlang verrechnet, darob die Besinnung verloren, dass ich nicht weiss, was wahr oder falsch ist. Im Folgenden einige Proben, und dann wenden Sie den Entwurzler an.

«8. Enthält ein Flächenbüschel $B(f^n)$ zwei zerfallene Glieder

«nicht in C^{n-1} liegt. Jedes Glied f^n des $G(f^n)$ wird von allen «andern in ebenen Curven C^{n-1} geschnitten, deren Ebenen E «sämmtlich durch die derselben angehörige Gerade g gehen; «und umgekehrt: legt man durch irgend eine, durch den «ausgezeichneten Punkt g_0 gehende Gerade g einen B(E), «so schneidet jede E die R^{n^2-n+1}, ausser in g_0, in n(n—1) «Punkten, die in einer C^{n-1} liegen und die $S(C^{n-1})$ liegen «in einem Glied f^n des $G(f^n)$, so dass also $G(f^n)$ durch R^{n^2-n+1} «und G(g) um g_0 sich Glied gegen Glied entsprechen. Der- «jenigen Geraden $t(= g)$, welche Tangente der R^{n^2-n+1} in «g_0 ist, entspricht eine $f_0^n(= f^n)$, die g_0 zum Knotenpunkt «hat; die Schmiegungsebene der R^{n^2-n+1} berührt den Kno- «tenkegel längs t. Durch zwei frei gewählte Punkte ist eine «f^n bestimmt; drei f^n können ausser R^{n^2-n+1} keinen Punkt «gemein haben (wohl eine C^{n-1}). — Was folgt, wenn die «bestimmenden Flächen f^n und f_1^n durch eine R^{n-1} statt C^{n-1} «gehen? oder nur durch C^{n-2}? etc. — Soll eine f^n durch «$\frac{1}{6}(n+1)^{3|1}$—3 beliebig gewählte Punkte in R^{n^2-n+1} gehen, «so enthält sie diese ganz und ist Glied des $G(f^n)$; ist ein «Punkt weniger gegeben, so geht sie durch «$\frac{1}{6}(n^2-1)(5n-12)+1$ nothwendige Punkte auf R^{n^2-n+1}.(?)

II. «*Gegeben $B(f^n)$.* Für jeden Pol p ist die Pampolare eine «Fläche p^{2n-1} die durch die Grundcurve R^{n^2} und durch die «$4(n-1)^3$ Knotenpunkte π des $B(f^n)$ geht, sowie auch durch «die Grundcurve $R^{(n-1)^2}$ des $B(f^{n-1})$ erste Polaren von p auf «$B(f^n)$, und auch durch p selbst. Die erste Polare von p auf «seine Pampolare p^{2n-1} ist eine Fläche $p^{2(n-1)}$, die auch durch «jene R^{n^2} und p geht; der aus p seiner Pampolare p^{2n-1} um- «schriebene Kegel K zerfällt in 3 Theile: 1) in die Berühr- «ungsebene in p, zählt für 2 Grade; 2) in den durch die «R^{n^2} gehenden Kegel $K_1^{n^2}$, der in R^{n^2} selbst berührt; und «3) in einen andern Kegel t^x (dessen Grad x bestimmt ist «und die t-Tangenten im Doppelpampolare der durch p gehen- «den in Glieder des $B(f^n)$ berührenden Ebenen sind). *Liegt «p insbesondere in der Grundcurve R^{n^2}, so ist er ein drei- «facher Knotenpunkt seiner Pamporalen p^{2n-1}.* Die allen p «des Raumes entsprechenden Pamporalen bilden eine $N(p^{2n-1})$,

•das die R^{n^2} zur *partiellen Grundcurve* und jene $4(n-1)^6$ •Knotenpunkt π zu Grundpunkten hat. Die Kernfläche P^x •des $N(p^{2n-1})$ hat die R^{n^2} zur zwei- (oder drei-) fachen Linie, •und die π zu Knotenpunkten. Allen p in einer gegebenen •Ebene E entspricht ein $G(p^{2n-1})$, dessen *Kerncurve* R^y (Ort •der Knotenpunkte) aus R^{n^2} + einer durch die $4(n-1)^3$ •π gehenden Curve R^{y-n^2} besteht; dieses $G(p^{2n-1})$ hat, ausser •der R^{n^2} und den $4(n-1)^3 \cdot \pi$, auch noch die $3(n-1)^2$ Punkte •zu Grundpunkten, in welchen die E von Gliedern des $B(f^n)$ •berührt wird. Die R^{n^2} vertritt daher $(2n-1)^2 - 4(n-1)^3$ •$-3(n-1)^2 = (4n-3)n^2$ Grundpunkte des $G(p^{2n-1})$. — Zum •$B(f^n)$ gehören eine Schaar Kernflächen $P^{4(n-2)^3}$; sie erfüllen •den Raum $4(n-2)^3$-fach, d. h. durch jeden p gehen so viele •derselben; jede $P^{4(n-2)^3}$ schneidet ihre f^n in einer $R^{4n\,(n-2)^3}$ •$= R_0$; liegt p insbesondere in der R^{n^2}, so gehen auch •$4(n-2)^3$ solche R_0 durch ihn und deren zugehörige Rück- •kehrtangenten t_0 (nicht Tangenten der R_0) liegen sämmtlich •im Knotenkegel der zugehörigen Pampolare p_0^{2n-1}. Ist der •Ort aller R_0 eine Fläche f^z? und hat dieselbe die R^{n^2} zur •4-fachen Linie? $[z = 4n + 4(n-2)^3$?]. — Wie viele Rück- •kehrtangenten t_0 aller Glieder des $B(f^n)$ gehen durch einen •freien Pol p? — Wenn f^m durch die R^{n^2} des $B(f^n)$ geht, •wie viele f^n berührt sie dann in R^{n^2} selbst, und wie viele •auswärts? $m > n$.

•12. Auch sehr viel an Folgendem abgemüht: •Wie viele Glieder innen bei $B(f^n)$ oder $G(f^n)$ oder $N(f^n)$ in Theile zerfallen und wie mannichfacher Art können die Theile sein?• •Kann bei $B(f^n)$ die ^{2} in Theile zerfallen, ohne dass auch Glieder f^n zerfallen, und e?• Näheres:

I. •*Vom $B(f^n)$.* Soll dieser zerfallene Glieder enthalten, so sind •es im Allgemeinen nur zwei, $f^a + f^c$, $f^b + f^\beta$, wobei dann •die R^{n^2} aus 4 Theilen besteht (8). Im Besondern kann aber •$B(f^n)$ mehr zerfallene Glieder enthalten, namentlich wenn •$n = \nu \cdot \alpha$ ist. Nämlich 1) ist $n = 2\alpha$, so kann $B(f^n)$ drei •Glieder von der Form $f^\alpha + f_1^\alpha$ haben, wobei die Grundcurve •R^{n^2} aus vier Curven R^{α^2} besteht (die wie die Ecken eines •Vierecks und jene drei Glieder wie die 3 Paar Gegenseiten •desselben anzusehen sind). 2) ist $n = 3\alpha$, so kann der •$B(f^n)$ vier Glieder von der Form $f^{2\alpha} + f^\alpha$ haben (durch drei

«ist das 4te bestimmt); die vier Theilflächen f^{α} gehen alle durch «dieselbe Curve R^{α^2}, und die vier $f^{2\alpha}$ schneiden sich zu 3 und «3 in vier Curven $R^{2\alpha^2}$, jede geht durch drei der letztern, «und durch jede $R^{2\alpha^2}$ geht auch je eine f^{α}; so besteht also «R^{n^2} aus 5 Theilen, $= R^{\alpha^2} + 4\, R^{2\alpha^2}$. 3) ist $n = 4\,\alpha$, so «kann es 5 Glieder $f^{3\alpha} + f^{\alpha}$ geben, wobei alle fünf f^{α} durch «eine R^{α^2} gehen, u. s. w. Und ist $n = x\,\alpha$, so kann es $x + 1$ «Glieder $f^{(x-1)\alpha} + f^{\alpha}$ geben, wobei die $x + 1$ Theilflächen «f^{α} durch eine und dieselbe R^{α^2} gehen und jede f^{α} sich mit «den ihr nicht zugehörigen x Flächen $f^{(x-1)\alpha}$ in einer und «derselben $R^{(x-1)\alpha^2}$ schneidet, so dass

$$R^{n^2} = R^{\alpha^2} + (x + 1)\, R^{(x-1)\alpha^2}$$

«ist. So kann der $B(f^n)$ insbesondere auch $n + 1$ Glieder «von der Form $f^{n-1} + f^1$ haben, wobei dann die $n + 1$ «Ebenen f^1 durch dieselbe Gerade R^1 gehen, und die Grund- «curve R^{n^2} aus diesen Geraden R^1 und aus $n + 1$ ebenen «Curven C^{n-1} besteht. — Durch wie viele dieser $n + 1$ Glieder «werden die übrigen *nothwendig?*

«Der $B(f^n)$ kann aber auch in der Art drei zerfallene «Glieder $f^a + f^{\alpha}$, $f^b + f^{\beta}$ und $f^c + f^{\gamma}$ enthalten, dass sich die «Theilflächen, wie etwa f^a und f^b, nicht in *ganzen* sondern in «*zerfallenen* Curven schneiden, also etwa in zwei Curven A «und B, so dass Schnitt $(f^a f^b) = A + B$, oder was wir kurz «so bezeichnen wollen: $a\,b = A + B$. Besteht dergestalt der «Schnitt je zweier nicht zusammgehöriger Theilflächen aus *zwei* «Theilen, so stellt sich die Verbindung wie folgt dar:

$a\,b = A + B$	$a\,c = A + D$	$b\,c = A + H$
$a\,\beta = C + D$	$a\,\gamma = B + C$	$b\,\gamma = B + G$
$\alpha\,\beta = E + F$	$\alpha\,c = E + H$	$\beta\,c = D + E$
$\alpha\,b = G + H$	$\alpha\,\gamma = F + G$	$\beta\,\gamma = C + G$

«Dabei besteht R^{n^2} aus den 8 Curven A, B, C, ... H; «durch jede von diesen gehen 3 Theilflächen der 3 zerfallenen «Glieder, wie f^a, f^{β} und f^c durch D. Sind die Grade a, α, b, «β, c, γ einzeln gegeben und man nimmt den Grad einer der «8 Curven A, B, ... H beliebig an, so sind die Grade der «7 andern bestimmt.

«Wenn ferner die Schnittcurve je zweier Theilflächen in «3 Theile zerfällt, also $(f^a f^b)$ oder $a\,b = A + B + C\ (= R^{ab})$ «ist, wobei dann die zwei Glieder $f^a + f^{\alpha}$ und $f^b + f^{\beta}$ zwölf

»solche Partialcurven bewirken, die zusammen die R^{n^2} aus-
»machen, so scheinen mir noch zwei andere zerfallene Glieder
»$f^\varepsilon + f^\gamma$ und $f^\delta + f^\vartheta$ möglich zu sein, so dass dann durch
»jede der 12 Curven vier Theilflächen gehen, und in jeder
»von diesen 6 von jenen liegen. — Welches ist der niedrigste
»Grad n, bei dem dieser Fall eintreten kann? Geht's bei $n = 4$,
»für 4 Paar Flächen $f^2 + f_1^2$, wenn sich jede zwei, die nicht
»zu einem Paar gehören, in $C^2 + 2\,g$ schneiden? Oder giebt
»es bei $n = 6$ vier Paar Flächen $f^3 + f_1^3$, wovon je zwei
»Paar einander in 12 Partialcurven 3ten Grads (R^3 oder C^3)
»schneiden, und wobei durch jede dieser Curven vier Theil-
»flächen gehen und jede der letztern durch 6 von jenen geht?
»— Ferner ebenso wenn die Schnitte der Theilflächen in 4
»Theile zerfallen, ab $= A + B + C + D$; oder wenn einzelne
»Glieder des $B(f^n)$ aus 3 oder mehr Theilflächen bestehen;
»und s. w. kurz das Zerfallen der Glieder und der Grund-
»curve R^{n^2} des $B(f^n)$ vollständig zu berüsseln; ich kann nicht
»Alles schreiben, was ich versucht habe.

II. »*Vom $G(f^n)$.* Dieses hat, im Allgemeinen, keine zerfallene
»Glieder. Nimmt man aber zwei Glieder an, wovon das eine
»aus α und das andere aus β Theilflächen besteht, so ordnen
»sich demgemäss die n^3 Grundpunkte in $\alpha\,.\,\beta$ Gruppen. Sind
»die $\frac{1}{2}\,\alpha\,(\alpha-1)$ Curven, in denen die α Theilflächen einander
»schneiden, nicht Bestandtheile der *Kerncurve* R_0^x (Ort der
»Knotenpunkte) des $G(f^n)$? — Wie viele zerfallene Glieder
»kann das $G(f^n)$ haben unter den mannichfaltigsten Bedingungen,
»wie z. B., dass jedes zerfallene Glied nur 2, oder 3, 4, . . .
»Theile haben soll? — Es giebt solche bornirte $G(f^n)$, wo jedes
»Glied zerfällt, alle Glieder eine Theilfläche f^α gemein haben;
»auch solche, die partielle Grundcurven haben. — Zur Er-
»leichterung kann man zur Bestimmung des $G(f^n)$ einen solchen
»$B(f^n)$ annehmen, der nach dem Vorigen (I.) schon viele zer-
»fallene Glieder enthält. Ist R^{n^2-n+1} die höchste *Grund-
»curve* die ein $G(f^n)$ haben kann?

»Das Gebüsch 2ten Grads $G(f^2)$ kann im Besondern 6
»Glieder haben, die aus Ebenenpaaren bestehen, wobei dann
»die *Kerncurve* $R^6 = 6\,g$ ist. Wenn beim $G(f^3)$ drei Glieder
»aus Ebenenpaaren bestehen, ist dann nicht ein 4tes solches
»Glied *nothwendig*, und bei fünfen das 6te?

III. «*Vom N(f^n).* Enthält es nothwendig zerfallene Glieder? wie-
«viele und von welcher Art? Die Selbstschnitte der zerfallenen
«Glieder (wie ($f^a f^\alpha$) = $R^{a\alpha}$) liegen in der Kernfläche $P^{4(n-1)^3}$
«des Gebüschs; dieselbe ist überhaupt der Ort aller Selbst-
«schnitte, wozu ja auch die Knotenpunkte und vielfachen Linien
«gehören. Enthält N(f^n) immer solche Glieder die *vielfache*
«*Linien* haben? und wieviele? — Wieviele Grundpunkte kann
«N(f^n) höchstens haben? und welches ist seine höchste par-
«tielle Grundcurve R^x?

«Wählt man in einem N(f^n) drei solche B(f^n), wovon
«keine zwei ein gemeinschaftliches Glied f^n haben, so werden
«ihre 3 Grundcurven R^{n^2} von einer Schaar andern Grund-
«curven, S($R_1{}^{n^2}$), geschnitten, d. h. jede $R_1{}^{n^2}$ schneidet jede
«R^{n^2} in n^3 Punkten, und dann werden diese S($R_1{}^{n^2}$) nicht allein
«von jenen dreien, sondern von einer S(R^{n^2}) geschnitten, und
«beide Schaaren liegen in einer Fläche f^{2n} (wie beim Hyper-
«boloid, das für $n = 1$ eintritt).

«H. *Borchardt*, dem ich angab, dass beim N(f^2) 10 Glieder
«aus $f' + f_1'$ beständen, war erst ganz enchantirt und glaubte
«es leicht beweisen zu können; jetzt aber verzweifelt er, weil
«er auf 27 kommt und nicht reduciren kann. Er wollte etwas
«Spezielles haben, was ich nach meiner Weise so übersetze:

«Wenn zwei in derselben Ebene liegende Kegelschnitte
«N(A^2) und N(B^2) einen Büschel B(C^2) gemein haben, giebt
«es dann solche Gliederpaare A^2 und B^2, die sich in zwei
«Punkten berühren? und wieviele?»

«Eben war *Borchardt* wieder bei mir; er hat die Eli-
«mination gemacht, 10 gefunden, und für diese spezielle Frage
«4. Musste Brief aufweisen.

«Derselbe überbrachte mir vorgestern 2 Abhandlungen
«von *Hesse* (aus *Crelle* Bd. 49., was ich noch nicht erhalten)
«über die Doppeltangenten der C^4, datirt 1853; er hat endlich
«auch die 63 Systeme eingeschriebene C^2 gefunden; bei den
«315 C^2 citirt er *Salmons* Werk: «Treatise on the higher
«plane curves by George Salmon, M. A., Dublin 1852.» —
«Meiner wird nicht erwähnt, durch meine Trödelei, seit 1846
«soll ich leer ausgehen.

«Ich wünsche und hoffe, dass Sie gesunder sind, als ich;
«dann haben Sie an dem Vorstehenden auf 14 Tage Futter

«genug, und wenn auch wenig Grünes darunter ist, schmeckt «es Ihnen doch, da Sie *Alles* bewältigen und *verschlingen «wollen.*

«Leben Sie wohl, d. h. *flott* beir Gräfin und *rennend* «über das Wylerfeld.

«Die üblichen Grüsse an *Rettig, Mutz, Leuenberger* und «*Frau,* (Fr. und H. *Walter*), etc. Ihr hinfälliger

«Berlin 24.—27. Januar 1855. Steiner.»

«N.B. Übersehen Sie nicht den beiliegenden Zettel und «gehen Sie gleich zu *Leuenberger,* bitte!»[1])

1855. Steiner an Schläfli.[2])

Wahrscheinlich 1855, Anfang Januar.

«*Lieber Freund!*

«*Rache ist süss*» sagt ein Sprüchwort. Sie wollen mich wohl hlen lassen, wie peinlich einem zu Muthe ist, wenn man keine ntwort erhält. Desshalb muss ich ein *ernstes Wort* mit Ihnen rechen.

«Wer in der Schweiz — wie auch in Preussen — ein *unehe-ches* Kind erzeugt, muss Alimente bezahlen *von Rechts wegen.* Auf iesen *Rechts-Grund* gestützt, dränge ich Sie hierdurch zum dritten al, für die Erziehung und Ausbildung Ihres Bankerts, den Sie mir » lieblos halb nackt ins Haus geschoben, väterlich zu bezahlen. Dass s obendrein noch ein Zwillingspaar ist, will ich nicht einmal in echnung bringen. Aber in seinen alten Tagen noch fremde Kinder, Kinder des *Leichtsinns* — um nicht zu sagen der *Unkeuschheit* — ufpäppeln zu sollen, ist erschrecklich. Schon wochenlang quäle ich ich mit den Wechselbälgern ab, und kann sie weder zur Ruhe noch is Reine bringen.

«Die vornehmsten Grenzfälle, in die meines Erachtens der (Kno-en-) Kegel zweiten Grads, sowie die (Streif-) Curve zweiter Klasse bergehen kann, sind folgende.

«1° Der Kegel kann sich α) auf seine *erste* oder *Hauptaxen-ene* reduciren, wobei seine Fläche die Winkel-Axe, d. h. die Winkel-äche zwischen den Scheitelkanten dieser Axenebenen doppelt bedeckt,

[1]) Derselbe ist natürlich nicht mehr vorhanden.

[2]) Hiezu existirt ein Concept.

«oder β) er kann sich in die *dritte ideelle Axenebene* ausbreiten und «dieselbe doppelt bedecken; oder γ) sich auf die Hauptaxe zusammen«ziehen (Knotenaxe).

«2° Ferner kann er sich in zwei Ebenen ausbreiten (*Knoten«ebenen*, ihr Schnitt *Knotenkante*), wobei dann alle Berührungsebenen «durch die Kante der zwei Ebenen gehen, letztere können α) *reell* «sein, β) *aufeinanderfallen*, γ) *imaginär* sein; nun scheint mir syn«thetisch der Fall (β) mit dem vorigen ($1^0\beta$), sowie (γ) mit ($1^0\gamma$) iden«tisch zu sein, aber (γ) kann vernünftig nur so, wie in (1^0) angegeben, «entstehen. Das Polare davon ist:

«I. Der Kegelschnitt (Streifcurve) kann in zwei Gerade über«gehen, deren Schnitt der Mittelpunkt ist; die Geraden können a) «*reell* (Hyperbel) oder b) *imaginär* (Ellipse, die sich auf ihren Mittel«punkt zusammengezogen) sein, oder c) *zusammenfallen* (doppelte «Gerade).

«II. Ferner kann sich der Kegelschnitt auf zwei Arten auf eine «doppelte Gerade reduciren; a) auf die doppelte *erste Axe*, oder sich «b) auf den Mittelpunkt oder c) als Hyperbel auf die doppelte *zweite «ideelle Axe* reduciren. Die Tangenten des Kegelschnitts bilden zwei «Strahlbüschel, welche die Scheitel der Axe zu Mittelpunkten haben; «im Falle (c) sind sie sämmtlich imaginär, bis auf die Axe selbst, «die reell wird.

«Nun die Schwierigkeiten (für die blosse synthetische Anschau«ung). Im Fall (II a) finden zwei Kegelschnitte zugleich statt: Die «*Doppelstrecke zwischen den Scheiteln* ist Ellipse, und die äussere *Dop«pelstrecke*, die durchs Unendliche geht, ist Hyperbel. Wenn nun vor «der Reduction die Streifcurve Ellipse war, so könnte man wähnen, «es wäre nur die *elliptische Strecke* der Streifaxe *reell* und die *hyper«bolische* ideell oder imaginär. Nun gesetzt, Sie haben Recht, beim «Uebergang der Streifellipse in ihre Axe trete nun auch die Hyperbel «in ihrer Strecke in Evidenz (wie *Plücker* sagt), so hat der aus jedem «Punkt der Axe (Streifaxe) der Fläche umschriebene Kegel die Ebene «zur *Wendeebene* und die Axe zum *Wendestrahl*, und wenn der Punkt «aus der Ellipsenstrecke in die Hyperbelstrecke übergeht, so soll der «Kegel seine Lage gegen die Streifebene ändern; daher wäre also die «letztere eine Art *Wendeebene* der Fläche, aber mit Wechsel von der «einen Strecke zur andern, — was aber findet an den Grenzen, in «den beiden Scheiteln statt? muss hier der Kegel sich nicht *selbst «berühren* und die Axe zum Selbstberührungsstrahl und die Ebene

«zur Selbstberührungsebene haben? oder was geht vor? — Dieselbe «Ungewissheit quält mich beim entsprechenden Fall ($2^0\alpha$), wo ich auch «nicht weiss, ob die durch die Knotenkante gelegte Ebene in beiden «Paar Scheitelwinkel der Knotenebenen *reell* schneidet oder vielleicht «nur im einen; und ob die Knotenebene selbst nicht mit *Selbstberüh-* «*rungspunkt* (oder etwa mit *zweimaligem* Selbstberührungspunkt) schnei- «det? Etwas anders, als Sie es angegeben haben, muss es sein, ich «möchte drauf wetten.

«So quälen mich alle obigen Fälle, z. B. der Fall (I a oder b, c). «Wird aus irgend einem Punkte in der Streifebene der Fläche ein «Kegel umschrieben, so hat er die Ebene zur *Wendeebene* und den «aus dem Punkt durch den Mittelpunkt (Schnitt der beiden Streif- «geraden) gehenden Strahl zum *Wendestrahl;* was Besonderes tritt «nun aber ein, wenn jener Punkt der Mittelpunkt selbst ist? Oder «andererseits, wie schneiden die Axenebenen in ($1^0\alpha$ und β) die Fläche? «nur mit *schlichtem* dreifachem Punkt, wie Sie sagen, oder anders, «etwa mit dreimaligem Wendepunkt etc.? — Ich bin darüber ganz in «Verwirrung, es ist synthetisch zu schwer oder ich bin zu schwach «und stumpf; ich corrigire und streiche wieder, weil ich nicht weiss, «was wahr oder falsch ist. Setzen Sie an! und geben Sie mir die «Resultate mit der Ihnen sonst *eigenen* Zuverlässigkeit.

«Bei der Definition der Polarflächen möchte ich auch die Eigen- «schaften des der Basis f^m umschriebenen Kegels angeben, nämlich «Grad $= m\ (m - 1)$, Klasse $= m\ (m - 1)^2$, Zahl der Doppel- «ebenen $= \frac{1}{2} m\ (m - 1)\ (m - 2)\ (m^3 - m^2 + m - 12)$, Zahl «der Wendeebenen $= w$ (?), Zahl der Doppelstrahlen $= d$ (?) und Zahl «der Rückkehrstrahlen $= r$ (?). Ich glaube Sie sagten es sei $w = 4\,r$, «also werden Sie alle 3 Fragen leicht *richtig* beantworten können. — «Einst theilte ich Ihnen die Eigenschaften der Abwickelbaren mit, welche «der Fläche m^{ten} *Grads* längs des ebenen Schnittes umschrieben «ist: Grad, Klasse und Grad der Rückkehrlinie, im Augenblick weiss «ich sie nicht, werde sie aber wohl notirt haben; Sie haben dieselben «bestätigt und wie mich dünkt noch erweitert. Fasst man die Fläche «nach *Klasse* auf, wird der Fläche m^{ter} *Klasse* längs des Schnitts mit «irgend einer Ebene E die Abwickelbare umschrieben, so ist dieser «eine Fläche $(m - 1)^{ten}$ Grads eingeschrieben, die erste Polare der «Ebene E in Bezug auf die Basis; die letzte Polare ist ein Punkt, *Polarpunkt* der E in Bezug auf die Basis. Versetzt man E ins Un

«endliche, so ist ihr Polarpunkt eine Art *Mittelpunkt* (Schwerpunkt, «Punkt mittlerer Entfernung), *nämlich die Summe der aus ihm auf «je ein System vom m parallelen Berührungsebenen der Basis ist alle«mal gleich Null* (ist es wahr?). Die Schnittcurve der E mit der «Basis stimmt mit dem vorigen Kegel in den 6 Eigenschaften überein; «die Abwickelbare mit der Berührungscurve des Kegels u. s. w.

«Da ich nicht weiss, ob Sie mich *verworfen* haben, darf ich «nicht weiter schreiben, hoffe aber, dass Sie mich bald aus dieser pein«lichen Ungewissheit erlösen werden. Ich war damals krank und «ganz unthätig, — Sie sind über solche Zustände Zeitlebens er«haben, wie Sie selbst meinten.

«Ihr treuer

Steiner.»

«Grüssen Sie Prof. *Vogt* [1]) und sagen ihm, ich hätte mich über «seinen *wackern Carl* [2]) bei Lesung der «*Bilder aus dem Thierreich*» «sehr gefreut, theils aus *collegialischem* Anlass. Unterlassen Sie «es nicht.

«Ein hiesiger Gymnasiums-Professor der Mathematik, *Müller*, «meinte, ich sollte *Geflecht* statt *Gebüsch* oder *Netzbasis* sagen, es «drücke gerade etwas *Räumliches* aus. Was sagen Sie dazu?

«Die gewöhnlichen Grüsse. — Haben Sie Chelini (in den Statuten «steht Chilini) geschrieben? — Denken Sie, ich habe mich noch nicht «bedankt! es ist schändlich.

«Lassen Sie mich nicht im Stich, damit ich in den, nächste «Woche eintretenden, Ferien die Redaction fortsetzen kann. Ich «werde auch bald mich umsehen, wie ich es anzufangen habe, um «auf Jahr und Tag Urlaub zu erhalten.

«Mein kleiner Aufsatz ist in Liouville's Journal noch nicht er«schienen, Dr. *Wöpke* [3]) scheint ihn nicht übersetzt zu haben; ich sollte «an *Poncelet* schreiben — aber es geschieht nicht. Auch von Ihren «Sachen scheint noch nichts aufgenommen zu sein. *Crelle* sehe ich «nie. Bei ihm ziehen sich die Sachen lange hin. Ich werde näch«stens nach der Druckerei gehen und mich beim Setzer erkundigen.

«Zum *Donnstig!* bald Antwort und sollte es eine *Kriegserklärung*

---

[1]) Seit 1835 Professor der Medizin in Bern.

[2]) Bezieht sich auf Carl Vogt, Professor in Genf † 1895.

[3]) Wöpke Franz, geb. 6. Mai 1826, Lehrer der Mathematik, lebte abwechselnd in Berlin und Paris; † 1864.

«sein, nur nicht eine so *tiefdurchdachte Stellung* eingenommen, wie «Preussen; heraus aus der neutralen Passivität, ehe Sebastopol «fällt.»

Steiner an Schläfli.

Berlin, 25. Febr. 1855.

«*Lieber und getreuer Freund!*

«Hollohoh! wo hängt's? Sind Sie böse, oder grasen Sie, oder «mangen Sie Vorsichtskasse [1]), oder waren meine Aufgaben zu schwer, «dass in drei Wochen noch keine Antwort kommt?

«Ich habe die Redaction wieder begonnen. Es geht erbärmlich «langsam. Ihre Definitionen machen mir viel zu schaffen. Es giebt «mehrere Dinge, die ich nicht klar anschauen kann, — und sicher «habe ich schon Falsches geschrieben. Wenn ich Ihren Entwurf lese, «ist es mir gerade wie beim Spazieren: diese *Selbstsucht*, die sich «nicht um den schwächeren Begleiter kümmert! Nun begreife ich «*Borchardt's* Urtheil auf dem Rigi! Um Sie jedoch nicht, wie «früher, zu ärgern, gebe ich mir Mühe, Ihrem Concepte treulich zu «folgen; aber etwas Schulmeisterei wird doch eingeflochten, was Ihnen «unlieb sein mag, da Sie dafür kein Organ haben, wie für schönen «Weg und humane Ruhe auf Ausflügen, worüber *Walter, Rettig* [2]), ich «und Alle zu *weinen und klagen* haben. — Ich sitze gegenwärtig die «8te Leidens-Stör zu Hause ab. Das Alter macht sich schon stark gel- «tend, die frühere Allgewalt der Phantasie ist halb erloschen; ich «kann nicht mehr klar anschauen, und nur mit saurer Mühe. Ich «bitte Sie daher mir folgende Sachen (die mir ehemals leicht ge- «wesen wären) *sicher zu entscheiden.*

«1. Der aus jedem Punkte P in einer f^m dieser umschriebene «Kegel hat die zugehörige Berührungsebene E zur Doppelebene und «*berührt sie längs der beiden Tangenten ihrer Schnittcurve in P.* (?) «Wenn nun die E mit *Rückkehrpunkt* schneidet, so ist sie eine *Wende-* «ebene (nicht Rückkehrebene?) des Kegels; und wenn sie mit *Selbst-* «*berührungspunkt* schneidet, so ist sie eine *Selbstberührungsebene* des «Kegels.

«2. Wenn 2 Flächen sich in P berühren, so hat die ihnen ge-

[1]) Schläfli war ca. 5 Jahre lang Liquidationsrechner der National-Vorsichts-Kasse.

[2]) Prof. der Philologie in Bern, jetzt noch lebend.

«meinsam umschriebene Abwickelbare die zugehörige E zur Doppel-
«ebene und berührt sie längs *der beiden Tangenten der Schnittcurve*
«*der Flächen;* die E wird *Wende-* oder Selbstberührungsebene der Ab-
«wickelbaren, wenn P ein *Rückkehr-* oder Selbstberührungspunkt der
«Curve ist; dabei ist die Rückkehrtangente eine ***Asymptote*** in der
«Involution, welche durch die zwei Tangentenpaare der Schnittcurven
«von E mit den 2 Flächen bestimmt ist; ebenso die *Selbstberührungs-*
«*tangente.*

«3. Die Schnittcurve des Knotenkegels n^{ten} Grads K^n mit der
«Fläche f^m sendet n (n + 1) Zweige durch den Knotenpunkt P, deren
«Tangenten t (in P) *alle in den K* fallen; berührt eine E den K längs
«einer dieser t, so ist diese eine *Selbstberührungstangente ihres*
«*Schnittes* (so verstand ich Ihren rücksichtslos-dunkeln Satz), und für
«die vorhergehenden und nachfolgenden, den K berührenden Ebenen
«ändert deren Schnittcurve die positive Seite ihrer Rückkehrtangente.
«Geht aber eine E frei durch solche t, so hat ihr Schnitt dieselbe
«zur *Wendetangente* (?).

«Ich muss hierbei nochmals vom Knotenpunkt 2ter Ordnung
«sprechen, der mich sehr würgt, weil ich ihn nicht ganz zu fres-
«sen vermag, und sicher Falsches darüber ins Reine geschrieben
«habe, wie ich jetzt einsehe. Er heisst *hyperpoloidisch* (nicht hyper-
«polisch) oder *ellipsoidisch*, nachdem der K^2 reell oder imaginär ist.
«Nun kann ich mich damit nicht zufrieden geben, obschon Sie mich
«in Bern abschnauzten und wiewohl ich bereits ins Reine schrieb,
«dass der Uebergangsfall zwischen beiden der *paraboloidische* Knoten-
«punkt sei — was offenbar Unsinn ist. Mit träger Vorstellung sah
«ich Folgendes, was Sie controlliren und sicher begründen wollen.

«Der hyperb. Knotenpunkt hat zwei *Grenzfälle:* 1^0) wo K^2 sich
«auf eine einzige Gerade = Knotenkante, reducirt, welche dann *Selbst-*
«*berührungs-* oder *Rückkehrtangente* des Schnittes jeder durch sie
«gehenden Ebene ist, so dass also die Fläche einen Selbstberührungs-
«Knotenpunkt oder Rückkehr-Knotenpunkt (eine Spitze, die im Kno-
«tenpunkt endet) hat (Beispiele an Umdrehungsflächen); 2^0) wo
«K^2 sich in eine Ebene=Knotenebene ausbreitet, welche von jeder
«durch den Knotenpunkt gehenden Ebene in einer *Rückkehrtangente*
«oder Selbstberührungstangente (?) geschnitten wird, und insbesondere
«drei durch den Knotenpunkt gehende solche Gerade enthält, welche
«für jede durchgehende Ebene Selbstberührungstangenten sind, so dass
«die Fläche drei glatte Spitzen hat, die im Knotenpunkt enden (wie

«unten, bei Ihrem Fall). Oder wird hier die von jeder durch den «Knotenpunkt gehenden andern E in einer Selbstberührungstangente «(statt rt) geschnitten? Beispiel: wenn man eine Curve und die Nor- «male in einem Wende- (oder Selbstberührungs-) Punkt herumbewegt. «— Zerfällt K^2 in 2 Ebenen, die *reell* oder *imaginär* sind, so heisst «jetzt der Knotenpunkt *hyperbolisch* oder *elliptisch*. Ist nun dieser «elliptische Fall mit dem vorigen (1°) identisch? oder wodurch unter- «scheiden sie sich? Und ist ebenso der hiesige hyperbolische Grenz- «fall, wo beide Knotenebenen zusammenfallen, mit dem vorigen (2°) «*identisch* oder *verschieden?* Wie schwer es mir wird einzusehen, «dass in jeder der beiden Ebenen drei famöse t liegen, habe ich «Ihnen bereits im vorigen Brief unterbreitet und erwarte bald sichere «Auskunft. — Statt *Dehnebene* bin ich jetzt auf den Namen *Streifebene* «gekommen; *Streifcurve*. Ihre *Umschreibungsebene* wäre auch sach- «gemäss.

«Hat die f^3 einen Kp=P, so wird sie vom K^2 längs dreien Strah- «len t berührt (?); daher hat f^3 die sie längs diesen t berührenden «drei Ebenen zu *Streifebenen*. — Hat f^3 vier Knotenpunkte (wie z. B. «die 2te Polarenveloppe eine E in Bezug auf Basis F^3), die ein Te- «traeder T bestimmen, so berührt jeder Knotenkegel längs der drei «anliegenden Kanten, und je zwei Knotenkegel berühren sich längs «der ihnen gemeinsamen Kante und haben daher noch einen (durch «die beiden anderen Knotenpunkte gehenden) ebenen Schnitt C^2. Die «Ebenen der sechs C^2 gehen durch *einen* Punkt. Die 4 Knotenkegel «sind irgend einer f^2 umschrieben, welche alle 6 Kanten des T be- «rührt; endlich hat f^3 sechs Streifebenen, die sie längs der 6 Kanten «streifen und die respectiven Ecken des T zu Mittelpunkten der donn- «stigs Strahlbüschel haben. — Für die F^3 (3te Klasse) alles analog. «Was daran Wahres ist, werden Sie bald erkennen; gleich nach der «Ankunft in hier habe ich so was angeschaut; jetzt sehe ich nichts «deutlich.

«4. Der einer f^m aus freiem P umschriebene Kegel K ist vom «$m\,(m-1)^{\text{ten}}$ Grad. Ist P insbesondere ein Kp n^{ter} Ordnung von f^m, «so besteht $K^{m\,(m-1)}$ aus $(n+1)\,K^n + K^{m\,(m-1)\,-\,n\,(n+1)}$ d. h. aus «dem (n+1)fachen Knotenkegel K^n und aus einem andern Kegel «$[m\,(m-1) - n\,(n+1)]^{\text{ten}}$ Grads, der für das Maximum von n, für «$n = m - 1$, verschwindet.

«5. Braucht man *Schaar* nicht zu definiren? — Wenn Sie sagen, «***eine Doppelschaar von Flächen*** muss da nicht hinzugesetzt werden

«*gleichen Grads*» oder «*gleicher Klasse*», oder liegt dies schon drin?

«Kann man bei einer Doppelschaar Flächen «*von drei successiven* «*Flächen*» sprechen, da ja jede gleichsam von einer Schaar nächst-«folgender umgeben ist?

«6. Da wir die Klasse der einer gegebenen f^m doppelt umschrie-«benen Abwickelbaren kennen, so muss auch der Grad ihrer Berüh-«rungscurve R^x zu finden sein. Dann ist jene Klasse $=\mu$, so gehen «durch jeden P μ Doppelebenen der f^m, und daher schneidet die erste «Polare von P, f^{m-1}, die R^x in 24 Punkten, so dass $(m-1) \times x =$ «2μ, also $x = \frac{2\mu}{m-1}$ ist. (?) — Von welchem Grad ist die Abwickel-«bare? und von welchem ihre Rückkehrlinie? Muss zu finden sein.

«Sind f^m und f^n gegeben, so ist die ihnen gemeinsam umschrie-«bene Abwickelbare von der $m\,(m-1)^2 \times n\,(n-1)^{2\text{ten}}$ Klasse; ihre «Berührungscurven R_μ und R_ν mit f^m und f^n werden also von den er-«sten Polaren f^{m-1} und f^{n-1} jedes P in $m\,(m-1)^2\,n\,(n-1)^2$ Punkten «geschnitten, so dass danach $\mu = m\,(m-1).\,n\,(n-1)^2$ und

«$\nu = m\,(m-1)^2.\,n\,(n-1)$ wäre. (?)

«Die den Flächen f^m und f^n längs ihrer Schnittcurve R^{mn} umschrie-«benen Abwickelbaren sind beziehlich von der $mn\,(m-1)^{\text{ten}}$ und «$mn\,(n-1)^{\text{ten}}$ Klasse. Daher müssen bei zwei Flächen m^{ter} und n^{ter} Klasse «F^m und F^n die Berührungscurven R_μ und R_ν der ihnen gemeinsam «umschriebenen Abwickelbaren vom $mn\,(m-1)^{\text{ten}}$ und $mn\,(n-1)^{\text{ten}}$ «Grad sein. (?) — Ich wollte von da aus weiter gehen und finden, «*um wieviel die Doppel- und Rückkehrlinie einer* F *deren Klasse er-«niedrigen*, aber ich bin zu sehr abattu und confus, vielleicht gelingt «es ein andermal.

«Wenn Ihr Stillschweigen keinen andern Grund hat, als dass Sie «sich an einigen schwierigern Fragen verbissen haben, so bitte ich «recht sehr, mir vorerst die leichteren bald zu beantworten, damit «ich mit der Redaction vorwärts komme.

«*Fetscherin's* Tod hat mich frappirt; er war noch so rüstig und «kaum oder nur wenig älter als ich; 96er. Woran starb er?

«Sollten den Herren *Rettig*, *Leuenberger*, *Dr. Schneider* oder *Vogt*. «*Ries*, Signore etc. Dissertationen in ihren respectiven Fächern genehm «sein, so würde ich durch Buchhändler Ihnen ein Pack zuschicken «und Sie könnten das Porto repartiren nach Stückzahl und Inhalt. «Einst gab ich *Schlatter* (=Post-Heiri) in Solothurn circa 30 Stück.

«Leben Sie wohl, bleiben Sie *ewig gesund, jung und rüstig* — «wie Sie selbst meinten — und *antworten* Sie bald

Ihrem dankbaren *J. Steiner.*»

Schläfli an Steiner.

«*Lieber Freund!*

«Ich nehme herzlichen Antheil an Ihren Leiden und bewundere «die Selbstüberwindung und den Heroismus, mit dem Sie, denselben «trotzend, die schwersten Fragen der Geometrie angreifen, von denen «es mir fast unmöglich scheint, dass sie in der Anschauung allein «sollten abgethan werden können.

«*Ad 1°.* Der aus einem beliebigen Punkte P einer *nach Grad «freien* Fläche f dieser umschriebene Kegel K hat die zu P gehörende «Berührungsebene E der f zur Doppeltangentialebene, und die zwei «Berührungsstrahlen derselben sind die Tangenten im Doppelpunkt P «des Berührungsschnitts der E. — Fällt aber P in den Durchschnitt «der Kernfläche und wird daher zum Rückkehrpunkt des Schnitts E, «so zählt die Rückkehrtangente für *vier vereinigte Strahlen*, welche «K mit E gemein hat (analytisch sicher!). — Ist endlich P einer der «Punkte π, wo die Curve (E, f) diesen zum Selbstberührungspunkt «hat, so sendet K durch die Selbstberührungstangente *zwei* Lappen, «welche beide längs derselben von der E oskulirt werden. (Analytisch «ist dieses wenigstens das Mindeste, was geschehen muss; ich glaube «aber nicht, dass es im Allgemeinen noch höher gehe. Den Ueber-«gang vom vorigen Falle zu diesem speziellsten vermag ich freilich «in der Anschauung nicht zu verfolgen. Doch! denn in π wird die «Curve R d. h. (Q, f) von der Berührungscurve S der doppelt um-«schriebenen Abwickelbaren berührt.) — Fällt der Punkt P irgendwo «in die S, so ist die E dreifache Berührungsebene des Kegels K; zu «den zwei sonst bekannten Berührungsstrahlen kömmt nämlich als «dritter noch der Strahl hinzu, welcher beide Berührungspunkte der «E (mit f) verbindet.

«*Ad 3°.* Wenn eine Fläche f (m^{ten} Grades) einen Knotenkegel «N (n^{ten} Grades) hat, und man wählt den Scheitel desselben zum Eck «(x, y, z) des Fundamentaltetraeders und nennt w die gegenüberliegende «Ebene, so bekömmt das Polynom der Fläche, nach den fallenden «Potenzen von w geordnet, die Form: $f = Nw^{m-n} + Pw^{m-n-1} +$ etc. «Dann ist also P ein Kegel $(n+1)^{ten}$ Grades, der mit dem Knoten-«kegel den Scheitel gemein hat, aber sonst von ihm durchaus unab-«hängig ist. Von den $n(n+1)$ gemeinschaftlichen Strahlen beider «können also bis auf die $\frac{(n-1)(n-2)}{2}$ nothwendigen alle übrigen

«beliebig auf N angenommen werden; wenn demnach dieser N nur «vom zweiten Grade ist, so giebt es *keinen* nothwendigen Strahl, «sondern alle 6 können beliebig auf den N gesetzt werden, selbst «noch wenn dieser ein *Ebenenpaar* ist; nur wenn N aus zwei *ver-* «*einigten* Ebenen besteht, und dem P keine Gewalt angethan werden «soll, können in der Ebene N nur 3 Strahlen beliebig gesetzt wer- «den, deren jeder für zwei vereinigte Strahlen gilt. Frägt man nun «(im allgemeinen Fall), wie die Curve aussieht, in welcher die Basis «f vom Knotenkegel N geschnitten wird, so hat man für dieselbe das «System ($N = o$, $Pw^{m-n-1} + Qw^{m-n-2} + \text{etc.} = o$), also mit erster «Annäherung ($N = o$, $P = o$), d. h. die erwähnten $n(n+1)$ Strahlen «sind Tangenten der Zweige, welche die Curve durch den Knoten- «punkt sendet. Wählt man die Fundamentalebene x so, dass sie den «N berührt, und lässt die y durch den Berührungsstrahl gehen, so «bekömmt man $N = xz^{n-1} + pz^{n-2} + \text{etc.}$, wo p ein homogenes «Polynom zweiten Grades in x, y bedeutet. Ist nun Q ganz frei, so «ist sein niedrigstes Glied z^{n+1}; in der Gleichung des Schnitts $x = o$ «sind also die niedrigsten Glieder $y^2z^{n-2}w^{m-n-1}$, $z^{n+1}w^{m-n-2}$ (mit «Weglassung der constanten Coefficienten), oder gekürzt: y^2w, z^3, d. «h. der Berührungsstrahl (x, y) ist Rückkehrtangente des ebenen Be- «rührungsschnitts (x) der Basis f. Geht aber der Kegel P durch «diesen Strahl (x, y), so ist sein niedrigstes Glied yz^n; aber das nied- «rigste Glied von Q im Allgemeinen immer noch z^{n+2}; man hat dann «im Ganzen drei Glieder von derselben niedrigsten Ordnung, in ge- «kürzter Form: y^2w^2, yz^2w, z^4, welche zusammen in die Gestalt des «Products $(yw + \alpha z^2)(yw + \beta z^2)$ gebracht werden können, d. h. die «Gleichung des ebenen Schnitts zerfällt in erster Annäherung in die «zwei Curven $yw + \alpha z^2 = o$, $yw + \beta z^2 = o$, mit andern Worten, «der Schnitt hat hier einen Selbstberührungspunkt, dessen Tangente «der Strahl (x, y) ist. — Geht eine schneidende Ebene frei durch «einen der $n(n+1)$ Strahlen (N, P), und nehmen wir sie als Ebene «x an und lassen auch noch die Ebene y durch diesen Strahl gehen, «so fällt in N das Glied z^n und in P das z^{n+1} weg; aber Q wird ein «Glied z^{n+2} haben; die auf die niedrigsten Glieder beschränkte (und «gekürzte) Gleichung der Basis f wird demnach für $x = o$ zu $yw^2 +$ «$z^3 = o$; d. h. der Strahl (x, y) ist eine Wendetangente der Schnitt- «curve. — Für das Mass eines Briefs konnte ich diese Sache nicht «wohl ausführlicher erörtern; aber ich hoffe, dieses reiche hin, um «die Dunkelheit zu verscheuchen.

«Ist ein *Knotenpunkt* (zweiten Grades) K *reell* und geschieht «ihm weiter keine Gewalt, so ist nur zweierlei möglich: 1° entweder «ist der Knotenkegel N *reell*, indem z. B. $N = x^2 + y^2 - z^2$; also «der Knotenpunkt *reell verbunden* (hyperboloidisch); 2° oder der Knoten- «kegel N ist *imaginär*, indem z. B. $N = x^2 + y^2 + z^2$; also der «Knotenpunkt *isolirt* (ellipsoidisch). Der vermittelnde Gränzfall zwischen «beiden kann offenbar *nur* der sein, wo $N = x^2 + y^2$ wird, d. h. wo «der Knotenkegel aus zwei *conjugirten imaginären* Ebenen besteht; «consequent müssten Sie ihn einen *elliptisch-paraboloidischen* Knoten- «punkt nennen; ein solcher entsteht z. B. wenn man die *Neil*'sche «Parabel um ihre Rückkehrtangente herumdreht (man kann dann «nachträglich die auf der Umdrehungsaxe senkrechten kreisförmigen «Querschnitte zu Ellipsen ausstrecken). Der Uebergang ist leicht in «der Anschauung zu verfolgen. Setzt man nämlich $N = x^2 + y^2 - \alpha z^2$, «wo α einen *sehr kleinen* pos. Coefficienten bedeutet, so werden in «der Nähe des K die Verhältnisse $\frac{x}{z}$, $\frac{y}{z}$ sehr klein, der Knotenkegel «wird also sehr spitz und zieht sich gleichsam auf seine Axe (x, y) «zusammen; für eine erste Annäherung braucht man daher in P nur «das niedrigste Glied z^3 zu berücksichtigen (für dessen Coefficient ich «kurz 1 setze); man bekömmt so für die Basis annähernd

$$-\alpha\left(\frac{z}{w}\right)^2 + \left(\frac{z}{w}\right)^3 = 0, \text{ d. h. } \frac{z}{w} = \alpha,$$

«der *eine* Lappen oder Trichter der Basis bildet einen sehr kleinen «geschlossenen Sack, dessen Länge in der Richtung der Axe von «der Ordnung α, die Querdimensionen hingegen von der Ordnung «$\frac{z}{w}\sqrt{\alpha}$ sind. Setzt man hingegen

«$N = x^2 + y^2 + \alpha z^2$, $P = -z^3 +$ etc., so erhält man für die Basis «annähernd: $-\left(\frac{z}{w}\right)^3 + \alpha\left(\frac{z}{w}\right)^2 + \frac{x^2+y^2}{w^2} +$ etc. $= 0$, d. h. für «$0 < \frac{z}{w} < \alpha$ ist in unmittelbarer Nähe des Strahls oder der Axe (x, y) «die Fläche unterbrochen, während sie jenseits, für $\frac{z}{w} > \alpha$, reelle Aus- «dehnung erhält, sie kömmt also mit einem stark gekrümmten Buckel «dem isolirten Knotenpunkt (x, y, z) entgegen, ohne ihn wirklich zu «erreichen.

«Nehmen wir jetzt den Fall, wo der Knotenkegel N in zwei ver-
«schiedene Ebenen zerfällt, so sind nur zwei Arten möglich. *Ent-*
«*weder* ist $N = x^2 + y^2$, der schon besprochene Gränzfall, wo die
«zwei Ebenen conjugirt imaginär sind, *elliptischer* Kantenknotenpunkt;
«ein ebener Schnitt in der Nähe von K giebt immer eine Ellipse;
«ein frei durch K gehender Schnitt bekömmt den Punkt K zum *isolirten*
«Doppelpunkt; jeder durch die Kante geführte ebene Schnitt hat K
«zum Rückkehrpunkt, dessen Oeffnung die Richtung nie wechselt.
«Einen ebenen Schnitt mit Selbstberührungspunkt kann es ohne
«höhern Zwang nicht geben. (Dieser Zwang bestände nämlich in
«der einzigen Bedingung, dass in P das Glied z^3 wegfiele, d. h. dass
«der Kegel P dritten Grades durch die Knotenpunkte selbst gienge.
«Dann sind allerdings für $x = o$ die niedrigsten Glieder $y^2 w^2$, $y z^3 w$,
«z^4; und jede durch die Kante gelegte Ebene schneidet die Basis mit
«Selbstberührungspunkt.) — Oder es ist $N = x^2 - y^2$, die zwei
«Ebenen ($x + y = o$, $x - y = o$) sind reell, *hyperbolischer* Kanten-
«knotenpunkt; ein ebener Schnitt in der Nähe von K giebt eine Curve,
«die in der Nähe mit einer Hyperbel übereinkömmt; ein frei durch
«K gehender ebener Schnitt bekömmt ihn zum *verbundenen* Doppel-
«punkt; ein frei durch die Knotenkante geführter ebener Schnitt
«hat diese Kante zur Rückkehrtangente in K, und zwar ist in zwei
«Scheitelkeilen die Oeffnung des Rückkehrpunktes nach der einen
«Seite, in den zwei andern nach der andern Seite der Kante ge-
«wendet. Jede Ebene des Knotenkegels endlich schneidet die Basis
«in einer Curve, welche die Zweige frei durch K sendet; die Tangenten
«derselben sind die drei Strahlen, welche diese Ebene mit dem Kegel
«P dritten Grades gemein hat.

«Als Gränzfall zwischen dem elliptischen und hyperbolischen
«Kantenknotenpunkt steht der Planknotenpunkt in der Mitte; der
«Knotenkegel reducirt sich auf zwei vereinigte Ebenen, es ist $N = x^2$;
«jeder frei durch K geführte ebene Schnitt hat K zum Rückkehr-
«punkt, dessen Tangente in die Knotenebene fällt; diese Ebene selbst
«schneidet in einer Curve, welche drei freie Zweige durch K sendet,
«von denen wenigstens einer reell ist; ihre Tangenten sind durch
«$x = o$, $P = o$ bestimmt. Geht eine Schnittebene frei durch eine dieser
«Tangenten, so hat der Schnitt K zum Selbstberührungspunkt. — Will
«man ohne Ausübung von Zwang hier noch Arten unterscheiden, so
«kann es nur zwei geben. Das System $x = o$, $P = o$ giebt näm-
«lich für das Verhältniss $y : z$ drei verschiedene reelle Werthe *oder* nur

»einen reellen; dem ersten Fall entsprechen die drei platten Spitzen

, dem zweiten eine platte Schneide, in K völ-

»lig scharf, weiter davon weg immer mehr abgestumpft. Der zwischen-
»liegende Gränzfall ist der, wo zwei Lösungen von $x = o$, $P = o$
»zusammenfallen; dann ist der Schnitt der Knotenebene eine Curve,
»welche in K einen Rückkehrpunkt hat, durch den noch ein Zweig
»frei durchgeht; also entweder

oder

»Fallen alle drei Lösungen zusammen, so wird die Gleichung
»des Schnitts der Knotenebene in erster Annäherung von der Form
»$y^3w + z^4 = o$, ein $\left(\frac{3}{4}\right)$punkt, der jeder frei durchgehenden Ge-
»raden für drei, aber die ächten Tangente ($y = o$) für vier ver-
»einigte Punkte zählt. — Um mich den von Ihnen angeführten sehr
»starken Specialitäten zu nähern, muss ich annehmen, dass der Kegel
»P dritten Grades zerfalle in die Knotenebene x selbst und einen
»Kegel zweiten Grades, d. h. dass P durch x theilbar sei. Die Basis
»erscheint dann in der Nähe von K wie *zwei sich in K berührende*
»*Flächen zweiten Grades.* Doch halte ich es für rathsam, sich hier
»nicht zu tief in Specialitäten einzulassen.

»Obgleich ich durch das bisherige Ihre Fragen über Identität
»oder Verschiedenheit gewisser Fälle hinreichend beantwortet glaube,
»will ich doch noch ausdrücklich bemerken, dass der *hyperbolische*
»*Knotenpunkt* (hyperbolisch-paraboloidischer Knotenpunkt) nur ein
»Gränzfall ist zwischen zwei verschiedenen Lagen des hyperboloidischen
»(reell verbundenen) Knotenpunkts. Halbiren wir die Winkel des
»reellen Ebenenpaars durch zwei Ebenen, nennen diese x, y und
»legen durch K senkrecht auf die vorigen noch eine Ebene z, so
»können wir uns den Uebergang in einen ächten Kegel auf doppelte
»Weise vorstellen, entweder so, dass die Ebene x den Kegel elliptisch

«(d. i. nur in einem reellen Punkt) schneidet, oder dass die Ebene y «es thut.

«Um kein Missverständniss übrig zu lassen, gebe ich noch fol- «gende Uebersicht: *Knotenpunkt*; I. im Allgemeinen (Knotenkegel «ächt vom 2ten Grade, d. h. untheilbar) entweder α) reell verbunden, «oder β) isolirt; II. im Besondern: Kantenknotenpunkt (der Knoten- «kegel zerfällt in zwei Ebenen): 1° im Allgemeinen, die zwei Ebenen «sind verschieden und entweder α) beide reell, oder β) beide con- «jugirt-imaginär; 2° im Besondern: Planknotenpunkt (der Knotenkegel «besteht aus zwei vereinigten Ebenen); A. im Allgemeinen entweder «α) Dreispitzpunkt, β) Messerschneidepunkt; B. im Besondern, die «Knotenebene schneidet die Basis mit Rückkehrpunkt, durch den ein «freier Curvenzweig geht, und zwar entweder α) der Rückkehrpunkt «hat eine volle. oder β) leere Höhlung.

«Ueber die Fläche dritten Grades, welche *einen* Knotenpunkt hat, «sind Sie im Irrthum. Der Knotenkegel schneidet die Basis (im All- «gemeinen) in *sechs* verschiedenen Geraden; jede von diesen zählt «für *zwei sich nicht schneidende Cayley*'sche Gerade; alle 6 Paare ver- «einigter Geraden bilden einen Doppelsechser (Gitter) $\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 & a_6 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 & b_5 & b_6 \end{pmatrix}$ «wo immer je zwei entsprechende (sich also nicht schneidende) «Strahlen wie a_1 und b_1 zusammenfallen. Die 15 übrigen Geraden «c_{12}, etc. hingegen sind sämmtlich verschieden. Durch den Knoten- «punkt gehen 30 *Caylay*'sche Ebenen, welche paarweise zusammen- «halten, wie $(a_1\ b_2\ c_{12})$ und $(a_2\ b_1\ c_{12})$; hingegegen die 15 übrigen «Ebenen wie $(c_{12}\ c_{34}\ c_{56})$ sind sämmtlich verschieden.

«Was Sie über die Fläche dritten Grades mit *vier* Knotenpunk- «ten sagen, erkenne ich alles als richtig an, nur dass ich noch nicht «merke, was Sie mit den Strahlbüscheln meinen. Im Knotenpunkt- «tetraeder zählt jede Kante für 4 *Cayley*'sche Gerade. Nimmt man die «Polarebenen der Knotenpunkte in Bezug auf die den 4 Knotenkegeln «eingeschriebene Fläche zweiten Grades, so sind diese 4 *Sylvester*'- «sche Ebenen; und die 4 Geraden, in denen sie die entsprechenden «Tetraederebenen schneiden, liegen in der fünften *Sylvester*'schen «Ebene, und bilden hier ein Vierseit, dessen Diagonalen die drei «noch übrigen (einzelnen) *Cayley*'schen Geraden sind; durch jede von «diesen gehen zwei durch Gegenkanten gelegte Streifebenen der Basis. «Mich dünkt aber fast, ich habe Ihnen dieses schon geschrieben.

«*Ad 4.* Dass im Knotenpunkt nten Grades den Grad des von ihm

»aus der Basis umschriebenen Kegels um $n(n+1)$ erniedrigt, hat »seine volle Richtigkeit; aber zu der Erklärung, die Sie beifügen, »dass nämlich der Knotenkegel selbst $n+1$ mal dazu zu zählen sei, »kann ich nicht beistimmen, weil die Elimination nichts davon an»zeigt. Wollten Sie denn auch bei einer ebenen Curve, die einen »n fachen Punkt hat, behaupten, wenn man sie als Schaar ihrer Tan»genten auffasst, so sei jede der n Tangenten des Knotens $n+1$ »mal zu zählen? Sie würden eher sagen, der Knoten sei ein $n(n+1)$ »mal zu zählender Strahlbüschel.

»*Ad 5.* Sie haben selbst das Wort *Schaar* in den Sprachge»brauch eingeführt und wollen nun, nachdem Sie es unzählig oft ge»braucht haben, erst noch definiren! Verstehen Sie denn unter *Schaar* »nicht eine unzählige Menge unendlich nahe auf einander folgender »geometrischer Gebilde, die des *allmäligen* Uebergangs in einander »fähig sind? In analytischer Sprache würde ich sagen: wenn in einer »Gleichung oder einem Systeme von Gleichungen, welches ein geo»metrisches Gebilde darstellt, eine Constante variirt wird, so entsteht »eine Schaar, wenn deren 2, 3 . . . unter sich unabhängige variirt »werden, so entsteht eine Doppel-, dreifache, . . . Schaar. Dass Cur»ven oder Flächen, die des allmäligen Uebergangs in einander fähig »sind, von gleichem Grade sein müssen, versteht sich dann von selbst. »— Die Franzosen gebrauchen das Wort successif, wenn ich nicht irre, »im Sinne vo *unendlich nahe auf einander folgend;* ich habe nun das »kurze Wort dem ellenlangen vorgezogen. Ich weiss nicht bestimmt, »ob sie im Gegenssatze dazu das Wort consécutif im Sinne von *durch »Zwischenräume getrennt auf einander folgend* gebrauchen. Es wäre »aber bequem, wenn man zwei einfache Wörter hätte, um diesen »Unterschied zu bezeichnen. — Ich kann mich nicht mehr erinnern, »wo ich von *drei successiven Flächen einer Doppelschaar* gesprochen »habe; doch denke ich, ich werde den schleppenden Beisatz, dass »der Ausdruck *im Allgemeinen* zu verstehen sei, weggelassen haben; »wäre hingegen die *Bedingung* hinzugekommen, dass die drei succes»siven Flächen einer und derselben einfachen Schaar angehören soll»ten, so würde ich dieses wohl ausdrücklich gesagt haben.

»*Ad 6.* Ich bin erstaunt darüber, dass Ihre einfache Betrach»tung über den Grad x der Berührungscurve der doppelt umschriebenen »Abwickelbaren einer Basis n^{ten} Grades mir nicht eingefallen ist. Ich »habe das System von Gleichungen, welches diese Berührungscurve »darstellt, durch Nachahmung des *Jacobi*'schen Verfahrens für die

«Doppeltangenten einer ebenen Curve erhalten — die Discussion ist «freilich viel schwieriger als bei den Curven — und habe genau den «Grad gefunden, den Sie so leicht geschlossen haben, ohne nur den «Zusammenhang mit der Classe der Abwickelbaren zu bemerken. Es «folgt dann ferner daraus, dass die Anzahl der Ebenen, welche die «Basis in einer Curve schneiden, die zugleich einen Rückkehrpunkt «und einen Doppelpunkt hat, $4\,n\,(n-2)\,(n-3)\,(n^3+3n-16)$ ist, al- «so 1920 für die f^4. — Wenn α den *Grad* der doppelt umschriebenen «Abwickelbaren und β die Anzahl der dreifach berührenden Ebenen be- «zeichnen, so ist demnach

$$2\alpha + 3\beta = \frac{1}{2}\,n\,(n-2)\,(n^7 - 4n^6 + 7n^5 - 45\,n^4 + 118\,n^3 - 115\,n^2 + 508\,n - 912).$$

«Für $n = 4$ sehe ich die Möglichkeit vor, α zu bestimmen; aber ich bin «noch nicht im Stande gewesen, die Discussion der betreffenden Systems- «gleichungen befriedigend abzuschliessen. Für $n > 4$ verzweifle ich «daran, α oder β je finden zu können. — Wenn in meinem Schlüssen «nicht irgendwo ein Trug untergelaufen ist, so hat jene Berührungscurve «der doppelt umschriebenen Abwickelbaren die merkwürdige Eigenschaft, «dass sie eine *Vollcurve* ist, und mein Verfahren, dieselbe darzustellen, «führt, auf die Fläche dritten Grades angewandt, direct zur Auffindung «einer (aus einer vielfachen Schaar) Fläche 9ten Grades, welche durch «die 27 *Cayley*'schen Geraden geht.

«Ihren Schluss auf die Grade der zwei Berührungscurven der «zweien Flächen umschriebenen Abwickelbaren muss ich als richtig «anerkennen.

«Ist n der Grad der Basis (nach Classe frei), g, k Grad und Classe «einer Doppellinie oder Rückkehrlinie desselben, so erniedrigt jene «an sich die Classe der Basis um $g\,n + 2\,k$, diese an sich um $2\,g\,n + 3\,k$, «d. h. abgesehen von singulären Punkten einer jeden. — Jede Stelle, «wo drei Lappen der Fläche sich frei durchschneiden, an sich erniedrigt «die Classe um 3. Die Berührungsebene π, die mit Selbstberührungs- «punkt schneidet, sieht polarisirt so sonderbar aus, dass ich keine Be- «schreibung wage; mit grosser Mühe habe ich bewiesen, dass diese «complicirte Punkt die Classe um 6 erniedrigt. — Jeder Punkt endlich «wo ein Lappen der Fläche ihre Rückkehrlinie frei durchschneidet «ihre Doppellinie also einen gewöhnlichen Rückkehrpunkt hat, erniedrigt «die Classe der Fläche um 4.

»*Ad 2°* Ich werde Ihnen über die gemeinsam umschriebene »Abwickelbare zweier Flächen, die sich berühren, später antworten. »Ich hatte sogleich nach Empfang Ihres zweiten Briefes angefangen, »diese Abwickelbare für zwei sich berührende Flächen zweiten Grades »aufzusuchen; da ich aber nicht weiss, wie lange mich noch die Ent»wicklung einer 5-stelligen Determinante, die erst nach Entfernung »eines jetzt noch nicht sichtbaren linearen Factors das Gradespolynom »jener Abwickelbaren geben wird, aufgehalten hätte, so beeile ich mich »Ihnen endlich einmal zu antworten. Für jetzt nur so viel, dass mir »die Wendeebene der Abwickelbaren, die einem Rückkehrpunkt der »Durchschnittscurve entsprechen soll, spanisch vorkömmt!

»Nun sollte ich auf Ihren ersten Brief antworten. Es sind aber »darin theils Sachen, die kaum einer Bestätigung bedürfen, oder die »ich Ihrer freien Willkür überlassen muss, theils Betrachtungen, in »denen ich keine grössere logische Kraft zu erkennen vermag, als in »den entsprechenden eigenen, theils Betrachtungen, denen ich noch nicht »habe folgen können. Ich werde später im Einzelnen zu antworten »suchen. — Ihren Auftrag an *Leuenberger* habe ich besorgt. — Die »versprochenen Berliner-Dissertationen nehme ich recht gerne an und »werde sie an die betreffenden Herren vertheilen.

»Ihnen Glück, Kraft und gute Gesundheit wünschend

»Bern, den 7. März 1855. Ihr dankbarer Schüler

L. Schläfli.«

Schläfli an Steiner.

»*Lieber Freund!*

»Ich vermuthe zwar, dass Sie meinen Brief, den ich wahrschein»lich am 6. März Morgens um 9 Uhr auf die Post gethan habe, so»gleich nach dem Abgang des Ihrigen werden erhalten haben. Da er »aber auch verloren sein könnte, so muss ich Sie nun bitten, mir so »zu sagen mit umgehender Post anzuzeigen, ob Sie ihn erhalten haben. »Ich habe mich darin bemüht, vorzüglich die auf den Grad bezüglichen »Eigenschaften des Knotenpunkts einer sonst *nach Grad möglichst* »*freien* Fläche, und seiner nächsten Degenerationen in den *Kanten»knotenpunkt* und (noch spezieller) in den *Planknotenpunkt* deutlich »und in logischer Ordnung anzugeben. Ihr letzter Brief offenbart mir »aber eine so tiefe Verschiedenheit unserer Auffassungen dieses Gegen»standes, dass ich mich bewogen fühle, noch einige Worte beizufügen.

»Wenn wir einer (als Doppelschaar von *Punkten* gefassten) Fläche die »geringste Beschränkung auflegen, so ist es die Existenz eines Kno»tenpunkts. Halten wir nun diesen fest und setzen ihm irgend eine »feste Ebene gegenüber, so wird diese vom Knotenkegel in irgend »einem Kegelschnitt geschnitten. Da wir aber die Fläche nach *Grad* »aufgefasst haben, so müssen wir konsequenter Weise den Knotenkegel »als Schaar von Strahlen, den Kegelschnitt also als Schaar von Punkten »auffassen. Nun möchte ich fragen, ob denn da nicht die nächste, mit »einer einzigen neuen Bedingung zu erreichende Degeneration die »eines Paares verschiedener Gerader sei, und ob nicht erst zuletzt »die ärgste, weil drei Bedingungen erfordernde, Degeneration in zwei »vereinigte Gerade zu setzen sei. Im letzten Falle ist es der Punkt- »oder Gradesauffassung völlig fremd, den Punkt auf der, durch Vereini»gung zweier, entstandenen Geraden irgendwo anhalten zu wollen, »mag nun das Gebilde aus der Ellipse oder aus der Hyperbel degene»rirt sein. Ein Paar geschiedener Punkte, also ein Gebilde *nullten* »Grades, dürfen wir gewiss nicht an die Stelle einer Curve zweiten »Grades setzen! — Die Sache verhielte sich freilich anders, wenn wir »den Kegelschnitt als Schaar seiner Tangenten (nach Klasse) auffassten; »dann wäre die nächste Degeneration ein Paar geschiedener Strahl»büschel, und erst die letzte ein Paar vereinigter Strahlbüschel; aber »auch bei diesem würden Sie doch gewiss nicht die Strahlen auf die »zwei leeren Scheitelwinkel der Hyperbel beschränken wollen; sondern »wenn Sie einmal den Strahlbüschel gesetzt haben, so dreht sich der »Strahl ohne Aufenthalt ringsum; ein Paar verschiedener Geraden, »als Gebilde *nullter* Klasse, an die Stelle eines Kegelschnittes gesetzt, »wäre nun bei der Klassenauffassung eben solcher Unsinn, wie das »Punktenpaar bei der Gradesauffassung. — Ich halte daher an dieser »Rangordnung fest: Zuerst der Knotenpunkt schlechthin (zweiten Gra»des), 1 Bedingung für die Fläche; dann der Kantenknotenpunkt, »2 Bedingungen (im Ganzen); zuletzt der Planknotenpunkt, 4 Bedin»gungen. Der erste erniedrigt die Klasse der Fläche um 2, der zweite »um 3, der letzte um 6. — Die Scheidung zwischen Reellem und Ima»ginärem ist untergeordneter Natur, und darf daher nicht die Haupt»eintheilung abgeben.

»Das Polare, Streifebene einer nach Klasse möglichst freien Flä»che, ist entweder reine Uebersetzung alles für die Gradesauffassung »Gesagten; oder aber, wenn wir diese neuen Gebilde nun auch nach »Grad anschauen wollen, so müssen wir vorher am Knotenpunkt der

»Gradesfläche die von ihm oder sehr nahen Punkten aus umschriebe-
»nen Kegel gehörig studirt haben; dieses ist aber gar nicht leicht;
»und ich bin jetzt noch nicht im Stande, darüber zergliederte Aus-
»kunft zu geben.

»Bei dem einer Gradesfläche n^{ten} Grades umschriebenen Kegel
»ist $r=n(n-1)(n-2)$; denn der Rückkehrstrahl berührt die Basis
»da, wo die erste und zweite Polare des Kegelscheitels durchgehen;
»$w=4n(n-1)(n-2)$; denn die Wendestrahlen berühren die Basis
»da, wo erste Polare und Kernfläche Q durchgehen;

$$d=\frac{1}{2}n(n-1)(n-2)(n-3).$$

»Wird diese Fläche von einer Ebene geschnitten und werden
»längs des Schnitts Berührungsebenen an sie gelegt, so bilden diese
»eine Abwickelbare $n(n-1)$ ter Klasse und $n(3n-5)$ ten Grades;
»ihre Rückkehrlinie scheint nur vom $6n(n-2)$ ten Grade zu sein;
»denn sie berührt die Ebene in den Wendepunkten des Schnitts, und
»ich wüsste nicht, wo sie ihr sonst begegnen könnte.

»Wenn bei der Klassenauffassung eine Ebene die Rolle des Pols
»übernimmt, dürfte man ihr vielleicht einen andern Namen, etwa *Po-*
»*lane* geben. Ihr Satz über den (letzten) Polarpunkt der unendlich
»entfernten Ebene ist richtig; nur sind die Worte »gefällten Perpendikel«
»aus Versehen weggelassen.

»Ihren Auftrag an Prof. *Vogt* werde ich sogleich besorgen. Herrn
»*Chelini* habe ich leider noch nicht geschrieben. Bleiben Sie nun
»einmal bei *Büschel, Gebüsch, Netz* stehen; denn *Geflecht* ist um kein
»Haar besser als Gebüsch; sonst entsteht zwischen uns zweien baby-
»lonische Sprachverwirrung.

»Wenn eine f^3 einen Kantenknotenpunkt hat, so enthält jede
»Knotenebene drei vom Knotenpunkt ausgehende Gerade (von freier
»Lage), deren jede *drei* sich nicht schneidende Cayley'sche Gerade in
»sich vereinigt. Die übrigen 9 Cayley'schen Geraden sind vereinzelt
»und werden von einem Triederpaar gebildet. Jede Knotenebene
»vereinigt in sich 6 Dreiseite. Legt man durch je eine Gerade der
»einen und irgend eine der andern Knotenebene eine Ebene (was 9
»mal geschieht), so vereinigt diese Ebene 3 Dreiseite in sich. Es
»bleiben nur noch 6 vereinzelte Dreiseite übrig, die vom Triederpaar
»gebildet werden und nicht durch den Knotenpunkt gehen. — Beim
»Planknotenpunkt vereinigt jede der drei in der Knotenebene befind-
»lichen Geraden in sich 4 Paare sich schneidender Cayley'scher Ge-
»raden, so dass nur noch 3 vereinzelte Cayley'sche Gerade übrig bleiben,

«welche ein getrenntes Dreiseit bilden. Durch jene 3 ersten Geraden «gehen 3 Streifebenen der Fläche. In die Knotenebene fallen 32 Dreiseite «(von den 8 Streifstrahlen gebildet, also nullen Inhalts); in jede Streif- «ebene fallen 4 Dreiseite (schmal und lang); 1 Dreiseit ist vernünftig. «— Sie herzlich grüssend

«Bern, den 13. März 1855, Abends 7 Uhr.

«Ihr dankbarer Schüler

L. Schläfli.»

Steiner an Schläfli.

18. März 1855. [1])

«*Treuer Freund!*

«Kaum hatte meine Dienstbare das Haus mit meinem Brief ver- «lassen, als mich der Briefträger mit dem Ihrigen herausklingelte. «Ich danke sehr für die schätzbaren und willkommenen Aufschlüsse.

«Dass Sie aber seit zwei Monaten meinen ersten Brief unbe- «achtet gelassen — *müht* mich sehr. Ueber den zweiten machen «Sie mir den Kopf gross, dagegen den ersten erklären Sie am Ende «Ihres vorletzten Briefes — wenn auch nur indirect für Blödsinn. «Dennoch hat mir der erste ungleich mehr Mühe gemacht; er ist «aus einem Wust von 9 Bogen Manuscript ausgezogen, und schwellte «meine Brust mit froher Hoffnung: Sie würden schöne Ergänzungen «und Erweiterungen darauf bauen! Er muss Sie bei reichem anderm «Lieblingsfutter getroffen haben. Beweist er nicht die zwei Sätze, «welche Sie im Entwurf in Klammern ( ) nur *als wahrscheinlich* an- «gaben? Zudem enthält er den Stoff zur reichhaltigen, eines Schul- «meisters würdigen Erweiterung und Ausstaffirung des „§ *über die* «*Bestimmbarkeit der Flächen durch Punkte*". Da ich eben mit Redi- «giren daran komme, so bitte ich sehr auch diesem Plunder einige «Theilnahme zu schenken. Lassen Sie für kurze Zeit andere Partien «des Universums fahren, um mir recht bald das Ergebniss der Ver- «besserung zuzusenden. Die analytischen Deductionen können Sie «meist sparen, und nur die *sichern Resultate* angeben, da ich — im «Bewusstsein meines hocherhabenen synthetischen Standpunkts — doch «nirgends davon Gebrauch machen darf. Daher beurtheilen Sie mich «auch falsch, wenn Sie oft wähnen, ich schaue die Gegenstände eben- «falls in ihren analytischen Gründen an.

---

[1]) Dazu existirt ein Concept vom 17.—19. März 1855.

«Diesmal habe ich keine neue Fragen vorzulegen; nur sah ich «beim Vorbeifliegen den folgenden Satz:

«Wird einer f^8 aus beliebigem Pol P ein Kegel umschrieben, «der sie in einer R^6 berührt und nebstdem in einer R_1^6 schneidet, «so gehen durch diese zwei Curven beziehlich zwei Flächen f^2 und «f_1^2, welche einander umschrieben sind, und zwar liegt ihre Berühr-«ungscurve in der allen drei Flächen f^3, f^2 und f_1^2 gemeinsamen «Polarebene des Pols P in Bezug auf dieselben, so dass also der den «Flächen f^2 und f_1^2, längs der Berührungscurve gemeinsam umschrie-«bene Kegel seinen Scheitel im Pol P hat.

«Allerdings zählt jede der n-Tangenten im n-fachen Punkt einer «C^m für $n+1$ Tangenten, wofern man die C^m als von der $m(m-1)$ «Klasse ansehen will, was häufig erforderlich ist. Die von Ihnen ge-«machte Unterscheidung ist mir nicht recht klar, vielleicht wird es «nachträglich noch kommen.

«Morgen werde ich meine Vorlesungen schliessen. Es harrten «nur 3 Zuhörer bis an's Ende aus; davon sind zwei Eidgenossen: der «Sohn des alten *Sidler*[1]) (Zug-Zürich, Commissär in Mailand) und der «Sohn meines Universitätsgenossen Prof. *Hagenbach*[2]) in Basel; sie sind «die einzigen bezahlenden, alle übrigen gestundet. Ich stand also in «diesem Semester pekuniär nicht viel besser als Sie.

«Heute früh fiel hier starker warmer Regen, von Süd und Süd-«west her; der Schnee schmolz mit Macht; jetzt um 12 Uhr scheint «die Sonne schön, wie über Lord *Raglan's* Lager vor Sebastopol. — «Indem ich Ihnen das Wylerfeld[3]) auch schneefrei wünsche, grüsse ich «dankbarlich und herzlich

«Ihr

J. Steiner.»

«Berlin, den 18. März 1855.

«Wer am 18. März 1796 geboren, verlebt heute seinen 60ten Ge-«burtstag. — Es ist erschrecklich die Arbeiten und Pläne noch un-«vollendet herumliegen zu haben! Die Unfähigkeit nimmt zu — wie

---

[1]) Professor Dr. G. Sidler, mein verehrter Lehrer und Kollege.

[2]) Professor E. Hagenbach-Bischoff in Basel.

[3]) Bevorzugter Spaziergang Schläfli's.

«lange wird's noch dauern bis der *jüngste* Tag — die *Auflösung* «eintritt!

«Lese ich recht, proponiren Sie für die Ebene, ~~welche die Rolle~~ «des Pols übernimmt, den Namen *Polane* und nicht *Polare*?

«Oh Gedächtniss! Oh Schafskopf!»

4ter Brief[1]). März 17—19. Cima's vom 13. erst 17. 2 Uhr erhalten.

— — — — — — — — — — — — — — —
— — — — — — — — — — — — — — —

«Wenn z. B. eine Curve sammt ihrer Ebene sich um eine «ihrer Tangenten herumbewegt (auch eine Raumcurve mit dem «ganzen Raume sich um eine ihrer Tangenten, als feste Axe.) «Der andere Fall könnte so erzeugt werden, dass die Curve um die «Normalen in einem ihrer Wendepunkte oder in einem Selbstberüh- «rungspunkt herumbewegt wird. — Es sind nicht Übergangsfälle, «sondern Grenzfälle des hyperboloidischen Knotenpunkts, und daher «habe ich gefehlt, dass ich in der Reinschrift den ersten Fall *para- «boloidisch* genannt habe.

«Zerfällt der Knotenkegel in 2 Ebenen die *reell* oder *imaginär* «sind, so heisst jetzt der Knotenpunkt *hyperbolisch* oder *elliptisch*. Wie «schwer es mir wird einzusehen, dass dabei in jeder der beiden Ebenen «drei t liegen, habe ich Ihnen schon unterbreitet und erwarte *sichere* «Auskunft.

«Hat die f^3 einen kp, so wird sie vom Kk längs dreien Strahlen «s berührt; und daher hat f^3 die längs diesen s berührenden 3 Ebenen «zu *Dehn-Streifebene* (oder Voll- oder wie man sie heissen soll) Ebenen. «Hat f^6 vier Knotenpunkte, die ein Tetraeder T bestimmen, so berührt «jeder Knotenkegel längs der 3 anliegenden Kanten, und je zwei be- «rühren sich längs einer Kante und haben daher noch einen durch «die zwei andern kp gehenden ebenen Schnitt C^2. Die Ebene der sechs «C^2 gehen durch einen Punkt Q. Die 4 Knotenkegel sind einer f^2 «umschrieben, welche die 6 Kanten des T berührt; und die f^6 hat 6 «Dehnebenen, die sie längs der 6 Kanten von T berühren und die «Ecken zu Grenzpunkt haben. — Für die Fläche *dritter Klasse* ist alles «analog.

---

[1]) Zum Teil ein Concept zum Brief vom 18. März 1855 wenigstens bis zum Ausdruck «analytischen Gründen an».

4. «Braucht(man) *Schaar* nicht zu definiren? — Wenn Sie sagen «*eine oppelschaar von Flächen*» muss da nicht hinzugesetzt worden «gleichen rads» oder «gleicher Klasse»? oder liegt dies schon drin? Kann ıan bei einer Doppelschaar Fläche «von drei successiven Flächen» prechen, da doch jede gleichsam von einer Schaar nächstfolgenden mgeben ist?

5. «Da wir die Klasse der einer f^m doppeltumschriebenen Abickelbaren kennen, so muss auch der Grad ihrer Berührungscurve ^{x} zu finden sein. Denn ist jene Klasse $= \mu$, so gehen durch jeden μ-Doppelebenen und daher schneidet die erste Polare f^{m-1} von P ie R^x in $2 \times \mu$ Punkten, so dass $(m - 1) \times x = 2\mu$, also $= \frac{2\mu}{m-1}$ ist.

«Bei zwei gegebenen Flächen f^m und f^n ist die ihnen gemeinsam nschriebene Abwickelbare von der $m(m-1)^2 \times n(n-1)^{2\text{ten}}$ lasse; ihre B. C. M^μ und N^ν mit den Flächen werden also von

— — — — — — — — — — — — — —

— — — — — — — — — — — — — —

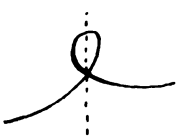
Schläfli an Steiner.

Lieber Freund!

«(18. März.) Ich fühle mich veranlasst, eine falsche Vorstellung ber die *Streifebene* wegzuräumen, die sich voriges Jahr in Bern uns ın Gespräch über diesen Gegenstand aufgedrungen hatte, als ob ämlich ihr Berührungs- oder Streifkegelschnitt als *dreifacher* (!) lestandtheil ihres ganzen Schnitts mit der Basis zu zählen wäre. Im die Sache zu entscheiden, ziehen wir in der Streifebene eine eliebige Gerade und fragen uns, wie oft jeder der zwei Punkte ählt, in denen sie den Streifkegelschnitt schneidet. Ist die Basis on der nten Classe und rücksichtlich dieser möglichst wenig beschränkt, so muss die vom Grade $n(n-1)^2 - 2$ sein; die Gerade chneidet also die Basis im Ganzen nur in soviel Punkten.

«Polarisiren wir nun zurück, so heisst die Frage: Wie viele lerührungsebenen können an eine Basis nten Grades, die einen notenpunkt hat, durch einen von diesen ausgehenden Strahl gelegt erden? Die Analysis antwortet: Nur $n(n-1)^2 - 6$, deren Berührungspunkte nicht mit dem Knotenpunkt zusammenfallen. Es ehen also nur 4 Berührungsebenen verloren, nicht 6; denn die

»Classe der Fläche ist nur n $(n-1)^2-2$. Diese 4 verlorenen »Ebenen sind wohl in den zwei durch jenen Strahl an den Knoten»kegel gelegten Umschreibungsebenen wieder zu finden, wenn jede »doppelt gezählt wird. — Demnach schneidet die Streifebene einer »Basis nter Classe dieselbe in dem *doppelt* zu zählenden Streifkegel»schnitt und ausserdem noch in einer Curve vom Grade n $(n-1)^2-6$ »und der Classe n $(n-1)-6$. Ist die Basis von dritter Classe, »so besteht diese Curve nur aus den 6 ausgezeichneten Tangenten des »Streifkegelschnitts.

»Gradesauffassung: Der aus dem Knotenpunkt einer Fläche drit»ten Grades dieser umschriebene Kegel besteht aus dem doppelt zu »zählenden Knotenkegel und denjenigen 6 Ebenenbüscheln, in deren »Axen sich je zwei entsprechende (also sich nicht schneidende) Strahlen »des durch den Knotenpunkt gehenden Doppelsechsers vereinigen. — »Mich dünkt, diese Ansicht sei auch durch geometrische Betrachtung »zu rechtfertigen. Denken wir uns eine Curve mit Knotenpunkt, »welche von einem durch diesen gehenden Strahl symmetrisch ge»theilt wird,  nehmen auf diesen Strahl nahe beim »Knotenpunkt (auf der convexen Seite der Zweige) einen Punkt an und »ziehen von da aus die 4 gewöhnlichen Tangenten, deren Berührungs»punkte in der Nähe liegen. Indem wir jetzt die Figur um die Axe der »Symmetrie herumdrehen, erhalten wir auch zugleich *zwei* umschriebene »Kegel, die beim Zusammenfallen ihres Scheitels mit dem Knoten»punkt sich endlich im Knotenkegel vereinigen,

»(23. März.) Da ich fürchte, es möchte zu lange dauern, bis ich »alle die *Streifebene* betreffenden Einzelheiten erledigt habe, so fange »ich an, das sicher gewordene niederzuschreiben.

»1°. Die *gemeine Streifebene berührt* die Fläche nter Classe längs »eines Kegelschnitts und zwar in 6 Intervallen abwechselnd von oben »und von unten. Diese Intervalle sind durch die Berührungspunkte »der 6 *ausgezeichneten Tangenten* getrennt, längs denen 6 Lappen »der gemeinsamen Abwickelbaren des Kegelschnitts und der Basis »die Streifebene berühren. Diese 6 t haben dieselbe Eigenschaft in »Beziehung auf die der Basis längs ihrer Rückkehrlinie umschriebenen

Abwickelbaren, und sind zugleich höchst wahrscheinlich Tangenten dieser Rückkehrlinie. — Die Streifebene schneidet die Basis ausserdem in einer Curve Grades $n(n-1)^2-6$ und Classe $n(n-1)-6$.

•2°. Die *Gerad-Streifebene* (mit reellem Punktpaar A, B) *osculirt* die Basis längs der Streifgeraden A, B und schneidet sie ausserdem in einer Curve Grades $n(n-1)^2-6$ und Classe $n(n-1)-6$. (Der Gerad der Fläche ist nämlich nur $n(n-1)^2-3$). Denkt man sich A B vorwärts gerichtet, und ist zwischen A und B der Sinn der Wendung von links unten nach rechts hinauf, so ist er ausserhalb von links oben nach rechts hinunter. Von den 6t gehen drei durch A, drei durch B (sonst ihre Lage frei). Verbindet man je eine von jenen mit einer von diesen, so erhält man ein Dreieck F G U (auf 6 Arten; ich spreche aber nur von irgend einer aus diesen), so dass nun A F, A G, A U; B F, B G, B U die sechs ausgezeichneten Strahlen (Tangenten) sind. Man betrachte die Streifgerade A B als Transversale des Dreiecks F G U, und nehme den zugeordneten Punkt F (Schwerpunkt, wenn A B unendlich entfernt). Die *Classen-Kernfläche* hat dann das Dreieck A B F zur *Dreipunkt-Streifebene* (dritter Classe). Man zeichne nun eine Curve u dritten Grades, welche F zum Doppelpunkt und die Seiten des Dreiecks F G U zu Wendungstangenten hat, deren Punkte auf der Streifgeraden A B liegen und ziehe endlich aus A und B an die u die *acht gewöhnlichen Tangenten* t. (Diese werden immer dieselben Geraden sein, welches von den 6 möglichen Dreicken F G U man auch gewählt haben mag.) Nun, die der Basis längs ihrer Rückkehrlinie umschriebene Abwickelbare sendet 8 Lappen hin, um die Streifebene längs den 8 soeben construirten t zu berühren. Wie die Rückkehrlinie in A und B selbst aussieht und was sie da für Tangenten hat, wage ich noch nicht zu entscheiden. Es wird unten (Kernflächen!) etwas kommen, das Sie hieher beziehen können.

•3°. Die *Punkt-Streifebene* (mit zwei vereinigten Punkten O) hat 3 ausgezeichnete Punkte F, G, U (eine noch unklare Art von Knotenpunkten), *berührt* die Fläche längs der Strahlen O F, O G, O U und schneidet sie ausserdem in einer Curve Grades $n(n-1)^2-12$ und Classe $n(n-1)-6$; (denn der Grad der Fläche ist nur $n(n-1)^2-6$.) Man umschreibe dem Dreieck F G H einen Kegelschnitt K harmonisch zum Streifpunkt O, (d. h. wenn O der Schwerpunkt ist, so sind die Tangenten des Kegelschnitts in den

«Ecken parallel mit den Seiten). Die Classen-Kernfläche hat dann die «Streifebene zu einer solchen 4ter Classe, indem die Streifcurve aus K «und dem doppelten Punkte O besteht. Die der Basis längs ihrer «Rückkehrlinie umschriebene Abwickelbare *osculirt* die Streifebene «längs der von O aus an K gehenden zwei Tangenten und *berührt* «*sie zweilappig* längs jeder der Geraden O F, O G, O H; jede von «diesen (eigentlich ein t paar) ist Selbstberührungsstrahl der Ab- «wickelbaren.

«Sie sehen aus dem Bisherigen, dass ich die Kernfläche einer «Fläche n^{ten} *Grades* für den gemeinen, den Kanten- und den Plan- «knotenpunkt untersucht habe. Da bei der Classenauffassung manches «nicht deutlich vorgestellt werden kann, was für die Gradesauffassung «leicht ist, so suche ich das Vorige noch durch einige *vom Grad aus* «gemachte Bemerkungen zu ergänzen. Sie erinnern sich vielleicht «aus dem perhorrescirten analytischen Beweise für die *freie* Lage der «6 ausgezeichneten Strahlen des Knotenkegels, selbst wenn dieser «in ein Ebenenpaar übergeht, (den ich, unschuldig genug, in der «guten Absicht anbrachte, um Sie von der Richtigkeit meiner An- «schauung zu überzeugen), dass ich ausser dem Knotenkegel N noch «einen Kegel P dritten Grades mit gleichem Scheitel gebrauchte, um «die 6 ausgezeichneten Strahlen jenes N darzustellen. Nun dieser P «ist in allen drei Fällen vollkommen frei, hat aber an sich keine Be- «deutung; sondern wenn man zu N noch irgend eine durch den «Knotenpunkt gehende Ebene hinzunimmt, um einen Kegel dritten «Grades zu haben, der mit P einen Büschel bestimmt, so *darf* P durch «jeden Kegel dieses Büschels ersetzt werden. Ist N ächt, so sind in «diesem Büschel 15 Trieder; 6 wenn N ein Paar getrennter Ebenen «ist; endlich nur 1 Trieder, wenn N eine doppelte Ebene ist. Im «letzten Falle bekömmt das Trieder wesentliche Bedeutung; der Schnitt «einer Ebene desselben wird (im Unendlichkleinen betrachtet) von «der Selbstberührungstangente (in der Knotenebene) symmetrisch ge- «theilt, so dass die Krümmungshalbmesser der sich berührenden Zweige «der Schnittcurve gleich und entgegengesetzt sind: während jeder «andere durch denselben ausgezeichneten Strahl geführte ebene Schnitt «zwar auch noch den Knotenpunkt zum Selbstberührungspunkt hat, «aber auf allgemeine Weise. Ich schreibe nun diesem Trieder einen «Kegel zweiten Grades ein, so dass jeder Berührungsstrahl mit dem «entsprechenden ausgezeichneten Strahl der Knotenebene harmonisch «ist in Bezug auf die zwei betreffenden Kanten des Trieders. Dieser

Kegel J möge die Knotenebene in den zwei Strahlen i schneiden. Dann hat die *Kernfläche* hier einen Knotenpunkt 4ten Grades, bestehend aus der doppelten Knotenebene und dem Kegel J; und ihr Schnitt mit der Basis sendet 1. zwei Paare von Zweigen in den Knotenpunkt, welche die Strahlen i zu Rückkehrtangenten haben, aber den Kegel J auf gewöhnliche Weise berühren; 2. drei Paare von Zweigen, welche die drei ausgezeichneten Strahlen (in denen das Trieder die Knotenebene schneidet) zu Selbstberührungstangenten haben, aber die Triederebenen auf gewöhnliche Weise berühren.

«Beim Kantenknotenpunkt will ich, was den Schnitt der Kernfläche und Basis betrifft, nicht das schon Gesagte zurück polarisiren; es ist bei der Classenauffassung wohl deutlich genug ausgedrückt.

«Nun etwas, was für die Classenaufführung auch von Wichtigkeit wäre, indem es die Stellen der Rückkehrlinie betrifft, wo ihre Tangente zusammenfällt mit dem Strahl der längs ihr der Basis umschriebenen Abwickelbaren. Sie wissen, dass eine freie Fläche n^{ten} Grades $2n(n-2)(11n-24)$ Stellen π hat, wo sie von der Berührungsebene mit Selbstberührungspunkt geschnitten wird. Ich habe nun analytisch sicher bewiesen, dass ein gemeiner Knotenpunkt 24 solche π verschlingt, ein Kantenkontenpunkt 36; für den Planknotenpunkt ist mir die Discussion des verwickelten Systems von Gleichungen noch nicht gelungen; aber, wenn man von der Fläche 3ten Grades aus schliessen darf, so muss er 48 π verschlingen.

«Beim gemeinen Knotenpunkt bekömmt wohl jeder der 6 Curvenzweige, welche die Kernfläche mit der Basis gemein hat, 4 solche verschlungene π; aber beim *Kantenknotenpunkt* entsteht die wunderliche Frage, wie man die 36 π auf die 8 Curvenzweige vertheilen soll.

«Ich habe die Classengleichung einer Fläche 3ten Grades mit Planknotenpunkt (die also durch 15 gegebene Punkte bestimmt wird) entwickelt und mittelst derselben eine klare Anschauung gewonnen, wie eine Fläche 6ten Grades und 3ter Classe mit einer Punkt-Streifebene in der Nachbarschaft des zweieinigen Streifpunkts aussieht. Um schulmeisterlich zu reden, denke ich mir ein reguläres Tetraeder FGHZ und fälle aus der Spitze Z auf die Basis FGH die senkrechte ZO. Dann soll die Basis die Streifebene, O der zweieinige Streifpunkt, und OF, OG, OH, die drei ausgezeichneten (zweieinigen) Strahlen sein. In der Basis brauche ich Polarcoordinaten, wo der Leitstrahl (radius vector) r von O ausgeht und mit dem ersten Strahl

«OF den Winkel $180^0 + \varphi$ bildet; die dritte Coordinate z sei der «senkrechte Abstand eines Punkts der Fläche von der Basis. Be- «deutet nun a eine constante Linie, und ist $\frac{r}{a}$ unendlich klein, so «hat die Fläche hier einen obern und einen untern Lappen (wenig- «stens wenn man nur positive Werthe von r betrachtet), deren «Gleichungen

$$«2\,a^2 z = -r^3 \cos^2 \frac{3\varphi}{2} \text{ und } 2\,a^2 z = +r^3 \sin^2 \frac{3\varphi}{2}$$

«sind. Die Streifebene wird also ringsum von der Fläche doppelt oscu- «lirt, vom obern Lappen längs der positiven Strahlhälften OF, OG, OH «gestreift, vom untern längs den negativen Hälften. Ich muss aber «zwischen hinein etwas corrigiren. Nur die Basis FGH soll ein regu- «läres Dreieck sein, die Wände FGZ, GHZ, FHZ soll darauf senkrecht «stehen und um a von O entfernt sein; der Scheitel Z liegt also un- «endlich weit weg; er ist der einzige freie Triederknoten der Fläche, «welche die Geraden ZF, ZG, ZH enthält. Die Classen-Kernfläche «reducirt sich auf den doppelt zu zählenden Streifpunkt O und den «aus diesem Centrum durch F, G, H gelegten Kreis. Die ihr und der «Basis gemeinschaftliche Abwickelbare ist der letztern längs ihrer «Rückkehrlinie umschrieben, welche eigentlich vom 24sten Grade sein «sollte; ihr ächtes untheilbares Stück ist aber nur vom 6ten Grade; «es gehen nämlich durch eine Fläche dritten Grades und eine Um- «drehungsfläche zweiten Grades, deren Gleichungen

$$«(6a - z)\, r \cos 3\varphi + 9a^2 + 4az - z^2 = 0,$$
$$«9r^2 + 4z^2 - 24az = 0$$

«sind. Der Verlust ist zum Theil zu erklären, durch die drei Geraden «OF, OG, OH, deren jede 4 mal zählt; aber das fehlende 6 weiss ich «nicht herauszubringen. Aus der Gradesauffassung durch Polari- «sirung hinüber zu schliessen, müssten die vom Centrum O an den «Kreis gehenden zwei Tangenten eine Rolle spielen, indem jede die «Zahl 3 verschlänge; aber diese liegen gar nicht in der Basis, son- «dern schneiden sie nur im Centrum 6-punktig. — So weit die Schul- «meisterei. Verwandeln Sie nun perspectivisch nach Belieben, und Sie «haben den wahren Begriff von der Sache.

«Ich habe auch die Polarisirung der Fläche dritten Grades mit «Kantenknotenpunkt (also 9ter Classe) unternommen. Merkwürdiger «Weise gelingt sie mittelst der *Steiner-Hesse-Aronhold*'schen Theorie «der Wendepunkte der Curve dritten Grades. Aber die hiezu nöthigen «Entwicklungen werden noch längere Zeit in Anspruch nehmen.

«(25. März.) Um nichts zu unterlassen, was bei den classischen «Flächen mit Streifebene zur Veranschaulichung beitragen kann, habe «ich die Gegend des Punkts untersucht, wo der Streifkegelschnitt «von einer seiner 6 ausgezeichneten Tangenten t berührt wird, also «die Längsberührungs- oder Streifungsweise der Basis aus einer obern «(über der horizontal gedachten Streifebene) in eine untere übergeht. «Der Punkt ist ein sehr specialisirter Planknotenpunkt P der Basis, «wo nämlich alle drei ausgezeichneten Strahlen der Knotenebene mit «t zusammenfallen. Ein durch P frei geführter ebener Schnitt schnei- «det die Basis mit Rückkehrpunkt; aber ein durch t geführter ebener «Schnitt sendet zwei horizontale Zweige durch P, welche beide hier «einen Wendepunkt haben. Will man die Gegend der Fläche um P «herum im unendlich kleinen in erster Annäherung ausdrücken, so «bedarf man hiezu einer Fläche 6ten Grades. Nehmen wir die t als «erste Axe, senkrecht darauf in der Streifebene eine zweite, und senk- «recht auf diese Ebene eine dritte Axe des Coordinatensystems an, «und setzen dann die der ersten Axeparallele Abmessung als unend- «lich klein erster Ordnung, so sind die zwei folgenden Abmessungen «oder Coordinaten resp. zweiter und dritter Ordnung. Hebt man «durch Dehnung der zweiten und dritten Axe das Missverhältniss auf, «so dass die Fläche nach allen Richtungen von gleicher Ordnung er- «scheint, so zeigt sie eine Doppellinie, welche in P die Axe t und «die Streifebene berührt, und durch eine Art enger in P sich zu- «spitzender Röhre entsteht, aus welchem Vorgang, wie ich glaube, Sie «sich das Umschlagen der Streifungsweise aus oben in unten werden «veranschaulichen können. Da hier 4 π zu Grunde gehen, so muss «ausser der Rückkehrlinie auch noch die Doppellinie hieher gelangen, «aber ihr beiderseitiges Verhalten vermag ich mir nicht recht klar «zu machen. Vielleicht später! Sie mögen hieraus entnehmen, welche «Arbeit es kosten wird, auch bei der Geradstreifebene die Gegend «um einen der zwei Streifpunkte aufzuklären.

«Ich glaube mit diesen Mittheilungen wenigstens einem Theile «Ihrer Wünsche zu entsprechen, und nehmen Sie es mir nicht übel, «dass ich nicht mit allem auf einmal fertig werden kann. Ich bin die «verflossene Woche mit Examen beschäftigt gewesen, und auch diese «noch werde ich es sein; dazu werden meine Vorlesungen bis Mai «fortdauern. Ihren ersten Brief werde ich noch, soweit es mir mög- «lich ist, beantworten; nur werden Sie mir nicht zumuthen, dass ich «so schwierige Vorstellungen im ersten Anlauf zu durchdringen ver-

«möge. Ihren letzten Satz habe leider noch nicht geprüft. Unter-
«brechen Sie die Correspondenz nicht zu lange.

«Vergessen Sie die Zusendung der Dissertationen nicht.

«*Polane* mit n habe ich mit Fleiss geschrieben, weil das Ding
«dem *Pol* und nicht der Polare entsprechen soll.

«Ich sollte mich noch gegen eine Masse von Vorwürfen ver-
«theidigen; aber der Raum fehlt dazu. Seien Sie herzlich gegrüsst
«und halten mich immer für

«Ihren treuen Schüler

«Bern, den 25. März, Abends. *L. Schläfli.*»

Schläfli an Steiner.

«*Lieber Freund!*

«(27. März.) Endlich versuche ich, auf Ihren werthen Brief vom
«28. Jan. zu antworten. Sie werden wohl kaum eine Abschrift des-
«selben haben; aber ich muss mich doch der Kürze wegen auf die Num-
«mern desselben beziehen, um nicht Ihre eigenen Worte wiederholen
«zu müssen. Es mag mir auch manchmal begegnen, dass ich Ihnen
«dieselben Dinge zweimal schreibe, weil ich mich nicht daran erin-
«nere, sie Ihnen schon geschrieben zu haben. Zur Sache!

«*Ad 4.* Stimme bei.

«*Ad 5.* An Ihrer Stelle liesse ich diese künstliche, nicht über-
«zeugende Ableitung fahren. Wenn Sie einmal eine f^n dadurch, dass
«Sie $\binom{n+2}{2}$ Punkte derselben in einer Ebene annehmen, gezwungen
«haben, diese Ebene zu enthalten, so dünkt mich, seien Sie auf rein
«anschaulichem Boden nicht befugt zu wissen, ob nun die Aufgabe
«bestimmt oder unbestimmt oder unmöglich sei. Da ich keine Vor-
«stellung davon habe, wie man eine algebraische Fläche anders defi-
«niren kann als durch ihr Polynom, so dünkt mich hier das einzig
«Natürliche, sich an die Zahl der Glieder des Polynoms zu halten:
«diese liegt aber ganz klar vor als Zahl der Combinationen mit Wie-
«derholung von 4 Elementen zu je n, also $\binom{n+3}{n} = \binom{n+3}{3}$:
«folglich ist $\binom{n+3}{3} - 1$ die Zahl der Bedingungen, durch welche
«die f^n bestimmt wird.

»*Ad 6.* Sie setzen die Zahl der Bedingungen, damit eine Fläche in drei von den Graden α, β, γ zerfalle, doppelt an; sie ist bloss

$$\frac{1}{2}\left\{\left(\sum\alpha+4\right)\sum\beta\gamma-\alpha\beta\gamma\right\}.$$

»Alle Flächen nten Grades, die durch eine Vollcurve $\alpha\times n^{ten}$ Grades gehen, bilden eine $\binom{n-\alpha+3}{3}$ fache Schaar, nicht eine $\left\{\binom{n-\alpha+3}{3}-2\right\}$ fache.

»*Ad 7.* Der von Ihnen bemerkte Widerspruch rührt nur daher, dass Sie den Satz über nothwendige Punkte nicht vollständig aussprechen. Er muss heissen: »Wenn die Zahl n von keiner der Zahlen α, β übertroffen wird, und es soll eine C^n durch die $\alpha\beta$ Schnittpunkte einer C^α und C^β gehen, so ist unter diesen *keiner* nothwendig, wenn $n>\alpha+\beta-3$; aber $\binom{\alpha+\beta-n-1}{2}$, wenn $n<\alpha+\beta$ ist.« Für $\alpha=\beta=1$, $n=2$ giebt es daher *keinen* nothwendigen Punkt. — Der ähnliche Satz über Flächen heisst so:

»Wenn die Zahl n von keiner der Zahlen α, β, γ übertroffen wird, und es soll eine f^n durch die $\alpha\beta\gamma$ Schnittpunkte einer f^α, f^β, f^γ gelegt werden, so kann es unter diesen nothwendige geben. Um deren Anzahl zu bestimmen, lasse man im Aggregat

$$(1+x)^{\alpha+\beta+\gamma-n-1}-(1+x)^{\alpha+\beta-n-1}-(1+x)^{\alpha+\gamma-n-1}-(1+x)^{\beta+\gamma-n-1}$$

diejenigen Glieder weg, deren Exponenten *negativ* sind, und entwickle den Rest nach den Potenzen von x, dann ist der Coefficient von x^s die gesuchte Anzahl.«

»Mich dünkt, ich habe Ihnen diesen Satz schon geschrieben. Er ist eine nothwendige Folge aus der freilich noch unbewiesenen einzigen Hypothese, auf der unsere ganze Raumcurventheorie etc. beruht.

»*Ad 8.* Anfang: stimme bei. — Aber: mein Satz über die Zahl der nothwendigen unter den nab Punkten, in denen eine f^n eine Vollcurve (f^a, f^b) schneidet, ist nicht unbedingt so, wie Sie ihn aussprechen, sondern: Diese Zahl ist $\frac{1}{2}$ ab $(a+b-4)+1$, wenn $n>a+b-4$ ist; hingegen $\frac{1}{2}$ ab $(a+b-4)+1-\binom{a+b-n-1}{3}$.

«wenn $n < a+b$ ist. Der Binomialcoefficient ist nur dann abzuzie-
«hen, wenn der Exponent $a+b-n-1$ positiv ist, was wiederum für
«dessen Werthe 0, 1, 2 unnöthig wird, weil dann der Binomial-
«coefficient verschwindet. Aber für einen negativen Werth von
«$a+b-n-1$ verschwindet der Binomialcoefficient nicht, und die For-
«mel ist falsch, wenn sie ihn dann noch enthält.

«*Ad 10.* Muss vor Nr. 9 beantwortet werden. — Es sei ϱ
«eine Raumcurve g^{ten} Grades und k^{ter} Classe; durch diese mögen
«drei Flächen M, N, P resp. m^{ten}, n^{ten}, p^{ten} Grades gehen. Dann
«schneiden sich M, N ausser ϱ noch in einer R Raumcurve $(mn-g)^{ten}$
«Grades. Um zu wissen, wie viele nicht in der ϱ liegende Punkte
«diese R mit der Fläche P gemein hat, müssen wir zuvor die Zahl $\varkappa$
«der gemeinschaftlichen Punkte von R und ϱ kennen. Denken wir uns
«nun eine beliebige Gerade l gegeben, so wird der Ort eines Punkts
«X, dessen auf M, N bezüglichen Polarebenen mit l einen Punkt gemein
«haben, eine Fläche $(m+n-2)^{ten}$ Grades sein und 1^0 die ϱ in allen
«k Punkten schneiden, in denen sie von einer durch l gelegten Ebene
«berührt wird, 2^0 durch alle $\varkappa$ Punkte, in denen ϱ und R sich begeg-
«nen, also die Flächen M, N sich berühren. Folglich ist

$$«k+\varkappa=g\ (m+n-2).$$

Es war aber $p\,(mn-g)-\varkappa$ die Zahl der freien Punkte, in denen
«die Curve R von der Fläche P geschnitten wird, mit andern Worten,
«die Zahl der freien Schnittpunkte der Flächen M, N, P; diese ist also

$$mnp+k-g\ (m+n+p-2).$$

«Da für eine Vollcurve $\varrho^a \times^b$ die Classe $k = ab\ (a+b-2)$
«ist, so ist Ihre Formel trotz des Fragezeichens richtig Im Allgemeinen
«muss ich noch bemerken, dass wenn die ϱ gewöhnliche Doppel-
«punkte hat, in der Zahl k jeder derselben mit dem Betrage 2 mit-
«gezählt werden muss; oder, wenn k die reine Classe darstellt, so
«muss man zu der vorliegenden Formel noch die doppelte Anzahl der
«Doppelpunkte der ϱ addiren. — Nebenbei gesagt: wenn Sie die
«Zahl der Punkte, in denen eine *Abwickelbare* von einer Geraden ge-
«schnitten wird, den *Grad* derselben nennen, so müssen Sie conse-
«quenter Weise unter *Classe* einer Raumcurve dasselbe verstehen
«wie ich, nämlich die Zahl ihrer Berührungsebenen, welche durch
«eine Gerade gehen. Die Zahl der Schmiegungsebenen hingegen,
«welche durch einen gegebenen Punkt gehen, ist im Allgemeinen ein
«hohes Ding, das wegen der Schwierigkeiten, denen seine Betrach-
«tung unterliegt, einen so vertraulichen Namen, wie *Classe*, nicht
«verdient; es implicirt ja schon die Abgeleiteten dritter Ordnung.

«*Ad 9.* Wenn ein Flächengebüsch n^{ten} Grades eine Grundcurve «R enthält, deren Grad g, die Classe k ist, und welche unter den gn «Schnittpunkten irgend einer f^n Θ nothwendige zählt, so beträgt die «Anzahl der im Freien liegenden nothwendigen Grundpunkte des «Gebüschs

$$n^3 + 3 - \binom{n+3}{3} - \left\{ 2g(n-1) + \Theta - k - 1 \right\},$$

«also für eine Vollcurve $a \times b^{ten}$ Grades

$$n^3 + 3 - \binom{n+3}{3} - \frac{1}{2} a b (4n - a - b - 4),$$

«wenn $n > a + b - 4$ ist; aber um $\binom{a+b-n-1}{3}$ mehr, wenn «$n < a + b$ ist.

«Ich erinnere übrigens daran, dass die Zahl Θ durch g, k, n «noch nicht bestimmt ist; ich habe früher Beispiele geliefert ver- «schiedener Arten von Raumcurven desselben Grades und derselben «Classe, welche sich durch die Zahl der nothwendigen Punkte unter- «schieden.

«(28. März) *Ad 11.* Dass ein ebenes Curvennetz n^{ten} Grades «nicht mehr als $n^2 - n + 1$ Grundpunkte haben kann, vermag ich «nicht einzusehen; obgleich ich leicht deren bilden kann, welche «$n^2 - \alpha n + \alpha^2$ Grundpunkte haben. — *Absatz I.* Stimme vollständig «bei. Ich verwundere mich nur, dass Sie nicht gleich die Sache etwas «allgemeiner gefasst haben. Sie konnten in ähnlicher Weise eine «Theilcurve Grades $n^2 - n\alpha + \alpha^2$ construiren von der Eigenschaft, «dass alle durchgelegten Flächen n^{ten} Grades bloss ein Gebüsch bilden, «und dass je zwei derselben sich in einer Vollcurve $(n - \alpha) \times \alpha^{ten}$ «Grades schneiden, und dass irgend drei keinen *freien* Schnittpunkt «haben. Bei der Zahl der nothwendigen Punkte Ihrer R^{n^2-n+1} können «Sie das Fragzeichen weglassen.

«*Absatz II.* Bei dem aus Pol p seiner Pampolare umschriebenen «Kegel K würde ich die Berührungsebene in p ganz weglassen; der «Theilkegel t^x hat den Grad $3n(n-2)$ und geht durch die Theil- «curve des $(3(n-1)^2 - 1)^{ten}$ Grades, in der die Pampolare von ihrer «ersten Polare aus p geschnitten wird. Was bezeichnen Sie mit der «Kernfläche P^x des $N(p^{2n-1})$? Wohl dasselbe, was Sie sonst mit «dem Q bezeichneten, den Ort der Knotenpunkte aller Pampolaren; «dann ist ja der Grad $x = 8(n-1)$! Ist diese gemeint, so ka$_{nn}$

«sie die Grundcurve des Büschels nicht zur Doppellinie haben, sondern «wenigstens zur dreifachen.

«Ich muss hier abbrechen, da der schwieriger werdende Rest «mich noch längere Zeit beschäftigen könnte, und andere dringende «Arbeiten mich abrufen. In der Meinung, dass Sie dieses Wenige viel- «leicht schon benutzen können, und um Sie nicht zu lange warten zu «lassen, sende ich Ihnen diese Zeilen schon jetzt.

«In der Hoffnung, Sie werden mich immer für Ihren treuen Freund «halten, grüsse ich Sie herzlich Ihr

«Bern, den 28. März, Abends spät. *L. Schläfli.*»

Steiner an Schläfli. 6. IV. 1855.

«*Treuer Freund!*

«Indem ich Ihnen für die Correctionen und die aufopfernden ge- «waltigen Anstrengungen herzlich danke, muss ich daneben bedauern, «dass Sie stellenweise meinem Gedächtniss zu viel zumutheten. Weiss «ich ja oft nicht, was ich vor 3 Tagen geschrieben habe — geschweige «denn vor 3 Monaten. Jener erste Brief ist die Quint-Essenz aus «einem confusen Brouillion von 9 Bogen; aber was darin ad 4., ad «11. Absatz I.. etc. steht, weiss ich nicht; desgleichen ad 10. «*Die «Formel mit Fragezeichen.*» Leider weiss ich auch nicht mehr genau «wie ich Ihren zweiten Satz bewiesen habe. Kurz ich bin weit «dümmer, als Sie wähnen. Daher geht die Redaction erbärmlich lang- «sam, nur des Vormittags und da noch matt — ohne Kraft, ohne Ge- «dächtniss und ohne Phantasie; am Abend fast ganz stumpf.

«Neue Fragen fallen mir im Augenblick nicht ein, nur folgendes «altes Spiel mit Büscheln.

«1. Bekanntlich schneidet der B (C^2) jede Gerade G in einem «Punkt-System (Involution). Ein guter Oekonom verfolgt nun alle «speziellen Fälle, die zahlreich sind. Hier nur der: Wenn die 4 «Grundpunkte in *einen* P zusammenfallen, wird dann aus B (C^2) noth- «wendig ein Strahl-System? oder wenn der B (C^2) durch zwei «spezielle Glieder die Doppelgerade $(A)^2$ und $(B)^2$ sind, bestimmt «wird, folgt dann nothwendig, dass jedes andere Glied C^2 aus einem «Paar Geraden $C + C_1$ besteht, die zu jenen (als den Asymptoten) «harmonisch sind?

«2. Ebenso schneidet nun B (C^3) jede G in einem Dreipunkt- «System, welches 4 Asymptotentenpunkte hat. Ist dasselbe durch zwei

Trippel von Punkten bestimmt? und welche Relation findet zwischen drei Trippeln statt (entsprechend der Involution in 1.)? — Die Spezialisirung der zwei Glieder, durch welche B (C^3) bestimmt wird, gewährt noch mehr Fälle, als vorhin (1.), und jeder fast giebt ein Sätzchen. Einst war dieser Gedanke dem *Schmützer* (Aronhold) willkommen und half ihm zu Etwas. Jene Glieder lässt man aus C^2 und aus einfachen, doppelten und dreifachen G bestehen. Für Sie das: Wenn die 9 Grundpunkte sich in Einen P vereinen, geht dann B (C^3) in ein Dreistrahlsystem um P über? mit wie viel Asymptoten (4?) und welcher metrischen Relation? so dass, wenn umgekehrt zwei Trippel durch P gehende Strahlen A, A_1, A_2 und B, B_1, B_2 als bestimmende Glieder aus $A+(A_1)^2$ und $B+(B_1)^2$ oder aus 3-fachen Geraden $(A)^3$ und $(B)^3$ bestehen? Ihr Mächtiger wird dies leicht entwurzeln, selbst für B (C^n).

3. Ist $n=\alpha\beta$ und wird der B (C^n) insbesondere durch zwei Glieder $(A\alpha)\beta$ und $(B\beta)\alpha$ bestimmt, so ist von deren $\alpha\beta$ Schnitten P jeder nur ein Doppelpunkt (?) jedes andern Gliedes C^n. Nun bilden jene 2 Glieder in jedem P ein unendlich kleines Gitter mit $\alpha\beta$ Schnitten p, und durch diese müssen die zwei Zweige jeder C^n gehen — davon berührt der eine die einfache $A\alpha$ α-punktig der andern (einfache) $B\beta$ β-punktig: aber nun weiss ich nicht, wie viel punktig sich die entsprechenden Zweige zweier Glieder C^n daselbst berühren!?.

Ist $n=2\alpha$ und man bestimmt den B (C^n) durch zwei Glieder $(A\alpha)^2$ und $(B\alpha)^2$, so ist jeder der α^2 Schnitte P ein Doppelpunkt von jedem Glied C^n; aber muss dabei jedes Glied nothwendig in $C\alpha + C_1\alpha$ zerfallen? und sind diese Paare so bestimmt, dass sie zu $A\alpha$ und $B\alpha$ harmonisch sind? oder waltet eine höhere Relation ob, so dass es ausser $A\alpha$ und $B\alpha$ noch mehr Asymptoten giebt?

Wie stehts, wenn $n=3\alpha$ und B (C^n) durch $(A\alpha)^3$ und $(B\alpha)^3$ bestimmt wird? etc.

Bei den Flächen kann man ähnlicherweise schulmeistern, aber ich drang noch weniger durch. Hier nur ein Fall. Wird der B(f^n) durch n Ebenen A und n Ebenen B bestimmt, die sämmtlich durch einen Punkt P gehen, so müssen wohl alle Glieder f^n Kegel sein; der Schnitt einer durch P gehenden Ebene E ist ein n-Strahl-System, in welches ein B (C^n) übergeht, wenn die n^2 Grundpunkte sich in P vereinen; daraus ist klar, wie das System durch zwei n tupel bestimmt ist. Machen Sie es, ich verstehe doch nichts davon, es ist mir wie im Traum.

«Es kam mir der Gedanke, statt einer Abhandlung, lieber eine «kleine selbstständige Schrift zu verfassen, darin vor den Flächen zu- «erst alle meine Witze über ebene Curven aufzutischen; dazu müsste «ich aber eben so schriftstellerisch vorwärts kommen und arbeiten «können, wie Sie. Wenn wir nur gemeinschaftlich arbeiten könnten, «so dass Sie immer auf der Stelle oder doch am selben Tag meiner «Unbehülflichkeit im Ausdruck Worte verliehen — dann würde es «schnell gehen. Freilich blieb die letztjährige Probe hinter meiner «Erwartung zurück. Wenn durch Friedensschluss die Zeiten günstiger «werden, so dürfte ein Verleger zu finden und ein Honorar zu er- «halten sein, durch welches Sie fast so knapp, wie von der Vorsichts- «kasse entschädigt würden. Zudem könnten Sie den Gegenstand ana- «lytisch ordnen, mit weitern Zuthaten versehen und darauf beim «*selben* oder einem andern Verleger herausgeben. Ein Buch hat «immer mehr Gewicht und macht mehr bekannt, als einzelne zer- «streute Abhandlungen.

«Ob ich auf Jahre fortbleiben kann, weiss ich nicht, da der «Urlaub, ohne den König, nur für ein Semester bewilligt werden kann; «im Herbst würde die Verlängerung hoffentlich gewährt werden, ob «aber übers Jahr weiter — wer weiss das! Zumal wenn indessen «keine Arbeit zu Stande käme. Desshalb bin ich auch in Verlegen- «heit, ob ich meine Wohnung aufgeben, oder unnütz jährlich 600 Fr. «bezahlen soll. Welche Curen ich machen werde, weiss ich nicht; «der Arzt wird im Attest von *Teplitz*, Gastei und Pfeffers sprechen. «Sollte ich Paris sehen und es günstig finden, d. h. *Liouville* etc. da «treffen, so müssen Sie nachkommen, das Honorar in spe muss die «Kosten decken.

«Da Sie mit Arbeiten überhäuft und nur glücklich sind, wenn «Sie recht überladen: so möchte ich bitten, mit einigen kurzen Wor- «ten das im Nachfolgenden verlangte Attest zu verfassen, was mir un- «möglich ist. Dasselbe kann deutsch oder französisch sein. Es kann «etwa gesagt werden: die mir von ihm bekannten Arbeiten in *Crelle's* «und *Liouville's* Journal zeugten von mathematischem Genie (ich habe «wenig davon gelesen), die englischen verstände ich leider nicht. — «Er kann uns später auch nützlich sein.

«*Monsieur!*

«Je prends la liberté de vous adresser cette lettre — «je viens de m'offrir comme candidat pour une des Exa-

«minerships in Mathematics for civil Appointments in In-
«dia. Cela me serait un grand honneur et je serais on
«ne peut plus obligé si vous voudriez bien me donner
«une attestation par rapport à mon caractère de géomètre
«et ma capacité pour remplir cet office.

«Je suis Monsieur

«votre très humble serviteur

2 Stone Build^gs Londres — *A. Cayley.*
28 mars 1855.

«Unermüdlicher Signore baldige Antwort.

«Herzlichen Gruss

«von Ihrem dankbaren

«Berlin, 6ten April 1855. — *J. Steiner.*

«NB. Die Dissertationen habe ich nicht vergessen, aber noch «nicht zusammengesucht, soll nächstens geschehen.»

Berliner Poststation 6. April. Bern erhalten den 9. April, Mittags[1]).

Schläfli an Steiner.

«*Lieber Freund!*

«(8. April.) Es thut mir leid, inzwischen keine Nachricht von «Ihnen erhalten zu haben. Sind Sie vielleicht mir etwas gram, weil «ich mit der Beantwortung Ihres Briefes vom 28. Januar so lange zu «thun habe? Ich kann Sie aber versichern, dass mir diese Dinge «immer wie eine schwere Last auf dem Herzen gelegen haben. Hier «erhalten Sie endlich den vollständigen Rest meiner Antworten.

«*Ad 4.* Sie können zu der geradlinigen Fläche nten Grades «(also auch nter Classe) noch bemerken, dass sie nothwendig eine «*Doppellinie* (welches Grades?) hat, die von jeder erzeugenden Geraden «in 1— 2 Punkten getroffen wird; Aehnliches gilt von ihrer doppelt «umschriebenen Abwickelbaren.

«*Ad 11.* Meine Versuche, Ihren Satz, «dass drei unter sich «unabhängige ebene Curven nten Grades nicht mehr als $n^3 - n + 1$ «Punkte gemein haben können,» zu beweisen, sind vergeblich ge- «wesen. Es würde mich sehr freuen, wenn Sie mir Ihren Beweis «mittheilten. Können Sie vielleicht auch drei verschiedene C^n durch «$n^3 - n$ gemeinschaftliche Punkte legen, welche nicht auf einer

[1]) Notiz von L. Schläfli.

«C^{n-1} liegen? — Sie sollten übrigens hier nicht zwei Fälle unter-«scheiden, da das Netz der Pampolaren, schon als sehr spezieller Fall «im ersten allgemeinen Falle enthalten ist.

«*Ad 11, I.* Wenn Sie Ihr Gebüsch nten Grades in der Weise «verallgemeinern, dass je zwei Flächen desselben sich in einer Voll-«curve $(n - \alpha) \times \alpha^{ten}$ Grades und überdiess in der festen Theil-«curve (Grundcurve) R vom Grade $n^2 - \alpha n + \alpha^2$ schneiden, so «werden die Flächen $(n - \alpha)^{ten}$ und α^{ten} Grades, welche jene Vollcurve «bestimmen, entsprechende Glieder zweier quasi perspektivischer Ge-«büsche sein. Für $n - \alpha > \alpha$ ist das niedrigere Gebüsch unver-«änderlich; das höhere hingegen kann natürlich auf mannigfaltige Arten «mittelst des niedern umgewandelt werden.

«Ist nun l der Grad irgend einer die R schneidenden Fläche, «so sind unter den $l(n^2 - n\alpha + \alpha^2)$ Schnittpunkte

$$(n - 1)(n^2 - n - 1) - \frac{1}{2}\alpha(n - \alpha)(3n - 4) - ?\binom{2n - \alpha - 1 - 1}{3} - ?\binom{n + \alpha - 1 - 0}{3}$$

«nothwendige. Die Fragezeichen vor den zwei Binomialcoefficienten sollen «bedeuten, dass dieselben wegzulassen sind, sobald ihre oberen Zahlen «negativ sind, d. h. wenn der Exponent des Binoms negativ ausfällt.

«Sie haben bei Ihrem Gebüsch von einer einzigen Gebüschfläche «gesprochen, die ihren Knotenpunkt auf der R^{n^2-n+1} in jenem «Grundpunkt g_0 des auxiliären Ebenengebüsches hat, und bemerken «dazu, dass der betreffende Knotenkegel von der Schmiegungsebene «der R längs ihrer Tangente berührt wird. Dasselbe gilt aber über-«haupt für jeden Punkt der R, weil das andere auxiliäre Gebüsch «$(n - 1)^{ten}$ Grades seinen $(n - 1)^3$ Grundpunkten auf der R freien «Lauf lässt. Ich will aber diese Sache sogleich allgemein für meine «$R^{n^2 - n\alpha + \alpha^2}$ aussprechen.

«Wenn ein Gebüsch von Flächen nten Grades eine Grundcurve «rten Grades hat, so kann man im Allgemeinen nur zeigen, dass seine «Knotencurve 6 $(n - 1)^2$ten Grades r $(3n - 4)$ Punkte mit jener «Grundcurve gemein hat. Aber bei meinem erwähnten speziellen «Gebüsch gehört die ganze $R^{n^2 - n\alpha + \alpha^2}$ der Knotencurve an; und «in jedem Punkte der R berührt die Schmiegungsebene derselben den «Knotenkegel der betreffenden Gebüschfläche längs der Tangente «der R.

«*Ad 11, II.* Wegen des von Ihnen betrachteten Netzes aller

»Pampolaren eines Flächenbüschels muss ich zum voraus einen allge-
»meinen Satz aussprechen.

»Wenn ein Netz algebraischer Flächen eine Grundcurve hat,
»mag diese nun eine Vollcurve oder Theilcurve sein, so ist die-
»selbe eine *dreifache Linie* der Knotenfläche des Netzes.«

»Ich habe diesen Satz streng bewiesen; die vielfache Linie ist
»im Allgemeinen sicher nicht höher. Ausser diesem kann ich von
»der Knotenfläche ($Q^{8(n-1)}$) Ihres Pampolarennetzes nichts Eigen-
»thümliches aussagen.

»Sie nehmen einen Punkt X der R als Pol der Pampolare an,
»und dann bekömmt diese in X einen Knotenkegel dritten Grades K.
»Nun, die Strahlen dieses K sind die Doppelpunktstangenten der hier
»geführten ebenen Berührungsschnitte aller Flächen des ursprüng-
»lichen Büschels. Fällt die eine dieser Doppelpunktstangenten mit der
»Tangente t der R zusammen, so wird die betreffende Büschelfläche
»von der Schmiegungsebene berührt.

»Rücken Sie jetzt den Pol A der Pampolare auf der t fort, so
»hat sie in X einen unveränderlichen Knotenkegel *zweiten* Grades,
»nämlich den Polarkegel der Tangente t (XA) in Bezug auf jenen K.

»Wenn der Pol der Pampolare an eine Ebene gebannt ist, so zählt
»die Grundcurve R als *doppelter* Bestandtheil der Knotencurve des Pam-
»polarengebüsches. Der freie Rest dieser Knotencurve ist also vom
»Grade $24\ (n-1)^2 - 2\ n^2$, geht aber *nicht* durch die $4\ (n-1)^3$
»Knotenpunkte π des Büschels. — Was Sie hingegen von den (freien)
»Grundpunkten dieses Pampolarengebüsches sagen, ist richtig.

»Sie lassen die *Pol*kernfläche P einer Fläche des urprünglichen
»Büschels diese in einer R_0 schneiden und betrachten die Ortsfläche
»dieser R_0; hier kann ich nicht folgen. Wenn ich auch den Kernpol
»P in die Grundcurve R rücke, so giebt es wenigstens *keine* Büschel-
»fläche, für die dann P mit dem Knotenpunkt X seiner auf jene be-
»zogenen ersten Polare zusammenfiele; so lange aber P und X geschieden
»sind, ist es mir unmöglich, etwas auszusagen. Daher ist mir auch die
»Bedeutung der Rückkehrtangenten t_0 unverständlich.

»Es ist ein Flächenbüschel n^{ten} Grades gegeben. Bei jeder Fläche
»nehmen Sie die osculirend umschriebene Abwickelbare und fragen
»nun, wie oft diese nun einen gegebenen Punkt passire. Die Antwort ist

$$4\ n^3 - 19\ n^2 + 25\ n - 8$$

»mal, also für $n = 3$ z. B. 4 mal.

«Wenn durch die Grundcurve R des vorigen Büschels eine feste «f^m geht, so wird sie auf der R von *jeder* Hälfte des Büschels in $(m—n)\,n^2$ «Punkten berührt. Die Anzahl der einzelnen Büschelflächen, welche «sie überdiess noch ausserhalb berühren, ist

$$(m+2)(m-2)^2+2(m-4)(n-1)(m-n-1)$$
$$=(m-4)(m^2+2mn-2n^2)+6m.$$

«Die Formel gilt aber nur für $m > n$; für $m = n$ wird sie un- «sinnig, was Sie aber nicht als Argument gegen ihre Richtigkeit an- «sehen dürfen. Setzen Sie z. B. $n = 1$, $m = 3$, so bekommen Sie «die richtige Zahl 5.

«*Ad 12.* Sie wissen es gewiss ganz gut, dass die Grundcurve «eines Flächenbüschels in zwei Theilcurven oder eine Theilcurve und «eine Vollcurve zerfallen kann, und dass es in diesem Falle eine reine «Unmöglichkeit ist, dass ein Glied des Büschels zerfalle.

«Wenn ich auch in einem Flächenbüschel zwei zerfallene Glieder «annehme, so ist doch das Zerfallen eines dritten Gliedes eine so «furchtbare Grausamkeit, dass der Schreck meinen analytischen Ver- «stand lähmt. Sie sagen in Ihrem Briefe kein Wort über das leitende «Princip, nach dem Sie diese gewiss höchst speciellen Büschel con- «struiren.

«Wenn in einem Gebüsch eine Fläche zerfällt, so versteht es sich «ja von selbst, dass die Schnittcurve ihrer Bestandtheile der Knoten- «curve des Gebüschs angehört.

«Die Frage nach der höchsten Grundcurve eines $G(f^n)$ ist mir «zu schwer.

«Wenn beim $G(f^2)$ drei Glieder Ebenenpaare sind, so vermag ich «die Nothwendigkeit eines vierten solchen durchaus nicht einzusehen.

«Dass ein $N(f^n)$ *nothwendig* zerfallene Glieder enthalten sollte, «ist für $n > 2$ entschieden zu verneinen. Ebenso wenig kann von «Doppellinien die Rede sein.

«Der Satz über die drei in einem Netz enthaltenen Büschel, deren «keine zwei ein Glied gemein haben, ist hübsch und analytisch leicht «zu verificiren.

«Ich möchte Sie ersuchen, künftig bei Flächennetzen die Pol- «kernfläche P und die Knotenkernfläche (oder: Knotenfläche) Q deutlich «zu unterscheiden. Jene wäre der Ort des Punkts, in welchem die «Polarebenen eines Knotens Q in Bezug auf sämmtliche Netzflächen sich

«schneiden. Ueberdiess wäre dann noch eine dritte Fläche zu be-
«trachten, die ich *reciproke Fläche* genannt habe, nämlich der Ort des
«Punkts, welcher die 4 arbiträren Constanten, deren drei Verhältnisse
«die Netzfläche bestimmen, zu Coordinaten hat. Beim Pampolarennetz
«ist diese reciproke Fläche der Ort derjenigen Pole A, deren Pampo-
«laren einen Knotenpunkt X (oder Q) haben. Beim Netze der ersten
«Polaren einer gegebenen Basis fällt sie hingegen mit der Polkern-
«fläche P zusammen.

«Darf ich nun hoffen, Sie werden mit diesen freilich sparsamen
«Resultaten einer mühsamen Arbeit zufrieden sein und mich bald mit
«einer Antwort erfreuen? Oder soll morgen die quälende Ungewiss-
«heit mein Stück Krautkuchen vergällen? — Mit freundschaftlichem
«Gruss Ihr treuer und dankbarer Schüler

«Bern, den 8. April 1855. *L. Schläfli.*»

«Abends 11 Uhr geschlossen.»

Schläfli an Steiner.

«*Lieber Freund!*

«(11. April.) Ihren werthen Brief vom 6ten habe am 9ten Mit-
«tags erhalten, nachdem ich am Morgen meinen auf die Post gegeben
«hatte. Ich beeile mich auf die darin enthaltenen Fragen zu ant-
«worten.

«1. Wenn die 4 Grundpunkte eines Büschels von Kegelschnitten
«sich in einen Punkt vereinigen, so sind nur zwei Fälle möglich.
«A. Der Büschel ist bestimmt durch einen Kegelschnitt und eine
«doppelt gezählte Tangente desselben; alle Curven haben also hier
«eine vierpunktige Berührung und schneiden eine freie Gerade wie
«gewöhnlich.

«B. Der Büschel ist bestimmt durch zwei Doppelgeraden, besteht
«also aus lauter Geradenpaaren, die ein involutorisches Strahlensystem
«bilden, dessen Asymptoten jene Doppelgeraden sind.

«2. Für das Punktdreiersystem einer Geraden ist es ganz gleich-
«gültig, ob es von einem schneidenden Curvenbüschel dritten Grades,
«oder von dessen Ausartung in ein System von je drei Strahlen, die
«alle von den in einen vereinigten 9 Grundpunkten ausgehen, hervor-
«gebracht werde. Indess kann die Vereinigung auch geschehen, in-
«dem man den Büschel bestimmt durch eine freie Curve und eine
«dreifach gezählte Wendungstangente derselben; er besteht dann aus

«Curven, die sich alle hier 9-punktig berühren. Das Punktsystem auf «der freien Transversale ist natürlich durch zwei beliebig zu setzende «Dreier vollständig bestimmt. Die metrischen Relationen zwischen den «Punkten dreier Dreier sind zwar algebraisch sehr einfach; aber ich «weiss noch keinen passenden geometrischen Ausdruck dafür. Da- «gegen wird Sie interessiren, was ich vor der Hand über die gegen- «seitige Lage derjenigen 4 Punktdreier AAA', BBB', CCC', DDD', in «deren jedem je zwei Punkte zusammenfallen, angeben kann. Es «giebt zwei (nicht zum System gehörende) Punkte M, M', für welche «alle 4 Paare AB, A'B', CD, C'D', harmonisch sind, ebenso zwei Punkte «N, N' für die Paare AC, A'C' BD, B'D' und endlich zwei Asymp- «toten-Punkte P, P' für die Paare AD, A'D', BC, B'C'; und von den «Punktpaaren MM', NN', PP' ist jedes in Beziehung auf jedes har- «monisch. Hieraus ist sofort klar, dass, wenn alle 4 Berührungs- «punkte des Büschels A, B, C, D reell sind, dann von den drei letzten «Paaren zwei reell und eines conjugirt-imaginär ist. Wird ein Punkt «aller Dreier dadurch festgebannt, dass man die Transversale durch «einen Grundpunkt sendet, so bleiben natürlich ausserdem nur invo- «lutorische Punktpaare übrig. Ein dem dritten Grad eigenthümlicher «spezieller Zustand des Punktsystems tritt nur dann ein, wenn die «Transversale an einer oder an zwei Stellen osculirt wird; im letzten «Falle ist aus jedem Dreier immer nur ein Punkt reell, und die Lage «jedes der zwei übrigen gegen den vorigen und jene zwei dreifachen «Punkte ist durch ein perspectivisches Doppelverhältniss bestimmt, «welches der einen oder andern imaginären Cubikwurzel aus 1 «gleich ist.

«3. Wenn $n = \alpha\beta$ und α, β keinen gemeinschaftlichen Faktor «haben, so sei ein Büschel bestimmt durch eine β fache C^α und eine «α fache C^β. Wenn $\alpha < \beta$, so ist jeder Grundpunkt ein spezieller «α facher Punkt der freien Büschelcurve, insofern diese hier von «einer frei durchgehenden Geraden in α vereinigten Punkten ge- «schnitten wird; aber mit der einfachen C^β hat sie hier mehr, näm- «lich β vereinigte Punkte gemein; und irgend zwei Büschelcurven «haben natürlich hier $\alpha\beta$ Punkte gemein. Die α Zweige einer und «derselben Büschelcurve sehen so aus, als hätten sie hier alle die «Tangente der C^β gemein; aber die Krümmung ist eine ungewöhn- «liche und hängt von der Natur des Bruchs $\frac{\beta}{\alpha}$ ab; der *Taylor*'sche «Satz ist en défaut. — Wenn hingegen α, β den grössten gemein-

schaftlichen Faktor ε haben, so zerfällt jede Büschelcurve in ε verschiedene Curven $\frac{\alpha\beta}{\varepsilon}^{\text{ten}}$ Grades.

Wenn Sie den Büschel durch zwei Paare vereinigter Curven bestimmen, so zerfällt Ihnen jedes andere Glied desselben nothwendig in zwei verschiedene Curven $\frac{n}{2}^{\text{ten}}$ Grades; und wenn Sie in einem Grundpunkte die Tangenten ziehen, so haben Sie ein involutorisches Strahlensystem. — Wenn n einen Factor α hat, und Sie setzen zwei Curven p, q vom $\frac{n}{\alpha}^{\text{ten}}$ Grade, nehmen jede α fach und bestimmen damit einen Büschel, so zerfällt jedes andere Glied in α verschiedene Curven $\frac{n}{\alpha}^{\text{ten}}$ Grades; die Tangenten in einem Grundpunkt bilden ein höchst spezielles Strahlensystem α^{ten} Grades. Für ein ungerades α ist immer eine der Curven, aus denen das Glied besteht, reell, alle übrigen sind imaginär; für ein gerades α sind zwei Curven reell, die $\alpha-2$ übrigen imaginär. In einem Grundpunkt bilden die Tangenten der zwei reellen Punkte ein Strahlensystem zweiten Grades (eine Involution). — Ich möchte Ihnen aber abrathen, solche Dinge zu publiziren, denn es dreht sich hier alles nur um die elementarsten Begriffe von der Gleichung $x^{\alpha} - 1 = 0$ herum. Zudem müssten Sie die Sache etwas allgemeiner angreifen, z. B. aus dem Büschel (p, q) irgend α verschiedene Curven herausnehmen und daraus eine Curve A vom n^{ten} Grade zusammensetzen, ferner ebenso eine Curve B, und nun einen Büschel (A, B) bilden; jedes Glied dieses wird dann wieder in α verschiedene Curven $\frac{n}{\alpha}^{\text{ten}}$ Grades zerfallen; aber $2(\alpha-1)$ Male wird es begegnen, dass zwei von den α Componenten eines Gliedes sich vereinigen; auch kann es jetzt geschehen, dass alle α Componenten zugleich reell sind. Die Tangenten in einem Grundpunkt bilden ein Strahlensystem α^{ten} Grades; und das Punktsystem auf einer Transversalen ist zwar vom n^{ten} Grade, aber so spezialisirt, dass es in α Systeme $\frac{n}{\alpha}^{\text{ten}}$ Grades zerfällt.

Wenn Sie durch einen und denselben Punkt O zuerst n Ebenen legen, deren Gesammtheit A heissen soll, dann wieder so eine Gesammtheit B, so ist der Büschel (A, B) ein ungeheurer spezialisirter Kegelbüschel. Hier ist weiter nichts zu machen; denn die Sache

«spielt eigentlich nicht im Raume, sondern ist nur so, wie wenn Sie «auf einer beliebigen Transversalebene einen Curvenbüschel durch «zwei n seite bestimmen.

«Wenn ich es wagen darf, zu Ihren Entschliessungen mit meinem «Rath etwas beizutragen, so möchte ich Sie wirklich bewegen, gegen «die Akademie Ihre Pflicht zu erfüllen. Ich hätte es in Ihrem In- «teresse sehr gerne gesehen, wenn Sie die projectirte Abhandlung «bereits im Dezember vorgelegt hätten; und es thut mir leid, wenn «die Unvollständigkeit meiner Verifikationen an dem Aufschub Schuld «gewesen ist. Wenn Sie nun einen nahen Termin vor sich haben, «so thun Sie das Mögliche, um die Abhandlung bis dahin vorzulegen, «drängen Sie darin alles auf die einfachen und schönen Resultate zu- «sammen, die uns nun seit langem schon gut bekannt sind, und «lassen complicirtere, für Laien unfassliche Sachen bei Seite. In der «Einleitung lassen Sie den Begriff der algebraischen Fläche auf die «natürlichste Weise von der Welt sich selbst entwickeln. Zwei Auf- «fassungen: als Doppelschaar von Punkten, und als solche von Ebenen. «In jenem Sinn ist die Fläche frei, wenn jeder sehr kleine Theil als «Ebene (verlängert: Berührungsebene) annähernd sich darstellt; in «diesem, wenn alle unendlich wenig von einander abweichenden «Ebenen annähernd durch einen einzigen Punkt (Berührungspunkt) «gehen, oder vervollständigt als Ebenengebüsch gefasst werden dürfen. «Dann wird gezeigt, wie über dem zweiten Grade beide Freiheits- «begriffe sich nothwendig widersprechen.

«I. *Gradesauffassung.* Die Berührungsebene schneidet die Fläche «in einer C^n mit Doppelpunkt; die zwei Tangenten desselben sind «entweder reell oder conjugirt-imaginär. Daher theilt sich die Fläche «in zwei Regionen: eine hyperboloidische (Krümmungsmaass negativ) «und eine ellipsoidische (Krümmungsmaass positiv), geschieden durch «die $R^{4n(n-2)}$, über deren Construction mittelst der Kernfläche später. «Längs der R *cylindrische* Natur; Berührungsschnitt mit Rückkehrpunkt «(als natürlicher Uebergang zwischen beiden Arten von Doppelpunkt); «also *osculirende Abwickelbare;* erster Widerspruch gegen den Klassen- «freiheitsbegriff, da die Osculation in der Drehbarkeit der Ebene einen «Halt verursacht. — Die Berührungsebene hat doppelte Beweglichkeit, «ein zweiter Doppelpunkt ihres Schnitts ist nur eine Bedingung; also «eine Schaar Doppelberührungsebenen: *doppelt umschriebene Abwickel- «bare* und darunter eine bestimmte Zahl dreifach berührender Ebenen;

»zweiter Widerspruch; denn successive Ebenen können sich in mehr »als einem Punkte schneiden. Die Berührungscurve S der doppelt »umschriebenen Abwickelbaren berührt die R in einer gewissen An»zahl Punkte π und schneidet sie in noch andern Punkten ϱ. Der »Berührungsebeneschnitt in π hat einen Selbstberührungspunkt, dessen »Tangente diejenige der R. Die Berührungsebene in ϱ schneidet hier »mit Rückkehrpunkt und anderswo noch mit Doppelpunkt. Hiemit »sind alle singulären Zustände, in welche die Berührungsebene einer »nach Grad freien Fläche kommen kann, erschöpft.

II. *Klassenauffassung.* Rückkehrlinie; Doppellinie; triedrische »Knoten; Stellen, wo die Rückkehrlinie und Doppellinie so zusammen»treffen, dass die zwei Berührungsebenen der letztern sich mit der»jenigen der erstern vereinigen; Knoten, wo die Rückkehrlinie frei »von einem Lappen der Fläche geschnitten wird. — Jetzt über ein»fachen Zwang bei Gradesfreiheit; gewöhnlicher oder gemeiner Knoten»punkt; doppelter Zwang: Kantenknotenpunkt; vierfacher Zwang: »Planknotenpunkt. Dann für Klassenfreiheit: gemeine Streifebene; »Strahlstreifebene (Zweipunktstreifebene, Osculationsstreifebene); Ein»punktstreifebene. — Nur erste Polaren (bloss für Gradesauffassung); »ihr Verhalten zu Knotenpunkten; Knotenfläche derselben (Kernfläche »Q); entsprechende Polfläche (Polkernfläche P). — Begriff des Büschels, »Gebüschs, Netzes; nothwendige Punkte. — Pampolaren. Jetzt in »specie die Fläche dritten Grades. Voran jene Berührungscurve S, »dessen Grad schon zum Voraus für f^n bestimmt ist, muss in lauter »Gerade zerfallen, weil eine C^n die zwei Doppelpunkte hat, nothwen»dig in eine Gerade und einen Kegelschnitt zerfällt. Darauf mannig»faltige Constructionen der f^3 gebaut, welche das Vorhandensein der »Geraden schon voraussetzen. Für das übrige reiche Material weiss »ich selbst nicht Rath. Nur thäte es mir leid, wenn Sie die mühsam »errungenen 5 Gattungen der freien f^3 wegliessen: 1. 27 Strahlen, »45 Ebenen reell; 2. 15 Strahlen, 15 Ebenen reell (gegründet auf »ein imaginäres Gitter, wo je zwei entsprechende [sich nicht schnei»dende] Strahlen conjugirt sind; 3. 7 Strahlen, 5 Ebenen reell »(nämlich 1 Strahl, durch den 3 reelle Dreiseite und 2 imaginäre, »deren Ebenen reell sind, gehen); 4. 3 Strahlen, 13 Ebenen reell »(ein einziges reelles Dreiseit, und durch jede Seite noch 4 reelle »Ebenen); 5. 3 reelle Strahlen und 7 reelle Ebenen (ein reelles Drei»seit, und durch jede Seite nur noch zwei reelle Ebenen). — Machen »Sie von meinen Sachen freien Gebrauch und denken Sie mehr an

«auch eine der beiden Kerncurven des Netzes, welche die 13 p zu dp «hat. — Für n beliebig verfährt man ebenso; die Geraden qr=C und «tu=B bilden mit C^n und B^n Curven C^{n+1} und B^{n+1}, welche die A^n «in denselben $(n^2-n+1)\,p+q+r+t+u=n^2-n+5$ Punkten schnei- «den; jede hat mit A^n noch $n(n+1)-(n^2-n+5)=2n-5$ Schnitte, «was für $n>4$ weniger als die Zahl der nothwendigen $\frac{1}{2}(n-1)(n-2)$ «ist, nämlich um $\frac{1}{2}(n-3)(n-4)$ weniger, also müssen umsomehr «C^{n+1} und B^{n+1} die $2n-5$ Schnitte als *nothwendige* gemein haben, und «zwar sind sie Schnitte der Geraden C und B mit A^n. — Jetzt disku- «tiren Sie und ergänzen was oberflächlich ist. Danach kann $G(C^n)$ «nicht mehr als n^2-n+1 Grundpunkte haben.

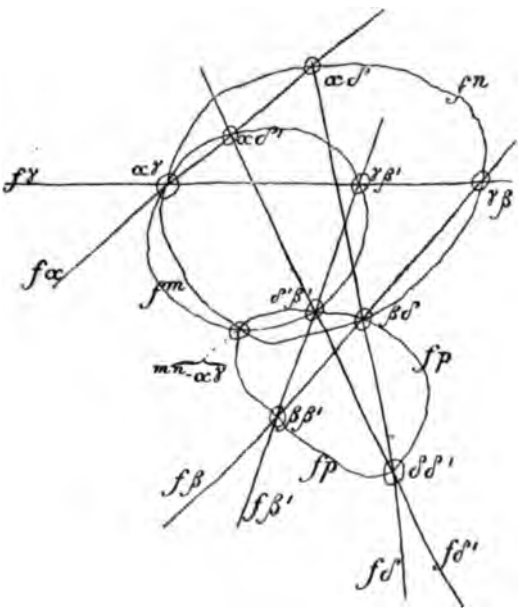
«Daraus folgt nun auch (mittels ebener Schnitte), dass wenn ein «$N(f^n)$ eine partielle Grundc. R^{n^2-n+1} hat, dann jedes Glied A^n von «jedem andern noch in einer ebenen Curve C^{n-1} geschnitten wird, «deren Ebene stets durch eine in A^n liegende Gerade a geht. Die «Grundcurve kann auch nicht höher sein.

«2. Wenn $\alpha+\beta=\gamma+\delta$, und $\alpha\geqq\gamma\geqq\delta\geqq\beta$ und man bestimmt durch «die Glieder $f^\alpha+f^\beta$ und $f^\gamma+f^\delta$ ein $B(f^n)$, so dass dessen Grundc. «$R^{n^2}=R^{\alpha\gamma}+R^{\alpha\gamma}+R^{\beta\gamma}+R^{\beta\delta}$, so ist für ein freies Glied f^n des Büschels «die niedrigste Curve $R^{\beta\delta}$ (so wie auch $R^{\beta\gamma}$), im Allgemeinen, wohl «eine einzige ihrer Art, d. h. f^n enthält keine andere ihrer Art, und «sie ist wohl auch überhaupt die niedrigste Vollcurve auf f^n; dagegen «finden von den höheren Curven $R^{\alpha\gamma}$ und $R^{\alpha\beta}$ Schaaren statt. Wann «findet nur eine einzige $R^{\beta\delta}$ statt? und wann eine bestimmte Anzahl? «wie z. B. 27, wenn $n=3$ und $\beta=\delta=1$ ist.

«Legt man durch die gegebene Vollc. $(f^\alpha f^\gamma)=R^{\alpha\gamma}$ eine beliebige «f^n, so schneidet sie f^α und f^γ noch in neuen Curven $R^{\alpha(m-\gamma)=\alpha\delta}$ «und $R^{\gamma\beta}$, durch welche neue (mehr als bestimmte) Flächen f^δ «und f^β gehen und deren Schnitt $(f^\delta f^\beta)=R^{\beta\gamma}$ *nothwendig* auf der «f^n liegt. Sei ferner $m=\alpha+\beta_1=\gamma+\delta_1$ und $\gamma\geqq\delta_1\geqq\beta_1$, und man legt «durch dieselbe $R^{\alpha\gamma}$ eine beliebige f^m, so schneidet sie f^α und f^γ eben «so in neuen Curven $R^{\alpha\delta_1}$ und $R^{\gamma\beta_1}$, durch welche neue Flächen f^{δ_1} «und f^{β_1} bestimmt sind, deren Schnitt $(f^{\delta_1} f^{\beta_1})=R^{\beta_1\delta_1}$ nothwendig in «f^m fällt; und f^n und f^m schneiden sich noch in einer neuen Curve «$R^{mn-\alpha\gamma}$, *welche mit* $R^{\beta\delta}$ *und* $R^{\beta_1\delta_1}$ *zusammen in einer Fläche* f^p «$(p=m+n-\alpha-\gamma=\beta+\delta_1=\beta_1+\delta)$ *liegt*. Aber noch mehr: *auf diese* «*Fläche* f^p *fällt auch der Schnitt* $(f^\beta f^{\beta_1})=R^{\beta\beta_1}$, *sowie der Schnitt*

•$(f^{\delta}\ f^{\delta_1}) = R^{\delta\delta_1}$. [Beweis: die drei Flächen $f^n + f^{\delta}$, $f^m + f^{\delta_1}$, $f^p + f^{\alpha}$, •sind von gleichem Grad und haben $R^{\alpha\gamma} + R^{\alpha\delta_1} + R^{\beta_1\delta_1} + R^{mn-\alpha\gamma} + R^{\alpha\delta}$ •$+ B^{\beta\delta}$ gemein, und daher müssen sie auch noch $R^{\delta\delta_1}$ gemein haben, •d. h. diese muss auf f^p liegen.] Ferner. Während $R^{\alpha\gamma}$, f^{α} sowie f^m, •f^n fest bleiben, kann sich f^{α} unendlichfach ändern, und dann ändern •sich auch f^{δ} und f^{δ_1}; aber diese gehen stets durch die festen Curven •$R^{\beta\delta}$ und $R^{\beta_1\delta_1}$ und ihr Schnitt $R^{\delta\delta_1}$ bewegt sich auf der festen Fläche •f^p, so dass also f^p eine vielfache Schaar Curven $R^{\delta\delta_1}$ enthält, oder •durch zwei quasi projektivische Gebüsche G (f^{δ}) und G (f^{δ_1}) um die •festen partiellen Grundcurven $R^{\beta\delta}$ und $R^{\beta_1\delta_1}$ erzeugt wird. — Was folgt •noch weiter daraus? Wenn eine blinde Sau eine Eichel findet, so •weiss sie dieselbe zu fressen — ich nicht recht. Machen Sie weitere •Verse daraus, wenn's geht. (Für m=n wird die Sache interessant, •f^p wird wie ein einfaches Hyperboloid, etc.)

•Zur Anschauung, wenn Sie solche nöthig haben.



•3. Wenn in n Ebenen in jeder eine Curve n^{ten} Grads gegeben, •und wenn je zwei Curven auf der Kante ihrer Ebenen sich in n •Punkten schneiden, *so sind die n Curven zusammen die Grundcurve* •R^{n^2} *eines Büschels B* (f^n). Versteht sich dieser Satz analytisch von •selbst? Synthetisch habe ich ihn bewiesen. Umgekehrt ist klar, dass

«durch n Ebenen und durch eine f^n ein B (f^n) bestimmt und R^{n^2}= «nC^n ist.

«Lässt man eine C^n weg, so bestimmen die n—1 übrigen ein «G (f^n) (oder N (f^n)?), von dessen Gliedern sich je zwei in noch einer «C^n schneiden.

«4. Aus alter Zeit. Spezielle Flächen f^n, die projectivisch er- «zeugt werden. Werden B (f^α) und B (f^β) projectivisch bezogen, so «erzeugen sie eine $f^{\alpha+\beta=n}$, welche durch die Grundcurven R^{α^2} und «R^{β^2} geht, eine einfache S ($R^{\alpha\beta}$) und, wofern $\alpha>\beta$, eine SS (R^{α^2}) [oder «nur S (R^{α^2})?], aber im Allgemeinen nur die einzige R^{β^2} enthält. Was «spielt weiter? — Wenn $\alpha=\beta=\frac{1}{2}n$, so sind dabei drei Nüancen zu «unterscheiden, nämlich

I. «die B (f^α) und B ($f^{\beta=\alpha}$) haben kein gemeinschaftliches Glied «sind in *allgemein schiefer Lage;* oder

II. «sie haben ein gemeinschaftliches Glied $f^\alpha{}_2$, welchem be- «ziehlich zwei andere $f_1{}^\alpha$ und $f_1{}^\beta$ entsprechen, sind noch in «*beschränkter schiefer Lage;* oder

III. «sie haben ein gemeinschaftliches Glied $f_2{}^\alpha$, welches *sich selbst* «*entspricht* und sind in *perspectivischer Lage.*

«Bei (I.) ist f^n wie das Hyperboloid beschaffen, sie enthält 2 «Curvenschaaren α^2 Grads, S (R^{α^2}, R^{β^2}) und S ($R^{\alpha\beta}$), in welche eine «Schaar-Schaar von Flächen f^α und f^β wechselweise einhacken, oder «es finden zwei Schaaren von Büscheln statt, S [B (f^α), B (f^β)] und «S [B ($f^\alpha f^\beta$)], von denen je zwei aus *gleicher* Schaar allgemein «projectivisch sind; je zwei aus verschiedenen Schaaren dagegen wohl «ein gemeinschaftliches Glied haben, aber nicht projectivisch bezogen «sind?

«Bei (II.) wird f^n von den Gliedern $f_1{}^\alpha$ und $f_1{}^\beta$ (bei dem $f_2{}^\alpha$ ent- «sprechen) beziehlich in den Grundcurven R^{α^2} und R^{β^2} der gegebenen «Büschel berührt; die zwei Curvenschaaren S (R^{α^2}, R^{β^2}) und S ($R^{\alpha\beta}$) «fliessen in einander, in jeder wird f^n von einem Gliede $f_1{}^\alpha$ (oder «$f_1{}^\beta$) berührt, so dass f^n für diese Schaar S ($f_1{}^\alpha$, $f_1{}^\beta$) die *Umschrei-* «*bungsfläche* ist; (aber wie kann man diese Schaar für sich be- «stimmen?).

«Bei (III.) zerfällt die f^n in $f_2{}^\alpha$ und in einen *perspectivischen* «*Durchschnitt* $= f^{\frac{1}{2}n}$, in welchem die S ($R^{\alpha\beta}$) liegen, und deren ge- «meinsames Glied aller Büschel B ($f^\alpha f^\beta$) ist. — Sonst noch was?

«Mit der kurzen Abfertigung der Flächenbüschel Ad 12 bin ich

«nicht so sehr zufrieden, denn gerade darüber hoffte ich viel von «Ihrem Witz, weil ich im Moment wähnte, Sie könnten auch das «Unmögliche möglich machen; nun soll ich glauben, es sei nicht so. «Sie verlangen mein leitendes Prinzip zu wissen: Windhundsnase, «unmittelbare Anschauung, Formenlehre. Es sollte gezeigt werden, «dass die angegebenen Fälle (die ich als möglich anschaute) in der «That möglich sind, wenn die Grade der Theilflächen, so wie die «Grade der Theile, in welche ihre Schnittcurven zerfallen, von ge- «wisser Grösse sind. Z. B. wird verlangt, es soll der durch $f^\alpha + f^\beta$ «und $f^\gamma + f^\delta$ besimmte $B(f^n)$ noch ein drittes Glied $f^\varepsilon + f^\varphi$ ent- «halten (wo $\alpha + \beta = \gamma + \delta = \varepsilon + \varphi = n$), ohne dass die Voll- «curven $R^{\alpha\gamma}$, $R^{\alpha\delta}$, $R^{\beta\gamma}$, $R^{\beta\delta}$ (aus denen die R^{n^2} besteht) selbst in «weitere Theile zerfallen, so ist der Fall nur möglich, wenn $\alpha = \beta = \gamma = \delta = \varepsilon = \varphi$ ist. Wird dagegen gestattet (oder verlangt), dass jede «der genannten vier Vollcurven in zwei Theile zerfalle, etwa in «$R^{\alpha\gamma-u} + R^u$, $R^{\alpha\delta-x} + R^x$, $R^{\alpha\gamma-y} + R^y$, $R^{\alpha\delta-z} + R^z$, ohne dass «die Flächen f^α, f^β, f^δ, f^γ selbst auch zerfallen, so ist die Frage, «ob das dritte Glied $f^\varepsilon + f^\varphi$ auch nur dann möglich sei, wenn $\alpha = \gamma = \varepsilon$ «und $u = x = y = z$ und dazu noch $x = \frac{1}{2}\alpha^2$? Für $n = 4$ sind z. B. «leicht 3 Paar Flächen zweiten Grads $f^\alpha + f^\beta$, $f^\gamma + f^\delta$, $f^\varepsilon + f^\varphi$ «($\alpha = \gamma = \varepsilon = 2$) anzuschauen, die sich in 8 Kegelschnitten C^2 schneiden, «welche die Grundcurve R^{16} des $B(f^4)$ bilden. Erlaubt man, dass «jede der vier Vollcurven der Glieder $f^\alpha + f^\beta$ und $f^\gamma + f^\delta$ in drei «Theile zerfallen darf, so schien mir, es müssen noch zwei der glei- «chen Glieder möglich sein $f^\varepsilon + f^\varphi$ und $f^\eta + f^\lambda$, und es ist die «Frage, wie sich dabei die Grade (α, γ, . . . λ) der Theilflächen und «die Grade der 12 Curven (aus denen die genannten 4 oder die R^{n^2} «bestehen) zu einander verhalten. U. s. w. — Ein tappen. Es ist wie «die Entdeckung von besondern Polyedern, regelmässigen und halb- «regelmässigen.

«Dass, wenn $n = \mu\alpha$, dann ein $B(f^n)$ mit $\mu + 1$ Gliedern «von der Form $f^{(\mu-1)\alpha} + f^\alpha$ möglich ist, dessen R^{n^2} aus einer R^{α^2} «und $\mu + 1$ Curven $R^{(\mu-1)\alpha^3}$ besteht, ist von mir angeschaut und «wird von Signore nicht bestritten — sondern bewiesen werden. «Durch μ Glieder ist das letzte nothwendig.

«Mit tiefstem Bedauern Ihnen das schöne Stück Krautkuchen «hiedurch zu vergällen — grüsst Sie

«Ihr dankbarer schrecklich aufgeblähter

«15. April 55, Abends. *J. Steiner.*

«NB. Setzen Sie fortan auf meine Adresse «Kronenstrasse 55», «dann erhalte ich die Briefe schneller, auf der Post schreibt man es «immer erst darauf, weil die Briefträger ihre Tour stets wechseln.

«(16ten April.) Das Trödeln hilft; heut Morgen 8 Uhr erhielt «ich Ihren Brief, wofür meinen besten Dank.

«In diesem Jahr komme ich in der Akademie nicht an die «Ramme, weder im Plenum noch in der Klasse; indessen wäre das «kein Hinderniss, wenn die Abhandlung fertig wäre, — davon bin «ich aber weiter entfernt, als vor einem Jahr. Die Streifebenen (wo- «rauf Sie *mit Recht* stolz sind) und Knotenpunkte sind *sehr schön* ins «Reine geschrieben — aber falsch, — und nun soll es geändert wer- «den, was für mich besonders schwer ist, von je her.

«Vor Juni werde ich kaum von hier abreisen, wo soll ich hin, «da Sie wieder an der verfluchten Vorsichtskasse zu fressen haben «um $\frac{1}{3}$ Löhnung? nach Paris? ist auch nicht viel zu machen. — Im «October ist *Liouville* noch in Toul, man müsste ihn da besuchen; «die Curse beginnen glaube erst Ende Octoder oder Anfang November.

«Nicht wahr wenn f^3 nur zwei Knotenpunkte p und q hat, so «berühren sich die Knotenkegel p^2 und q^2 schon längs der Geraden «pq und für die längs diese berührende Streifebene reducirt sich der «Schnitt auf die dreifache pq, oder diese zählt für 3 *Cayley*'sche G. Os- «culirt die Streifebene dabei die f^3?»

Schläfli an Steiner.

«*Mein lieber Freund!*

«Ihren werthen Brief vom 10. April habe am 14ten erhalten und «freue mich, daraus Ihr Wohlsein zu vernehmen. Indem ich sogleich «anfange, Ihre Fragen zu beantworten, möchte ich zuerst einige Namen «und Definitionen Ihrem Urtheil vorlegen. Eine ebene Curve hat einen «*Selbstberührungspunkt* (eine *Autapse*), wenn zwei Zweige derselben «sich auf gewöhnliche Weise berühren; er erniedrigt die Classe um «4 und verschlingt 12 Wendepunkte. Eine Fläche hat einen *Horn-* «*punkt*, wenn jede frei durchgehende Ebene die Fläche mit *Doppel-* «*punkt* schneidet, und alle mit *Rückkehrpunkt* schneidenden Ebenen «einen freien Kegel zweiten Grades umhüllen; unter diesen Ebenen «können immerhin einige bestimmte mit *Autapse* schneiden. Wenn

aber insbesondere die mit *Rückkehrpunkt* schneidenden Ebenen alle dieselbe *Gerade* gemein haben, so heisse der singuläre Punkt *Kantenpunkt*, und die Gerade seine *Kante;* es gehen dann zwei Ebenen durch diese Kante, welche die Fläche mit *dreifachem Punkte* schneiden; sind diese imaginär, so hat hier die Fläche eine fadendünne Stelle. Schneidet endlich jede durch den Punkt gehende Ebene die Fläche mit *Rückkehrpunkt*, so liegen alle Rückkehrtangenten in einer Ebene welche selbst die Fläche mit *dreifachem Punkte* schneidet ;

wenn alle drei Tangenten des dreifachen Punkts reell sind, so treffen hier drei platte Spitzen der Fläche zusammen, und jeder liegt eine entsprechende Lücke gegenüber; darf man ihn wohl *Dreispitzpunkt* und die Ebene, welche die Fläche eigentlich zweimal mit dreifachem Punkte schneidet, dessen *Platte?* — Wenn eine algebraische Curve nie als vollständiger Durchschnitt zweier Flächen dargestellt werden kann, so nenne ich sie *Untercurve*, im Gegentheil *Vollcurve;* wenn aus dieser oder jener keine Curve niedrigern Grades herausgenommen werden kann, so heise sie *untheilbar*.

Verlangt man die Punkte, in denen eine Fläche F^m von einem $B(f^n)$ berührt wird, so sind diese identisch mit den Durchschnittspunkten der F und einer gewissen Untercurve $\{ 3(n-1)^2 + 2(m-1)(n-1) + (m-1)^2 \}$ ten Grades, des Orts eines Pols, dessen auf F bezügliche Polarebene durch die Axe des auf B(f) bezüglichen Polarebenenbüschels geht. Hat F einen *Hornpunkt*, einen *Kantenpunkt*, einen *Dreispitzpunkt*, so geht die Untercurve durch resp. 1^0 mit freier Tangente, 2^0 die Kante berührend, 3^0 mit Doppelpunkt, dessen Ebene die Platte ist; also zählt der singuläre Punkt resp. für 2, 3, 6 Lösungen der Aufgabe. — Hat F eine *Doppellinie*, so zerfällt jene Untercurve: 1^0 in diese Doppellinie, einfach gezählt, 2^0 in eine untheilbare Untercurve, welche die Doppellinie in allen (u. nur in diesen) Punkten schneidet, wo sie von B(f) berührt wird, wobei jeder dieser Punkte für zwei Lösungen der Aufgabe zählt, und endlich ausserdem die F in den übrigen Punkten, wo B(f) auf gewöhnliche Weise berührt. — Zerfällt F in m Ebenen, so sind vorerst aus der vollständigen Untercurve die $\frac{m(m-1)}{2}$ Durchschnittsgeraden wegzulassen, die übrige untheilbare Untercurve ist dann nur vom $\{ 3(n-1)^2 + 2(m-1)$

«$(n-1) + \frac{(m-1)(m-2)}{2}$ ten Grade und geht frei durch jeden der «$\frac{m(m-1)(m-2)}{2 \cdot 3}$ Durchschnittspunkte (also je 3 Lösungen der Aufgabe; denn hier ist mehr als Hornpunkt!), schneidet ausserdem jede Gerade noch in den 2 (n—1) Punkten, wo sie von B(f) berührt wird (je 2 Lösungen, für die Gerade im Ganzen 4 (n—1)) und endlich ausserdem jede Ebene in den 3 $(n-1)^2$ Punkten, in denen sie allein von B(f) berührt wird. — Wenn eine Fläche aus B(f) in eine Doppelebene von $(e)^2$ und eine g^{n-2} zerfällt, so wird auch jene die Aufgabe lösende Untercurve theilbar, 1° in eine völlig unbestimmte, der e angehörige Curve $(m + 3n - 5)^{ten}$ Grades, 2° in die ebene Curve $(e, g)^{n-2}$, 3° in eine untheilbare Untercurve vom Grade

$$3n^2 - 10n + g + (2n - 3)(m - 1) + (m - 1)^2.$$

Für $n = 2$ reducirt sich diese Zahl auf $m^2 - m + 1$. Wenn also ein $B(f^2)$ eine Doppelebene enthält, so berührt er eine F^m nur in $m(m^2 - m + 1)$ Punkten auf gewöhnliche Weise.

Von einem gegebenen Punkt A gehen an eine F^m nur

$$m(m^2 - m + 1)$$

Normalen. Ihre Fusspunkte liegen nämlich auf einer Untercurve $(m^2 - m + 1)^{ten}$ Grades, dem Orte eines Pols P, dessen auf F bezügliche Polarebene auf dem Strahl AP senkrecht steht.

Eine freie Vollcurve $(F^p, G^q) = C^{p \times q}$ wird von einem $B(f^n)$ in pq (2n + p + q — 4) Punkten berührt. Denn diese liegen auf einer Untercurve $(2n + p + q - 4)^{ten}$ Grades, dem Orte des Poles, für welchen die zwei Polarebenen von F und G sich auf der Axe des Polarebenenbüschels von B(f) schneiden. Die Untersuchung für den Fall einer beliebigen Untercurve C soll etwa später einmal vorgenommen werden.

Wenn eine Fläche F^m und ein Halbnetz $(f, f', f'')^n$ gegeben sind, so ist der Ort des Pols, dessen auf F, f, f', f'' bezüglichen Polarebenen einen Punkt gemein haben, eine Fläche $H^{m-1+3(n-1)}$; und in jedem Punkte der Vollcurve (F, H) oder $R^{m(m+3n-4)}$ wird F von einer Fläche des Halbnetzes berührt.

Wenn vier beliebige f^n gegeben sind, und P ist ein Pol, für den die ersten Polarflächen aller vier f einen Punkt Q gemein haben, so ist der Ort von Q eine Fläche $4(n-1)^{ten}$ Grades.

»Werden durch die drei Seiten eines der 45 Dreiecke der Fläche »dritten Grades Ebenen gelegt, so geht durch die drei Kegelschnitte »immer eine Fläche zweiten Grades. Soll diese ein Kegel sein, so ist »wirklich der Ort seines Scheitels eine Fläche *vierten* Grades, was mir »höchst merkwürdig erscheint. — Was Sie über die schiefen Fünfecke »aussagen, ist Alles richtig. Wird nämlich aus den 27 Geraden eine »f herausgehoben, so giebt es 16 welche sie nicht schneiden; eine »von diesen sei a. · Dann giebt es nur fünf Geraden, welche wohl a, »aber f nicht schneiden; eine von diesen sei b, so giebt es nur vier »Geraden, welche b, aber weder a noch f, schneiden. Eine von diesen »sei c, so giebt es noch 3 Geraden, welche c, aber keine der übrigen »schneiden. Eine darunter sei d, dann giebt es nur noch zwei Geraden, »welche a und d, aber keine der übrigen schneiden. Eine von diesen sei e, »so hat man ein schiefes Fünfeck a b c d e. Wird f festgehalten, so hat man also »16 . 5 . 4 . 3 . 2 solche Fünfecke. Da man aber mit jeder der fünf Seiten »anfangen, und von derselben aus sowohl rechts als links fortgehen »kann, so ist soeben jedes Fünfeck 10 mal gezählt worden; folglich ist »die Zahl aller verschiedenen zur Geraden f gehörenden Fünfecke »16 · 4 · 3 = 192. Ist umgekehrt das Fünfeck a b c d e gegeben, so »giebt es nur noch zwei Geraden, welche keine Seite desselben »schneiden; ja — das Fünfeck kömmt also in zwei Systemen (f, abcde) »vor und im Ganzen giebt es 27 · 192 solche Systeme; folglich giebt »es nur 27 · 96 = 2592 Fünfecke.

»Da es 216 Paare sich nicht schneidender Geraden giebt, »so entsprechen jedem Paare 12 Fünfecke, welche aus den 10 »Geraden, die keine das Paar schneiden, gebildet werden können. »In der That wird die erste Seite des Fünfecks nur von drei »dieser 10 Geraden, die zweite nur von 2 übrigen, die dritte »auch nur von 2 übrigen geschnitten und wenn aus diesen die vierte »gewählt ist, so ist die fünfte Seite nothwendig; also muss die »Zahl der verschiedenen Fünfecke $\frac{10 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 2}{10} = 12$ sein.

»Wenn von jenen 10 Geraden 5 zu einem Fünfeck verwendet wor»den sind, so bilden die 5 übrigen auch wieder ein Fünfeck. Ich »weiss vor der Hand diese Fünfecke nicht weiter zu systematisiren, »wie Sie sagen; ich sehe keine Beziehung derselben, weder zu den 40 »Gruppen von je drei Triederpaaren, noch zu den 360 Flächen zwei»ten Grades, deren jede die cubische Fläche in 6 Geraden schneidet. »Ich glaube, Ihnen einmal ein Verzeichniss der 45 Dreiecke, wo die

»27 Geraden mit Ziffern bezeichnet sind, gegeben zu haben. Tabellen »der Fünfecke, etc. in ähnlichem Sinne würden ganze Bogen anfüllen; »wenn Sie etwas der Art verlangen, so bitte ich Sie, es mir näher »zu bezeichnen; ich würde es Ihnen dann ungesäumt ausfertigen und »zuschicken.

»Wenn Sie von Einem Systeme der Sylvester'schen 5 Grund»ebenen sprechen, so müssen Sie das Prädicat *reell* weglassen; denn »es giebt überhaupt nur *ein* System; und wenn die 19 Gleichungen »dritten Grades mehrere Lösungen haben, so können sie sich nur »durch *Permutation* der 5 Grundebenen unterscheiden. Die 10 Schnitt»punkte der Grundebene sind allerdings gewöhnliche Hornpunkte. »Nimmt man zu dem Berührungskegel zweiten Grades eines solchen Horn»punkts seinen in Beziehung auf das entsprechende Trieder harmonischen »Strahl, so bekömmt man 10 Strahlen; je 4 von diesen, welche einem »Tetraeder entsprechen, treffen in einem Punkt zusammen; es »giebt also 5 solche Punkte. Wenn nämlich ein Kegelschnitt einem »Dreieck umschrieben ist, so entspricht jedem Punkt des Kegelschnitts »in Beziehung auf das Dreieck eine harmonische Transversale, und »während jener Punkt sich auf der Curve bewegt, dreht sich die »Transversale um einen festen Punkt. Diesen nenne ich den har»monischen Punkt für den Kegelschnitt in Beziehung auf das Dreiseit. »Aehnlich für das Trieder und den umschriebenen quadratischen Kegel. »Analytisch dargestellt wird dieses

»Nimmt man die Polynome v, w, x, y, z der Grundebenen so an, dass

$$v^3 + w^3 + x^3 + y^3 + z^3 = 0$$

»die Gleichung der Fläche wird und ist dann

$$a\,v + b\,w + c\,x + d\,y + e\,z = 0$$

»die identische Relation zwischen den fünf Polynomen, so ist

$$v\,w\,x\,y\,z\left(\frac{a^2}{v} + \frac{b^2}{w} + \frac{c^2}{x} + \frac{d^2}{y} + \frac{e^2}{z}\right) = 0$$

»die Gleichung der Kernfläche; folglich

$$c^2\,y\,z + d^2\,x\,z + e^2\,x\,y = 0$$

»z. B. die Gleichung des quadratischen Berührungskegels im Horn»punkt (x y z) und

$$x : y : z = c^2 : d^2 : e^2$$

»sind die Gleichungen des harmonischen Strahls. — Der Schnitt R^{12} oder

$$\left(\sum v^3 = 0,\ \sum a^2\,w\,x\,y\,z = 0\right)$$

«*geht* nicht bloss *durch* die zwei Asymptotenpunkte jeder der 27 «Cayley'schen Geraden, sondern *berührt* sie in denselben, die Curve «R hat also die 27 Geraden zu *Doppeltangenten*. Die Curve 4ten «Grades, in welcher jede der 45 Cayley'schen Ebenen die Kernfläche «schneidet, gehört einem Büschel an, der einerseits vom Vierseit, «dessen 6 Ecken jene Asymptotenpunkte sind, anderseits vom Cayley'- «schen (Diagonalen-) Dreiseit und noch einer vierten Geraden bestimmt «ist. Die Kernfläche geht überdies durch die 240 Scheitel der 120 «Cayley'schen Triederpaare. Das Cayley'sche System liefert also im «Ganzen 348 Punkte der Kernfläche; das Sylvester'sche System liefert «ihre 10 Geraden und die Berührungskegel in ihren 10 Hornpunkten. — «Wenn P, Q auf der Kernfläche befindliche conjugirte reciproke Pole «der ursprünglichen Fläche sind, und P bewegt sich auf der Curve «R, so durchläuft Q eine Curve S, durch die ich bis jetzt keine «niedrige Fläche als siebenten Grades habe legen können, deren «Gleichung

$$\sum a\,b\,c\,(v^6 + w^6 + x^6)\,y^2\,z^2 = 0.$$

«Wenn P und Q je zusammenfallen sollten, so würde die ursprüngliche «Fläche bornirt; in den Durchschnitten von R und S vereinigen sich «daher nicht conjugirte P und Q. Ueber die Lage der Polarkegel «von P und Q gegen einander weiss ich nichts besonderes anzugeben. — «Die Curve R kann wenigstens keine Doppelpunkte, etc. haben; denn, «wenn man verlangt, dass die ursprüngliche Fläche von ihrer Kern- «fläche berührt werde, so kann dieser Forderung *unter Anderem* «durch die sehr einfache Bedingung

$$a^{3/2} + b^{3/2} + c^{3/2} + d^{3/2} + e^{3/2} = 0$$

«entsprochen werden; aber immer wird dadurch die ursprüngliche «Fläche bornirt [1]).

Schläfli an Steiner.

«*Lieber Freund!*

«Sie haben leider Ihren Beweis für den Satz, dass drei ebene Cur- «ven n^{ten} Grades, welche nicht n^2 Punkte gemein haben, nicht mehr als «$n^3 - n + 1$ Punkte gemein haben können, nicht in strengen Formen «ausgeführt; und was Sie davon mittheilen, vermag mich nicht zu

[1]) Unterschrift fehlt.

«überzeugen. Der Mangel liegt darin, dass Sie vom Satze über die «nothwendigen Punkte eine unerlaubte Anwendung machen. Dieser «Satz darf nämlich nur so ausgesprochen werden:

«Wenn $m \geqq n$, so sind *unter* den mn Punkten, welche eine C^m «mit einer C^n gemein hat, $\binom{n-1}{2}$ nothwendig.» Daraus folgt aber «noch nicht, dass, wenn von den gemeinschaftlichen Punkten $mn - \binom{n-1}{2}$ oder sogar mehr fixirt sind, dann alle übrigen nothwendig «sind. Der Schluss würde nur gelten, wenn die $mn - \binom{n-1}{2}$ «Punkte *frei* auf der C^n gewählt werden. Wenn aber diese schon «gegenseitig bedingt sind, so können im Besondern unter ihnen so «viele nothwendige Punkte vorkommen, dass immer noch von den «übrigen einige *nach Belieben* auf der C^n gesetzt werden dürfen. «Den Gedankengang, den Sie mir an die Hand geben, hatte ich schon «vorher durchlaufen, aber eben die erwähnte Schwierigkeit veranlasste «mich zu der Klage, dass ich für Ihren Satz keinen Beweis habe fin- «den können. Zum Ueberfluss füge ich noch hinzu, dass für $n>4$ «stets $\binom{n-1}{2} > n-1$ ist, und dass also, wenn Ihre Fassung des «Satzes von den nothwendigen Punkten richtig wäre, und drei Curven «n^{ten} Grades A, B, C schon n^2-n+1 Punkte gemein haben, dann die «n—1 übrigen nothwendig wären, also alle drei A, B, C zum selben «Büschel gehören müssten. — Sie sagen kein Wort zu dem von mir «zur Sprache gebrachten Falle, wo A, B, C nur $n^2-n\alpha+\alpha^2$ Punkte «gemein haben $\left(\alpha < \frac{n}{2}\right)$; ungeachtet die Construction der Ihrigen «ganz ähnlich ist; nämlich je zwei Glieder des Netzes schneiden sich «ausser jenen Grundpunkten noch in $n-\alpha$ auf einer C^α liegenden «Punkten. Wenn man nun versucht, durch zwei von diesen Punkten «eine Gerade zu legen und mittelst dieser eine C^{n+1} zu bilden, so «kann man wiederum mittelst Ihrer weiten Fassung des Satzes von «den nothwendigen Punkten den schönsten Unsinn herausbringen. «Also noch einmal: Haben Sie die Güte, für Ihren interessanten Satz «einen logisch gegliederten Beweis zu geben, zu dem ich von ganzem «Herzen Ja und Amen sagen kann. Wenn das Netz mehr als $\binom{n+2}{2} - 3$

Grundpunkte hat, so sind diese gewiss gegenseitig bedingt, und es wäre nun wichtig zu wissen, ob alle Zahlen von hier an bis n^2-n+1 möglich sind, oder nur einige derselben, wie z. B. alle von der Form $n^2-n\alpha+\alpha^2$.

Wenn A, C, D, B vier Flächen sind, deren fallende Grade eine arithmetische Proportion bilden, und man bildet aus den zwei zusammengesetzten Gliedern n^{ten} Grades AB und CD einen Flächenbüschel, so ist wirklich auf einem freien Gliede dieses Büschels (B, D) die niedrigste Vollcurve und unbeweglich (also einzig). Auch (C, B) ist unbeweglich und einzig; hingegen (A, C) bildet eine $\binom{\alpha-\delta+3}{3}$ fache Schaar, und (A, D) eine $\binom{\alpha-\gamma+3}{3}$ fache. *Ausnahmen:* Wenn $\alpha=\gamma$, $\delta=\beta$, aber $\alpha>\delta$, so ist immer noch die Vollcurve (B, D) einzig und (A, C) bildet eine $\binom{\alpha-\delta+3}{3}$ fache Schaar; aber (A, D) und (C, B) sind Glieder einer und derselben einfachen Schaar. Wenn endlich $\alpha=\gamma=\delta=\beta$, so sind auch (A, C) und (D, B) Glieder einer einfachen Schaar. — Wenn $n>3$, so sind die unbeweglichen Vollcurven nur in der Anzahl 1 vorhanden; um deren mehrere zu haben, müsste man Gewalt brauchen.

Mit Ihrem Schema $\left\| \begin{matrix} A \,.\, D \,.\, D_1 \\ C \,.\, B \,.\, B_1 \end{matrix} \right\|$ einer Theilcurve haben Sie die R^3 im Allgemeinen nachgeahmt. Wenn Sie meine frühern Briefe nachsehen, werden Sie finden, dass ich schon von solchen Schematen von Theilcurven mit mehr als zwei Horizontalzeilen gesprochen, aber dann auch alle diese Darstellungsweisen als unzureichend für eine möglichst allgemeine Classification der Theilcurven erkannt habe.

Es sind n Ebenen gegeben, und in jeder soll eine Curve n^{ten} Grades so gezeichnet werden, dass je zwei Curven die Kante ihrer Ebenen in denselben n Punkten schneiden. Diese Aufgabe bietet eine sonderbare Schwierigkeit dar. Giebt man nämlich zuerst in jeder Ebene $\binom{n+2}{2}-1$ Punkte zur Bestimmung der Curve, so sind dann wegen der Bedingung auf jeder Kante n Punkte abzuziehen. Es bleiben so nur $2n^2$ Punkte übrig, welche zur Bestimmung des ganzen Curvensystems hinzureichen scheinen. Aber dann würde nicht bloss ein *Büschel* von Flächen n^{ten} Grades durchgehen. Das Umge-

«kehrte hingegen, dass eine f^n und eine Gruppe von n Ebenen einen «Büschel bestimmen, ist vollkommen klar.

«Eine f^n und eine Gruppe von n—1 Ebenen bestimmen nicht «ein Netz, sondern eine *vierfache* Schaar.

«Wenn Sie zwei Büschel B (f^α), B (f^β) projectivisch auf einander «beziehen, und es ist $\alpha > \beta$, so erzeugen sie eine $\binom{\alpha-\beta+3}{3}$ fache «Schaar von Vollcurven α^{2ten} Grades.

«Es sei F die Fläche $(\alpha+\beta)^{ten}$ Grades, Ort des Durchschnitts «je einer Fläche des einen Büschels mit der entsprechenden des «andern; schneiden Sie F mit einer beliebigen Fläche $(\alpha-\beta)^{ten}$ Grades «und nehmen diese Vollcurve zu der Grundcurve des B (f^β) hinzu, «so haben Sie eine zusammengesetzte Curve α^{2ten} Grades, welche der «erwähnten vielfachen Schaar angehört. Nehmen Sie aus dieser viel- «fachen Schaar irgend zwei Vollcurven frei heraus, so schneiden sich «dieselben in $\alpha^2(\alpha-\beta)$ Punkten, welche alle auf derselben Fläche «$(\alpha-\beta)^{ten}$ Grades liegen. Jede solche Vollcurve wird von jeder «$R^\alpha \times^\beta$ in $\alpha^2\beta$ Punkten geschnitten; aber keine zwei $R^\alpha \times^\beta$ haben «einen Punkt gemein. — Es seien A, A', A'' irgend drei Glieder «des höhern, B, B', B'', die entsprechenden des niedrigern Büschels. «Sie setzen auf der F nach Belieben $\binom{\alpha-\beta+3}{3}$ Punkte und legen «durch diese und jeweilen durch eine der Vollcurven (A, B), (A', B'), «(A'', B'') resp. die Flächen α^{ten} Grades $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{A}'$, $\mathfrak{A}''$, so bestimmen diese «einen neuen Büschel α^{ten} Grades, der mit dem unveränderlichen Büschel «β^{ten} Grades projectivisch ist und zwar so, dass $\mathfrak{A}$, B; $\mathfrak{A}'$, B'; $\mathfrak{A}''$, B'' «sich paarweise entsprechen; durch drei Paare ist aber hinreichend «bestimmt, welche Fläche des Büschels ($\mathfrak{A}$, $\mathfrak{A}'$) jeder Fläche des un- «veränderlichen Büschels (B, B') entspricht. — Doch ich bin hier- «über wohl weitläufiger als nöthig ist. Sie haben es durch Ihre «Frage, *was weiter spiele*, veranlasst. Die Fläche F ist jämmerlich be- «schränkt; und diese Vorstellung ist bei unsern frühern Unter- «suchungen schon häufig benutzt worden. Ich kann daher nicht recht «begreifen, warum Sie wieder darauf zurückkommen; Sie repetiren «damit nur die einfachsten analytischen Hülfsmittel, die für andere «Untersuchungen dienen mögen, aber an sich nicht werth sind, viel «besprochen zu werden.

«Sie setzen nun $\alpha = \beta$ und specialisiren stufenweise. I. Die «projectivischen Büschel (A, A', A'') und (B, B', B'') haben kein ge-

meinschaftliches Glied. Die von ihnen erzeugte F Fläche $2\alpha^{ten}$ Grades enthält zwei geschiedene Schaaren (A, A') und (A, B) von Curven α^{ten} Grades: je zwei Curven derselben Schaar können durchaus keinen Punkt gemein haben; aber jede Curve der einen Schaar wird von jeder der andern in α^2 Punkten geschnitten: und durch diese zwei Curven geht immer eine Fläche C''', welche sowohl dem Büschel (C, C', C'', ...) als auch dem Büschel (A''', B''', C''', ...) angehört.

«II. Die projectivischen Büschel (p, q) und (q, r) haben ein gemeinschaftliches nicht entsprechendes Glied q. Dann enthält die F eine einzige Schaar von Curven α^{ten} Grades, welche sämmtlich durch die α^3 (festen) Knotenpunkte der F gehen. Daher bilden alle Flächen der Büschelschaar zusammen ein *Gebüsch*, und jede solche Fläche geht durch *zwei* Curven $R\alpha^2$ und ist durch diese bestimmt, ausgenommen, wenn sie die F längs einer $R\alpha^2$ berührt. Alle solche Flächen P (α^{ten} Grades), welche die F längs einer R berühren, bilden natürlich eine einfache Schaar von der zunächst auf den *Büschel* folgenden Ordnung, indem durch irgend einen im Raume *gegebenen* Punkt nicht nur eine (wie beim Büschel), sondern *zwei* Flächen P gehen. Man könnte also diese Schaar einen quadratischen Büschel nennen, wenn man den gewöhnlichen Büschel mit Grundcurve einen *linearen Büschel* nennen wollte. Ich kann nicht umhin, die an sich sehr klare Sache analytisch auszudrücken. Wir haben $F = pr - q^2$ als Polynom der erzeugten Fläche $2\alpha^{ten}$ Grades. Sind nun λ, μ irgend zwei Projectivitätsfactoren, und setzt man

$P = p + 2\lambda q + \lambda^2 r$. $Q = p + (\lambda + \mu)q + \lambda\mu r$. $R = p + 2\mu q + \mu^2 r$,

so ist auch

$$(\lambda - \mu)^2 F = PR - Q^2.$$

D. h. die Fläche F wird von der Fläche P längs der Curve $(p + \lambda q, q + \lambda r)$ und von der Fläche R längs der Curve $(p + \mu q, q + \mu r)$ berührt, und die Fläche Q geht durch diese zwei Curven. Da $\lambda + \mu$, $\lambda\mu$ jede beliebigen zwei Zahlen sein können, so ist Q jede Fläche des Gebüschs (p, q, r); hingegen P bildet eine einfache Schaar, dargestellt durch die Gleichung $p + 2\lambda q + \lambda^2 r = 0$.

«III. Wenn die Büschel (p, q) (p, r) projectivisch sind und das Glied p gemein haben, so ist $F = p(q - r)$, und was noch klarer als diese Formel sein kann, weiss ich nicht.

«Wenn die zusammengesetzten Flächen AB, CD einen Büschel bilden sollen, der wieder ein zusammengesetztes Glied EF enthält, so ist

«dieses freilich, wenn (A, C), (A, D), (B, C), (B, D) lauter Vollcurven «sein sollen, nur möglich, indem alle 6 Polynomen A, B, C, D, E, F «vom gleichen Grade sind und alle 6 Flächen demselben Gebüsch «angehören.

«Antwort verspätet wegen Examenreisen, und daherigen beim «Witterungsumschlag vom 20. April zugezogenen Katarrh. Leider nur «aus Pflicht geschrieben, sonst unfähig in diese verhexten Zer- «fällungen einzutreten, bei denen ich kein treibendes Interesse «verspüre. Ihr treuer

«Bern, den 1. Mai 1855.

L. Schläfli.»

Steiner an Schläfli.

7.—12. V. 1855.

«*Gestrenger Signore!*

«Ihr ungnädiges Gripp-Schreiben nimmt mir fast den Muth neue «Fragen zu stellen. Sie haben keinen Massstab für die Verstandes- «und Gedächtnissschwäche Anderer, urtheilen bloss nach sich, da- «her keine Nachsicht. Bei meiner Erschlaffung kann ich nicht «immer mit hohen Sätzen rumpeln; zudem besteht meine *Grösse* ja «nur im *Kleinen*, im sorgfältigen allseitigen Erforschen desselben; und «wahrlich ich sage Euch», wer nur Grosses fressen will, sieht das «Gras nicht wachsen, kann die Welt nicht unmittelbar belehren. «Die meisten Menschen steigen vom Kleinen aufwärts; es giebt wenige «Bevorzugte, die Alles auf einmal und von Oben herab verschlingen. «es sind Elephanten, mehr als der alte Mezzo-Elefanti in Rom war.

«Ob Sie mir alle Fragen beantwortet haben, weiss ich nicht. «Von Ihren Katarrh-Formeln kann ich keinen Gebrauch machen, wie «schon früher bemerkt worden, glücklicherweise hatte ich mich schon «zuvor erinnert, wie sich die Sache verhält. — Einiges scheinen Sie «zu flüchtig angesehen zu haben, wie ich zeigen werde. Halten Sie «zu Gnaden, wenn ich dabei vielleicht Dinge vorbringe, die schon in «Früherem enthalten; in meinen Manuscripten kommt manches 3 bis «7 Mal vor. Uebrigens macht mich dies Kapitel über die nothwendi- «gen Punkte und Curven bei Flächen halb verrückt, ich drehe und «wende mich fortwährend noch darin, ohne zu Ende zu kommen.

«1. «Warum ich zu den $n^2 - n\alpha + \alpha^2$ Punkten dreier C^n nichts «sage?» weil ich sie schon zuvor betrachtet habe, sammt dem ana-

«logen Fall bei Flächen, worüber, wie mich dünkt, auch Andeutungen «in meinen Briefen enthalten; da ich aber vom Maximum sprach, so «war dieses $n^2 - n + 1$.

«Wenn Sie aus meinem angegebenen Verfahren «den schönsten «Unsinn» herleiten, so erinnere ich an das Echo: «Wie man in den «Wald hineinschreit, so schallt es zurück». Bei $n^2 - n\alpha + \alpha^2$ darf «man nicht durch *zwei* der übrigen Punkte eine Gerade legen wollen, «sondern sachgemäss durch $\frac{1}{2}(\alpha + 1)(\alpha + 2) - 1$ Punkte eine «Curve C^α, dann sind die Schlüsse gleich und führen zum richtigen «Resultat. Dass Sie dies übersahen, bezeugt Ihre Krankheit und Miss- «muth. Wenn Sie von Ihrer gestrengen Forderung abstehen wollen «*einen logisch gegliederten Beweis zu geben*, — was ja doch nicht «eigentlich Sache meiner Nase ist — so werde ich es noch einmal «versuchen, Ihnen das Verfahren ausführlicher anzudeuten. Das Ganze «ist ein Spiel mit Curvenbüscheln und Netzen, theils mit zerfallenen «Gliedern, ähnlich demjenigen, welches Sie am Ende Ihres Briefes «so sehr ennüirt, dass Sie es mit Formeln in die Luft sprengen, als «wäre es Sebastopol. Die *übergrosse Zahl Grundpunkte* des Netzes «fand ich schon in den 30er Jahren; sie brachten mich erst in grosse «Verwirrung; in Rom wurde darüber mit Rex [1]) verhandelt; 1846—49 «stiess ich von verschiedenen Seiten wieder darauf, theilte auch einiges «dem Schmützer [2]) mit. Indessen kam die Frage nicht vor, auf welche «Signore jetzt sehr drängt: *alle Ueberzahlen anzugeben*. Zur Sache.

«Der Hauptfall entsteht einfach so: Legt man durch die α^2 Grund- «punkte p eines B (B^α C^α D^α....) eine beliebige Curve A^n, $n > \alpha$, «so schneidet sie jedes Glied des Büschels, wie etwa B^α, noch in «$n\alpha - \alpha^2$ Punkten b, und wird durch diese Punkte b eine beliebige «Curve B^n gelegt, so schneidet sie die A^n noch in den *donnstigs* «($n^2 - n\alpha + \alpha^2$) Punkten q, durch welche ein G (C^n) gehen, wo- «von jede das Mitglied A^n in *gleicher* Gruppe von $n\alpha - \alpha^2$ Punkten «(b, oder c, oder d, ...) schneidet, wie je ein Glied B^α, C^α, D^α, ... «des gegebenen Büschels, [und durch die q, und durch jede dieser «Gruppen geht je ein B (C^n)].

«Haben nun irgend drei Curven n^{ten} Grads A^n, B^n, D^n eine «solche Zahl m Punkte q gemein, die

$$\text{«} > \frac{1}{2}(n + 1)(n + 2) - 3 \text{ und } < n^2,$$

«so hat A^n mit B^n, D^n noch $n^2 - m$ Schnitte, beziehlich b, d; man «suche dasjenige α, für welches

[1]) Jakobi. — [2]) Aronhold.

«$m > n^2 - n(\alpha - 1) + (\alpha + 1)^2$ und $m < n^2 - n\alpha + \alpha^2$,
etwa $m = n^2 - n\alpha + \alpha^2 + x$, (wo $x = +$ und ganz),

«und lege sodann durch $\frac{1}{2}(\alpha + 1)(\alpha + 2) - 1$ der Punkte b sowie
«d beziehlich die Curven B^α und D^α: so sind $B^n + D^\alpha$ und $D^n + B^\alpha$
«zwei Curven $B^{n+\alpha}$ und $D^{n+\alpha}$, welche die A^n in denselben
«m Punkten q und $\frac{1}{2}(\alpha + 1)(\alpha + 2) - 1$ Punkten b sowie d
«schneiden, zusammen in $m + (\alpha + 1)(\alpha + 2) - 2$ Punkten,
«also in mehr als

$$\frac{1}{2}(n + 1)(n + 3) - 3 + (\alpha + 1)(\alpha + 2) - 2$$

«und auch, wie leicht zu zeigen in mehr als

$$n(n + \alpha) - \frac{1}{2}(n - 1)(n - 2)$$

«Punkten, daher haben sie auch noch ihre übrigen Schnitte mit der
«A^n gemein, im Ganzen $n(n + \alpha)$ Schnitte; diese weiteren Schnitte
«bestehen aus solchen, welche 1) B^n und B^α, 2) D^n und D^α, 3) B^α
«und D^α jeweilen mit A^n gemein haben; es können aber B^n und B^α
«höchstens nur die $n^2 - m$ Punkte b mit A^n gemein haben (da B^n
«nicht mehr hat), und D^n und D^α nicht mehr als die $n^2 - m$ Punkte
«d, daher müssen B^α und D^α die noch übrigen

$$n(n + \alpha) - m - 2 \times (n^2 - m) = m + n\alpha - n^2 = \alpha^2 + x$$

«Punkte mit A^n gemein haben, allein da B^α und D^α nicht mehr als
«α^2 Schnitte haben können, so muss $x = 0$ sein. «*Folglich giebt es,
«wenn kein Glied zerfallen darf, keine andere übergrosse Zahl m von
«Grundpunkten q des G (C^n), als von der Form* $n^2 - n\alpha + \alpha^2$».
«Dies ist das Verfahren; sollte demselben oder der Logik des Be-
«weises, oder der Rechnung was fehlen, so ergänzen Sie es; meine
«Nase ist zum Spüren — wozu haben Sie den Entwurzler? Signore,
«c'est à vous d'y mettre la main!

«Bei Theilcurven stellt es sich z. B. so. Eine $C\beta$ hat (für sie
«schneidende höhere Curven) $\frac{1}{2}(\beta - 1)(\beta - 2)$ nothwendige Punkte
«r; nehmen *in ihr* $n\beta - \frac{1}{2}(\beta - 1)(\beta - 2)$ beliebige Punkte p.
«und *ausser ihr* noch

$$\frac{1}{2}(n + 1)(n + 2) - 3 \text{ —— } n\beta + \frac{1}{2}(\beta - 1)(\beta - 2)$$

»willkürliche Punkte q an: so geht durch beide (p und q) ein G (C^n), »welches *nothwendig* auch noch jenen Punkt r gemein hat, also im »Ganzen

$$\frac{1}{2}(n+1)(n+2) - 3 + \frac{1}{2}(\beta-1)(\beta-2) = M$$

»Grundpunkte hat. Je zwei Glieder desselben, etwa A^n und B^n, »schneiden sich ausserdem noch in $n^2 - M$ Punkten q_1, welche jedes»mal mit jenen festen Punkten q in einer $C^n - \beta$ liegen, so dass »stets $C\beta + C^n - \beta$ ein Glied des durch A^n und B^n bestimmten »Büschels ist, (wobei also nur $C^n - \beta$ veränderlich, dagegen $C\beta$ »stereotyp ist). — Auch hier ist das Maximum der Ueberzahl »$M = n^2 - n + 1$, und tritt ein, wenn $\beta = n - 1$. Ein ande»rer Fall, wo beide Ueberzahlen m und M gleich werden, ist der, »wo $\alpha = 2$ und $\beta = n - 2$. Das Weitere — c'est encore à »vous . . . !

»Darüber noch *Eins* aus den höhern Staatsgeheimnissen. Ein »Prozess, wobei das G (C^n) mit $m = n^2 - n\alpha + \alpha^2$ q in Evidenz »tritt, fällt mir aus alter Zeit ein. Werden zwei Netze (= Gebüsch) »in einer Ebene N (C^n) und N (C^α), mit irgend einem dritten ebe»nen Netze N (C^α) [auch N (g) oder N (p), d. i. Gerade oder Punkt] »projektivisch bezogen, so sind sie dadurch auch unter sich projek»tivisch, so dass je zwei sich entsprechende Büschel B (C^n) und »B (C^α) eine Curve $C^{n+\alpha}$ erzeugen und die gesammten $C^{n+\alpha}$ »bilden ein N ($C^{n+\alpha}$) mit $n^2 - n\alpha + \alpha^2$ Grundpunkten q. »(Quatsch! Die zwei Netze werden einfach unter sich projektivisch »bezogen, die Vermittlung ist nicht nöthig).

»Für diesen Hochverrath wird mich Signore durch gütige Aus»führung der analogen Betrachtung über Flächen belohnen, was, wie »ich glaube, mir nicht ganz gelungen ist. Bei G (f^n) und G (f^α) »entsteht, wenn ich nicht irre, ein G ($f^{n+\alpha}$) mit übergrosser Grund»curve $R^{n^2 - n\alpha + \alpha^2}$. — Dann: Werden zwei Netze N (f^n) und N (f^α) »mittels [unter sich] eines dritten N (f^n) projektivisch bezogen, so »erzeugen je zwei entsprechende Büschel B (f^n) und B (f^α) eine bor»nirte Fläche $f^{n+\alpha}$; je zwei entsprechende G (f^n) und G (f^α) ein »G ($f^{n+\alpha}$) mit $R^{n^2 - n\alpha + \alpha^2}$: und diese Gesammten R (sowie auch »alle $f^{n+\alpha}$) gehen durch eine bestimmte Anzahl N fester Grund»punkte. *Diese Zahl N zu finden.* Wahrscheinlich steht sie schon »in einem Ihrer Briefe, da je zwei $R^{n^2 - n\alpha + \alpha^2}$ in einer $f^{n+\alpha}$

liegen, — aber Sie können sie doch wiederholen. Bei N (f^2) und N (f_1^2) ist N = 4, das bekannte Quadrupel.

Zweiter Theil des Geheimnisses, dem Ersten analytisch wohl gleich, synthetisch durch die Farbe verschieden und speziell. — *Sind zwei Basen* $f^n + 1$ *und* $f^\alpha + 1$ *gegeben, so giebt es dieselbe Zahl N von solchen Polen P, deren Polarebenen (letzte Polaren) zusammenfallen.*

Zugabe. Ort von P, dessen Polarebenen 1) in Bezug auf drei gegebene Basen f^α, f^β, f^γ sich in einer Geraden g schneiden, und Ort dieser g? oder 2) in Bezug auf 4 gegebene Basen sich in einem Punkte Q schneiden und Ort des letzteren? Auch: wieviele g giebt es noch bei 4 Basen? keine! — So noch Anderes, was ich im Augenblick nicht weiss.

2. Die Nase kann nochmals helfen. Dass durch n gegebene C^n, die in n Ebenen E liegen und sich auf den Kanten in je n Punkten q schneiden, ein B (f^n) geht und bestimmt ist, folgt so:

In der ersten Ebene E_1 ist C_1^n bestimmt durch

$$\frac{1}{2}(n+1)(n+2) - 1 = N \text{ Punkte p;}$$

In E_2 ist C_2^n, ausser den n Punkten q in der (E_1, E_2), bestimmt durch $= N - n$ p;

In E_3 ist C_3^n, ausser den $2 \times n \cdot q$ in zwei Kanten, bestimmt durch $= N - 2n$ p;

In E_4 ist von den $3 \times n$ q *einer nothwendig,* also die C_4^n bestimmt durch $= N - 3n + 1$ p;

In E sind von den $(n-1) \times n$ q nothwendige

$$\frac{1}{2}(n-2)(n-3), \text{ also } C_n^n \text{ betimmt durch} =$$

$$N - (n-1)\,n + \frac{1}{2}(n-2)(n-3) \text{ Punkte p;}$$

Also die Gesammtzahl der bestimmenden Punkte

$$p = nN - \frac{1}{2}(n-1)\,n^2 + \frac{1}{6}(n-1)(n-2)(n-3) = \frac{1}{6}(n+1)^{3|1} - 2,$$

wodurch gerade der B (f^n) bestimmt wird. — (Legt man durch die n Curven C^n eine f^{n+1}, so schneidet sie jede E noch in einer Geraden g und alle n g liegen in einer Ebene; also die f^{n+1} sehr bornirt; desgleichen $f^{n+\alpha}$.) Sind in n + 1 Ebenen *gleicherweise* n + 1 Curven C^n gegeben, so liegen sie in *einer bestimmten* f^n.

3. *Warnung:* Sind im Raume 4 Punkte und eine f^2 gegeben,

«so giebt es 8 solche f_1^2, welche durch die Punkte gehen und der «f^2 umschrieben sind; auch bilden die 8 Berührungsebenen mit den «4 Flächen des durch die 4 Punkte bestimmten Tetraeders eine nette «Configuration. — Von unten herauf folgt dies leicht — analytisch «schwer — daher setzen Sie lieber an den folgenden Sätzen an, die «für Sie leicht und für mich nöthiger sind.

«4. Wenn von 3 Flächen 2 n^{ten} Grads A^{2n}, B^{2n}, C^{2n} je zwei sich «in zwei Theilcurven gleichen also 2 n^{2ten} Grads schneiden, etwa (AB) «in $\gamma^{2n^2} + \gamma_1^{2n^2}$, (AC) in $\beta^{2n^2} + \beta_1^{2n^2}$, (BC) in $\alpha^{2n^2} + \alpha_1^{2n^2}$, so dass «also durch diese Curven 3 Flächenpaare n^{ten} Grades gehen, c^n und c_1^n, «b^n und b_1^n, a^n und a_1^n, die Glieder des durch jene 3 Flächen be- «stimmten $G(f^{2n})$ sind, so gehören diese 3 Paare zu *einem Büschel* «dieses Gebüsches, d. h. von den 6 Theilflächen schneiden sich 4 mal «3 in einer Vollcurve R^{n^2}, und alle 6 Flächen gehören zu einem kleinen «$G(f^n)$, in dessen n^3 Grundpunkten q sich alle 4 Curven R^{n^2} schnei- «den (?). Die $(2n)^3$ Grundpunkte p des grossen $G(f^{2n})$ zerfallen in «8 Gruppen zu je n^3 p, in jeder R^{n^2} liegen Gruppen. Die 3 Flächen- «paare a und a_1, b und b_1, c und c_1 im $G(f^n)$, sind wie die Gegen- «flächen eines vollständigen *Vierkants*.

«Fallen nun die Curven γ und γ_1 in *eine* γ_0 zusammen, so sind «die Flächen A und B sich längs derselben umschrieben und die durch «dieselbe gehende Fläche c_0^n ist als Doppelfläche (c^n und c_1^n vereint) «anzusehen; ebenso vereinigen sich die 4 Curven R^{n^2} paarweise, etc. «Vereinigen sich ferner auch β und β_1 in eine β_0, längs der sich A «und C berühren und durch die eine doppelt gedachte Fläche b_0^n «geht, so vereinigen sich die 4 R^{n^2} in eine einzige $R_0{}^{n^2}$, Schnitt (b_0^n «c_0^n), und alsdann ist das Flächenpaar a^n und a_1^n zu den Berührungs- «flächen c_0^n und b_0^n zugeordnet harmonisch (alle 4 gehören zu einem «Büschel um R_0). Also: „*Wird eine gegebene Fläche* A^{2n} *von beliebigen «zwei Flächen* b_0^n *und* c_0^n *in zwei Curven* $\beta_0{}^{2n \cdot n}$ und $\gamma_0{}^{2n \cdot n}$ *ge- «schnitten, und werden ihr längs diesen Curven irgend zwei Flächen «*B^{2n} *und* C^{2n} *umschrieben, so schneiden sich diesen allemal p l a n, «d. h. in 2 Theilcurven* α^{2n^2} *und* $\alpha_1{}^{2n^2}$, *durch welche zwei (mehr als «bestimmte) Flächen* a^n *und* a_1^n *gehen, die sich allemal mit jenen «Flächen* b_0 *und* c_0 *in derselben Curve* R_0 *schneiden und zu ihnen har- «monisch sind.*“ Alle Paare a^n und a_1^n bilden also ein Involutions- «System, welches b_0^n und c_0^n zu Asymptoten hat. — Darf man um- «kehren? und sagen: Wenn zwei Flächen $2n^{ten}$ Grads A^{2n} und B^{2n} «einander *voll umschrieben* sind, so geht durch die Berührungscurve

«immer eine Fläche n^{ten} Grads, c_0^n. und wenn zwei Flächen B^{2n} und «C^{2n} einer dritten A^{2n} voll umschrieben sind, so schneiden sie sich «*plan*, und die beiden Planflächen a^n und a_1^n gehen durch den Schnitt «R_0 der Berührungsflächen b_0^n und c_0^n, und sind zu diesen harmo«nisch. He!? für $n = 1$ ist es so. Folgende Umkehrung ist er«laubt: „*Schneiden sich zwei Flächen B^{2n} und C^{2n} plan und man legt «durch den Schnitt $R_0^{n^2}$ ihrer Planflächen a^n und a_1^n, irgend ein Paar «zu diesen harmonischen Flächen c_0^n und b_0^n, so schneiden letztere jene «ersten Flächen B^{2n} und C^{2n} (oder auch C^{2n} und B^{2n}) in solchen Curven «γ_0 und β_0. längs denen ihnen eine und dieselbe Fläche A^{2n} umschrie«ben ist.*“ Also giebt es eine S (A^{2n}), welche den 2 gegebenen B^{2n} «und C^{2n} gemeinsam und vollumschrieben sind, und die Schaar Paare «Berührungsflächen c_0^n und b_0^n haben die Planflächen a^n und a_1^n zu «Asymptoten. Fixirt man aus der Schaar S (A^{2n}) irgend zwei Glieder «A^{2n} und A_1^{2n}, bezeichnet die Berührungsflächen von A_1^{2n} mit B^{2n} und «C^{2n} beziehlich durch c_1^n und b_1^n, so müssen sich auch A^{2n} und A_1^{2n} «plan schneiden und ihre Planflächen, etwa d^n und d_1^n, müssen (mit «c_0^n, b_0^n, a^n, a_1^n) durch dieselbe $R_0^{n^2}$ gehen, und sowohl zu c_0^n und «c_1^n, als b_0^n und b_1^n, als a^n und a_1^n harmonisch sein. Also: «Ist ein «Flächenpaar B^{2n} und C^{2n} einem andern A^{2n} und A_1^{2n} voll umschrie«ben, so schneidet sich jedes Paar plan, und die Planflächen, a^n u. a_1^n, «des einen Paars, sind zu denen des andern, d^n u. d_1^n, harmonisch.» Etc. «— Haben Sie die Güte dies bald ergänzend zu verifiziren; mir wird's «sauer — Ihnen ist es Erholung, oder wie man sagt «ein gefundenes «Fressen». Stossen Sie sich nicht an «*plan*», hab' es bloss hier zur «Kürzung gebraucht. Schon vor 30 Jahren, in meiner ersten Ab«handlung, habe ich vom ersten Satze den Anfang gegeben, s. *Crelle*'s «Journ. Bd. I. S. 46, Satz VI.

«Ferner noch die vielleicht unsinnige Frage: Wenn sich f^m und «f^n längs einer Curve R_1 berühren und längs R_2 schneiden, sind dann «diese Curven selbständige (organische) Theile der $R^{m \times n}$, d. h. «sind sie solche R_1^x und R_2^y, wo $2x + y = mn$, und durch welche «etwa solche Flächen f^α und f^β gehen, wo $2\alpha + \beta = m > n$ ist? «— Können von 3 Flächen A^{2n}, B^{2n}, C^{2n} je zwei einander voll um«schrieben sein? scheint nicht; geht es für 3 Curven $2\,n^{ten}$ Grads? «Für Kegelschnitte schon vor 30 Jahren ausgebeutet.

«5. Durch drei beliebige Curven C^2 ist das N (C^2) bestimmt; «zunächst die Trippelcurve C_0^3 und durch diese die Basis C^8. Wenn «nun aber von den gegebenen drei C^2 1) zwei einander *doppelt* be-

«rühren, oder 2) wenn zwei die dritte *doppelt berühren*, oder 3) wenn «je zwei sich *doppelt berühren*, wie ist dann die Basis C^3 und die «Trippelcurve C_0^3 beschaffen? — Von drei f^2 können zwei der dritten «voll umschrieben sein und *einander* selbst in zweien Punkten be«rühren. Wie müsste f^3 beschaffen sein, wenn sie dieselben zu Po«laren haben sollte?

«Oder welche besondere Eigenschaft hat dort das $N(C^2)$ und «hier das $G(f^2)$?

«6. Wenn ein Kegel K^2 durch 5 feste Punkte p gehen und eine «feste Ebene E *streifen* soll, welches ist dann der Ort seines Scheitels «(eine Curve in der Ebene E)? Oder: Wenn eine Curve C^2 fünf «feste E berühren und durch einen festen p gehen soll, welchen Ort «hat dann ihre Ebene? (einen Kegel, dessen Scheitel in p), und in «welcher Fläche liegen alle C^2?

«7. Welche Enveloppe hat die $S(K^2)$, die durch 5 feste p gehen «und ihre Scheitel in einer festen Geraden g haben? Oder: zu welcher «Fläche liegt die $S(C^2)$, welche 5 gegebene E berühren und deren «Ebenen sämmtlich durch eine feste g gehen?

«Aus Furcht, dass diese Fragen (6 u. 7) schwierig sind und ich «die Antwort im Augenblick nicht gerade nöthig habe, darf ich nicht «weiter gehen.

«Die grössten Mathematiker werden erkannt und berufen: *Wolf*, «*Lazarus* und *Marquis*; ich grüsse und gratulire dem «Nous vivons «entre nous», dass er einen ihm widerlichen Anblick los wird.

«Sie haben mir nie gesagt, was aus der Schuster-Forderung ge«worden ist!

«Ueber meine Reise habe ich noch keinen definitiven Plan ge«fasst. Nichts lockt mich an; Urlaub noch nicht durch die Kanzlei «angelangt (natürlich habe ich die Vorlesungen nicht begonnen); Gastei «ist mir verordnet, kann auch nichts helfen, ganze Darmkanal ist «futsch; Paris wird unverschämt theuer sein, müsste zuvor an Jemand «schreiben, aber geschieht nicht; Bern ist auch nichts, giebt Rheu«matismen und Gicht und Signore taglöhnert: also wohin? was «machen? Hier komme ich mit der Arbeit auch nicht vorwärts, kann «nur ein paar Stunden täglich arbeiten, ohne Kraft, Gedächtniss und «Phantasie, am Abend, was sonst die beste Zeit war, gar nicht mehr. «Es ist schade, dass der fromme Wunsch, den ich schon voriges Jahr

»hegte, nicht zu realisiren ist, nämlich meine Redaction gewisser-
»massen unter Ihren Augen auszuführen, unter Ihrer plötzlichen (täg-
»lichen) Hülfe im Ausdruck, in der Anordnung und Combination, in
»der Richtigkeit der Formeln (Gedächtniss), wobei aber doch meine
»Schulmeister-Methode befolgt würde, was ohne Zweifel später auch
»Ihre eigenen Arbeiten etwas *herablassender* gestalten und sie dem
»Publikum leichter und zugänglicher machen müsste (denn selbst
»*Nudel* bezeugte, dass er sehr viel von meinem *Spinnen* gelernt).
»Aber wenn diess auch nur je in einer Stunde geschehe, etwa spät
»Abends, und Sie sonst mit allem Spazieren verschont blieben, da
»mir rasches Gehen immer saurer wird, so würden Sie sich doch
»schwer darein finden, weil es oft mehr Kleinliches, Ihnen werthlos
»Scheinendes zu ordnen, als Stämmiges zu entwurzeln gäbe. Sonst
»scheint mir, müsste auf diese Weise etwas zu Stande kommen.

»Mit einem andern Wunsch, dass diese Lieferung Sie ohne
»Katarrh und Grippe, in guter Laune treffen möge, grüsst Sie und
»die Andern

»Ihr dankbarer

J. Steiner.«

»Berlin, vom 7.—12. Mai 55.

(Das Ende von Nr. 1 und Nr. 4. 5 bald.)

Steiner an Schläfli.

12. Juni 1855.

»*Lieber Freund!*

»Diesmal ist mir Ihr Schweigen unerklärlich. Auf Ihren Brief
»vom 1. Mai antwortete ich am 12. Mai, gab Ihnen ausführliche Aus-
»kunft über das beanstandete $n^2 - n\,\alpha + \alpha^2$ und über die n C^n in n E.
»nebst andere Dinge, und fügte neue (für Sie leichte) Fragen bei mit
»der dringenden Bitte, sie nach wenig Tagen zu *bejahen*, weil ich sie
»im Augenblick nöthig brauche. Umsonst harre ich seitdem auf Be-
»scheid; weiss nicht, ob Sie krank sind, oder Launen haben, oder den
»Brief nicht erhalten. Was es auch sein mag, werde ich hoffentlich
»mit umgehender Post aus dieser Nichtwissens-Qual befreit werden.

»Schon am 18. und 19. Mai wollte ich Ihnen meinen Triumph
»über die 10 Glieder $f^2 = 2$ E im allgemeinen $N(f^2)$ nebst vielen andern
»Eigenschaften des letztern melden; allein da ich täglich Ihrer Antwort
»gewärtig war, so schob ich es auf; jetzt muss ich es lassen, bis mir
»kund wird, wie es steht. —

»Seitdem habe ich mich in's Gebüsch verloren und schrecklich »gequält um mich darin zurecht zu finden und wieder herauszukommen; »nämlich ich habe das allgemeine $G(f^2)$ und seine R^6 *secirt* und *anatomirt;* »es ergaben sich dabei fast gespensterhafte geradlinige (theils abwickel- »bare) Flächen, die einander längs charakteristischer Curven umschrieben »sind; die Schaar Quintupel, $S(Q_5)$, habe ich so ziemlich aufgefressen, »sie spielen eine Hauptrolle; jedes Q_5 hat 10 Diagonalebenen und allen »insgesammt ist von der Natur eine sehr tiefdurchdachte Stellung an- »gewiesen. — Jedoch Eins, was vielleicht ganz leicht, macht mich seit »5 Tagen halb verrückt, nämlich folgendes. Die Pole Q einer E in »Bezug auf die einzelnen Glieder eines $G(f^2)$ liegen in einer f^3; und »bewegt sich ein Pol P in derselben E, so schneiden sich seine ge- »sammten Polarebenen stets in je einem Punkte Q, dessen Ort die »nämliche f^3 ist, so dass also jeder Punkt Q einerseits der Pol eines »bestimmten Gliedes f^2 ist und andererseits einem bestimmten Pol P »in der E entspricht, und damit auch P und f^2 sich entsprechen und »projectivisch sind; *zudem berührt die Polarebene von P in Bezug auf »f^2 die Fläche f^3 in Q.* Nun folgt leicht, dass wenn sich P längs einer »Geraden G (in E) bewegt, dann sein conjugirter Q eine R^3 (auf f^3) durch- »läuft; und dass die Pole Q jedes in dem $G(f^2)$ enthaltenen Büschels »$B(f^2)$ ebenfalls in einer R^3 liegen; *aber nun vermag ich nicht zu be- »weisen: »dass die diesem $B(f^2)$ entsprechenden Punkte P in einer G »liegen; oder dass im ersten Falle die den Punkten P in der gegebenen »G entsprechenden f^2 einen Büschel bilden.«* Meine Bemühungen darum »lieferten viele curiose Schulmeister-Sätze.

»Mein Aufsatz über Normalen aus P auf C oder f^n ist endlich »im Februarheft des *Liouville* Journals erschienen, übersetzt von einem »Preussischen premier Lieutenant *v. Horn.* bei den schwereren Stellen, »wie er mir schreibt, mit Dr. *Wöpke's* Hülfe. Kürzlich ersuchte ich »den Hauptsetzer des hiesigen Journals, den Redacteur desselben ge- »legentlich an Ihre Abhandlung zu erinnern; er versprach mir es zu »thun, obschon *Crelle* nur bei ihm imponirenden Persönlichkeiten von »der chronologischen Folge abweiche.

»Prof. *Schönemann.*[1]) der Ende Mai einige Tage hier war, meinte »ich sollte versuchen, Sie hieher zu bringen. Es ist schwer, weil »Sie zu wenig bekannt sind, und doch wären Sie in vieler Hinsicht »der geeignetste (z. B. über Arbeiten Anderer zu berichten). Ich werde »Morgen oder Uebermorgen bei einem Ministerialrath auf den Busch »schlagen. Von solchen, die bisher im Ministerium genannt worden

[1]) Schönemann, Theodor, geb. 4. IV. 1812. Prof. der Mathematik.

«sein sollen, wären *Kummer* (Breslau), *Weierstrass* (in Braunsberg), «der grosse *Heine* (in Bonn). — *Schönemann,* der sich selbst mit Eli- «mination beschäftigt hat, klagt, dass Sie ihm kein Exemplar Ihrer «Wiener-Abhandlung geschickt haben. Was soll man da sagen? — «Ziegel!

«In *Crelle* finden sich Aufsätze vom besagten *Weierstrass;* eli- «miniren Sie ihn!

«Im vorigen Brief habe ich Ihnen über mein Befinden, über «meine Unschlüssigkeit, etc. gemüthlich geklagt; Ihr Schweigen hat «diesen Jammer noch vermehrt, jetzt weiss ich erst recht nicht, was «ich *thun* oder *lassen* soll. Am 22. oder 23. d. Monats muss ich wohl «endlich nach Gastein abreissen, zuvor erwartet Antwort

«Ihr dankbarer

J. Steiner.»

Schläfli an Steiner.

«Bern, den 17. Juni 1855.

«Mein Unwohlsein hat einen entsetzlichen Schlendrian nach sich «gezogen. Da ich nicht *sogleich* die Antwort auf Ihren Brief vom 12. «Mai in Angriff nahm, so ist durch stetes Aufschieben diese lange «Verzögerung entstanden. Um mich einigermassen zu entschuldigen, «will ich anführen, dass ich an den 4 ersten Wochentagen Morgens «von 6—8 und von 10—12 Unterricht habe, dass der Nachmittag «durch die grosse Hitze die ernste Arbeit erschwert, und dass in «die letzte Zeit auch allerlei Commissionsgeschäfte gefallen sind. «Mein Schnupfen hat auch auffallender Weise während der grossen «Hitze fortgedauert und mir den Schlaf gestört. Ich hoffe nun, die «jetzige Abkühlung werde zu meiner Erholung beitragen; aber leider «kommt nun die Vorsichtsrechnung.

«Da ich die Antwort nicht länger aufschieben kann, so ant- «worte ich für jetzt nur auf Ihren letzten Brief vom 12. Juni. — «Sie betrachten da die Pole Q einer Ebene E in Bezug auf die Glieder «f eines Gebüsches zweiten Grades; jedem Punkt Q entspricht in «der Ebene E ein Punkt P, dessen sämmtliche Polarebenen sich in Q «schneiden. Es ist *richtig,* dass die Polarebene von P in Bezug auf «die entsprechende Gebüschfläche f die Ortsfläche Q dritten Grades «im entsprechenden Punkt Q *berührt.* Aber, wenn Sie aus dem «Gebüsch einen Büschel herausnehmen, so liegen die entsprechenden

»P nicht in einer Geraden, sondern in einer Curve *fünften* Grades. »Setzen Sie nämlich als Ort von P zuerst eine Gerade, so durchläuft »Q eine auf jener Fläche^3 liegende R^3; setzen Sie dann irgend einen »Büschel aus dem Gebüsch der f, so durchläuft der Punkt Q wieder »eine auf derselben Fläche^3 liegende Curve S^3. Beide R^3 und S^3 »liegen auf einer und derselben Fläche zweiten Grades, gehören aber »hier zu verschiedenen Schaaren und schneiden sich daher in 5 Punkten »Q; diesen entsprechen also 5 auf jener Geraden befindlichen Punkte »P; folglich entspricht dem Büschel f eine in E liegende Ortscurve »P 5ten Grades. Ich würde es nicht wagen, die Punkte P und die »ihnen entsprechenden Gebüschflächen f *projectivisch* zu nennen, weil »keine *Proportionalität* der beide Doppelschaaren characterisirenden »Constanten stattfindet.

»Sie gehen gar nicht auf die Mängel ein, die ich mit vollem »Recht an dem Beweise für das Maximum $n^2 - n + 1$ gerügt habe. »Es frägt sich ja eben, wie wir in den Wald hineinschreien sollen. »Wenn die logische Kette nicht geschlossen ist, so giebt es keinen »electrischen Strom.

»Die Sachen sind immer noch zu schwer und zu bunt, und ich »jetzt durchaus nicht fähig, sie zu bewältigen. — Gastein liegt im »Salzburgischen; wenn ich einmal Ihre Adresse weiss, so werde ich »dorthin schreiben können. — Wenn Sie bereit sind, später einmal »einen Aufsatz von mir der Berliner-Akademie vorzulegen, so arbeite »ich gerne für diesen Zweck etwas aus.

»Ich danke Herrn *Schönemann* für sein Wohlwollen und lasse »ihn grüssen.

»Die Schusterforderung ist als verjährt anerkannt, wie mir »*Leuenberger* gesagt hat.

»Sie wegen meiner Schläfrigkeit in der Correspondenz um Nach»sicht bittend, und Sie herzlich grüssend

»Ihr treuer und dankbarer

L. Schläfli.«

Steiner an Schläfli.

»*Lieber Freund!*

»Diesmal dauerte es lange bis ich Berlin verliess, bis 5. Juli, »wiewohl ich schon am 18. Mai im Besitz des Urlaubs war. Ohn»mächtig quälte ich mich mit theils schon früher behandelten Be-

«trachtungen ab, bis ich zuletzt gar nichts mehr davon verstand und «nicht mehr wusste, was ich eigentlich wollte. Dann kramte ich 8 «Tage herum mit Ordnen und Einpacken, und ebenso lange trödelte «ich auf der Reise bis hieher, in Leipzig, München und Salzburg. «Durch Ihren Missmuth ist meine Arbeit sehr ins Stocken gerathen; «Sie verschmähten die Kleinigkeiten, wollen immer nur Neues und «Grosses fressen, während ich nicht umhin kann, an kleinlicher Ab- «rundung und möglicher Vollständigkeit zu knabern. Eigentlich bin «ich jetzt fast weiter zurück, als voriges Jahr; an die Flächen 3ten «Grads bin ich noch gar nicht gekommen, und die Ausstellung war- «tete nicht auf mich.

«Heute nahm ich das 11te Bad; verspüre noch keinen grossen «Erfolg; die ersten Bäder bewirkten den Buckel voll Rheumatismus, «der noch nicht ganz weg ist. Die Flora kommt mir hier einfältig «vor; einige Cimen, von der Höhe des Ochsen, wären hübsch, wenn «man erst oben wäre; aber meine Kraft langt nicht. Am 5ten August «werde ich wohl das 21ste und letzte Bad nehmen und am 6ten oder «7ten von dannen ziehen. An der Dauer dieses Briefes ist zu ermes- «sen, ob Zeit genug ist, falls Sie mir hieher etwas melden wollen.

«Es war mein Plan, von hier nach dem Engadin und Chur zu «gehen, aber die ersten 8 Stunden müssen zu Fuss oder à cheval und «theils über Schnee gemacht werden, was mir nicht ansteht. Will «ich nach der Schweiz kommen, so muss ich also über Salzburg nach «München zurück. Was habe ich aber davon, wenn ich schon wieder «nach Bern komme? Die gräulichste Langeweile! Signore taglöhnert «um schnöden Sold, macht Hausknechts-Rechnungen, bis ihm Kopf und «Herz bricht; bleibt mir nur übrig, mit *Rettig* Klaglieder zu singen, «oder mit Mutz auf die St. Petersinsel zu gehen. Wo bekäme ich «ein gesundes Sonnseitzimmer? Ist der Stern nicht zu ordinär? Spre- «chen Sie mit *Leuenberger*. — Wenn ich komme, werde ich mich «wohl in St. Gallen, Zürich, Aarau, Langenthal, Burgdorf oder Kirch- «berg je 1—3 Tage aufhalten.

«Am 2ten Juli der *Reimer*'schen Buchhandlung das versprochene «Päckli Dissertationen übergeben: es enthält nebst Gutem auch Schund; «was für Sie und Andere spezifisch ist, können Sie gleich ausschei- «den und vertheilen; das Uebrige ordnen und sich *auch einmal ob- «jectiv verhalten* und *klug überlegen*, für wen jedes Stück am besten «passe, damit wir dann zusammen berathen, wem es angeboten wer- «den soll; meine Grossmutter, eine Elsässerin, pflegte zu sagen: «es

:bt der Nasen zwoo, was die eine nicht will, ist die ander' froh.»
: Medicinischen werde ich selbst theilen oder loosen lassen.

«Einige Aufgaben, die ich in Berlin noch hatte, weiss ich im genblick nicht mehr, Ihre Laune lähmte mich noch mehr; viel- :ht liegen sie unten in der Koffer — in Bern werde ich aus- :ken.

«Frisch! täglich gerechnet bis Sie sturm werden, dann mag am end die Gräfin ergötzen.

«Seien Sie freundlichst gegrüsst und desgleichen Rettig, Schni- ', Mutz, Leuenberger *und Frau*, etc.

«*Bad Gastein*, den 25ten Juli 1855.

«Ihr dankbarer

J. Steiner.»

«N. B. Bei der Abgabe der Dissertationen sprach ich Reimer bst, erzählte ihm eine ½ Stunde von Monsignore und klagte, dass e Abhandlung — die doch wichtiger als Vieles des Erschienenen — noch nicht gedruckt worden sei. Er interessirte sich dafür l versprach die Aufnahme zu beschleunigen. Da immer 2—3 te in Arbeit sind, ehe sie ausgegeben werden, so kann es also h noch 6 Monat dauern, bis Ihre höchste Arbeit erscheint.

«Bei meiner Abreise war Dr. *Borchart* zum Mitglied der Akade- : vorgeschlagen.»

Schläfli an Steiner.

«*Herr Professor!*

«Ich habe früher einmal gegen Sie Zweifel geäussert, über den z von den Brennpunkten dreier einem Vierseit eingeschriebener gelschnitte (*Crelle* 45. Mai 1852). Was einen stutzig machen kann, dass man auf den ersten Blick glaubt, der Satz gelte ausschliess- ı von den Distanzen. Er ist aber dort unvollständig ausgedrückt, ofern auch von den Projectionen der Distanzen etwas ausgesagt rden kann.

«Es seien a, α die zwei reellen Brennpunkte des ersten Kegel- nitts, p die Strecke auf der Mittelpunktsgeraden vom Mittelpunkt , zweiten bis zum Mittelpunkt des dritten Kegelschnitts; b, β, q l c, γ, r haben der Reihe nach ähnliche Bedeutung; est ist also $\pm$ q + r = o. Den Winkel, den die Distanz (ab) mit der als

«positiv angenommenen Richtung der Mittelpunktsgeraden bildet, be-
«zeichne ich mit $<(ab)$. Dann ist

$$<(a\,b)+<(a\,\beta)+<(\alpha\,c)+<(\alpha\,\gamma)=<(\alpha\,b)+<(\alpha\,\beta)$$
$$+<(a\,c)+<(a\,\gamma)$$
$$=<(b\,c)+<(b\,\gamma)+<(\beta\,a)+<(\beta\,\alpha)=<(\beta\,c)+<(\beta\,\gamma)$$
$$+<(b\,a)+<b\,\alpha)$$
$$=<(c\,a)+<(c\,\alpha)+<(\gamma\,b)+<(\gamma\,\beta)=<(\gamma\,a)+<(\gamma\,\alpha)$$
$$+<(c\,b)+<(c\,\beta)$$

«und die drei Werthe

$$(a\,b)\,(a\,\beta)\,(\alpha\,c)\,(\alpha\,\gamma)=(\alpha\,b)\,(\alpha\,\beta)\,(a\,c)\,(a\,\gamma),$$
$$(b\,c)\,(b\,\gamma)\,(\beta\,a)\,(\beta\,\alpha)=(\beta\,c)\,(\beta\,\gamma)\,(b\,a)\,(b\,\alpha),$$
$$(c\,a)\,(c\,\alpha)\,(\beta\,b)\,(\gamma\,\beta)=(\gamma\,a)\,(\gamma\,\alpha)\,(c\,b)\,(c(\beta$$

«sind mit $\frac{1}{p}, \frac{1}{q}, \frac{1}{r}$ proportional, so dass also die Summe der drei «umgekehrten Werthe gleich Null ist. Die Vorzeichen der Distanzen «sind so einzurichten, dass obige sechs Winkelsummen nach dem Modus «2π congruiren. Vom Brennpunkt der Parabel gilt nicht nur, dass «das Product seiner Entfernungen von beiden Brennpunkten irgend «eines andern Kegelschnitts constant ist, sondern dass eine feste Ge-«rade den Winkel zwischen diesen Entfernungen halbirt.

«Bern, den 7. Juli 1857.

L. Schläfli.»

Schläfli an Steiner.

«*Lieber Freund!*

«Ich kann nun den Punkt U, wo die bekannte Fusspunktlinie «ihre Umhüllte berührt, bestimmen. Er liegt eben so weit von «dem Scheitel der Parabel als der Berührungspunkt jenes dem Drei-«seit eingeschriebenen Kegelschnitts, welcher die Leitlinie der Parabel «im Höhenpunkt berührt.

«Ich möchte Sie bitten, diesen Abend um 8 Uhr zur Gräfin zu «kommen.

«Mit freundlichem Gruss *L. Schläfli.*»

Bern, 11. September 1855.

Der Briefwechsel stockte den ganzen Winter 1855/56. Zum nachfolgenden Brief finden sich 2 Concepte, eines vom 31. Oktober 1855 und eines vom 20.—23. April 1856. Es bestätigt dies die Behauptung *Steiners*, dass er *Schläfli* stets habe schreiben wollen, aber nichts zu Stande gebracht habe.

1856. Steiner an Schläfli.

Berlin, 20ten April 1856.

Lieber Schläfli!

So wirkt das Verhängniss! so weit hat uns Ihr vorjähriger Kathar auseinander gebracht. Es ist nicht Rache für die acht Höllentage in Bern, sondern mein geistiges Beharrungsvermögen (Inertia). Es liegen sogar freudige Briefanfänge vom 4ten October (Paris) und November (Berlin) vor mir, auch spätere, aber es wollte nicht gehen, weil die Kraft, Lust und der Inhalt fehlten, auch das Vertrauen: dass Sie im eigenen Interesse nicht thun würden, was ich verlange. — Der seitherige Verlauf ist so:

In Paris traf ich erst Niemand, Alles verreist, 11 leere Besuche; nach 8—10 Tagen kamen sie an. Am ersten Mittwoch des October lud mich *Sturm* mit *Bertrand* und *Catalan* zum Frühstück (11—5 Uhr) ein. Als ich dabei von Ihrem Schicksal mit *Liouville* (*Crelle* und *Wien*) sprach, war *Sturm* sehr gerührt und platzte mit dem Urtheil heraus: dass Ihr Aufsatz über elliptische Transcendenten in *Grunert's* Archiv das Beste wäre, was er über denselben Gegenstand gelesen habe. Potz Donnerwetter! wie zuckte das mir durch die Glieder. Nun hatten auch die beiden Andern grosses Interesse und drängten, *Sturm* solle die Abhandlung übersetzen; endlich wollte *Bertrand* sie von einem seiner Schüler übersetzen lassen und *Sturm* sollte ein Paar Vorworte machen; doch jener ist *Franzose* und dieser ist leider gestorben. Als ich von Ihren andern Arbeiten (Wiener Abhandlungen) sprach, musste ich — zu Ihrem grossen Leid! — auch Ihre *unmenschliche* Seite berühren, zur Erklärung, warum Sie noch keine Exemplare geschickt haben und meine Befehle fruchtlos blieben. Da baten mich *Sturm* und *Bertrand*, die Deutsch lesen, Sie nochmals zu *puffen*, was sogleich (folgenden Tags) ich zu thun versprach; aber es gelang mir nicht, — auch entmuthigte mich die wahrscheinliche Erfolglosigkeit. Hätte ich Macht über den Ziegel, so würde ich jetzt noch donnernd befehlen sogleich Exemplare zu schicken und zwar an: 1) die Akademie, 2) *Poncelet*, 3) *Lamé*, 4) *Liouville*, 5) *Chasles*, 6) *Bienaymé*, 7) *Binet*, 8) *Hermite*, 9) *Bertrand*, 10) *Serret*, 11) Dr. *Wertheim*, 12) Abbé *Moigno*, 13) Dr. *Wöpcke* (arabisch drauf), 14) *Terquem* (ein Wort hebräisch drauf), und Andere.

Wenn dieser Befehl binnen 8 Tagen nicht ausgeführt wird, so hol Sie . . . .

«Auf ein Exemplar setzen Sie:

A l'Académie des Sciences

hommage de l'auteur.

«oder: hommage de la part de l'auteur

«auf die andern:

A Monsieur N.

Hommage de la part de l'auteur.

«Alle Exemplare in ein Packet und darauf die Adresse

A Monsieur

Monsieur le Président

de l'Académie des Sciences Impériale

à Paris.

«und das Paket der Gesandtschaft übergeben in der Kramgasse N. 48 (?) «höflich ersucht um Beförderung. So mache ich es hier, warum sollt's «in Bern nicht auch gehen? zum Donnstig! Den meisten habe ich «von Ihnen gesprochen und Exemplare versprochen — wird mich der «Ziegel zum Lügner machen?! Erst vor 4 Wochen erhielt Prof. «*Schönemann* endlich ein Exemplar, er freute sich dennoch und dankt.

«Leider sah ich *Liouville* nicht; aber ich habe *Vielen so* ein- «dringlich ans Herz gelegt, mit ihm Ihretwegen zu sprechen, dass «es geholfen hat; im einen Heft (glaube November) beginnt Ihr Auf- «satz und im folgenden ist er beendet.

«[N. B. zu Oben. Wenn Sie etwa ein kleines Sätzchen «für *Liouville* oder *Terquem* bereit haben, so können Sie «es in dessen Exemplare hineilegen und mit dünnem «Faden zubinden (auch so g'macht); an *Terquem* (-Türk- «heim) können sie Deutsch schreiben, von mir sprechen, «und wenn Sie irgend ein Wort hebräisch beisetzen, werden «Sie feurige Kohlen auf seinem Haupte sammeln.]»

«Meine vorjährige Verwendung bei *Reimer* zu Gunsten Ihrer «hiesigen Abhandlung blieb deshalb erfolglos, weil *Crelle* bereits mehr «als 2 Bände zum Voraus hatte drucken lassen; so sagte mir *Reimer*, «als ich nach meiner Rückkunft mich flugs danach erkundigte. Bei «diesem Anlass verlangte *Reimer* von mir Rath über einen neuen Re- «dacteur; ich schlug ihm vor und leitete es ein, so dass Dr. *Borchardt* «es wurde; als Unterstützer werden auch *Steiner*, *Schellbach*, *Kummer* «und *Kronecker* genannt. Die noch vorräthigen, dem alten Redacteur «eingesandten Abhandlungen wurden meist den Autoren zurückgeschickt;

»bei der Ihrigen protestirte ich, ob ich sie aber durchbringen werde,
»weiss ich noch nicht; Anstand ist: weil Sie etwas von 22 Bogen
»darauf schrieben, wovor man Respect hat, siehe Exempel an *Oettinger*
»und *Gudermann*. *Borchardt* schlug vor, Ihnen einen Verleger zu suchen,
»er wolle helfen; aber die Zeitumstände für solche Werke sind ungünstig;
»ich ging desshalb bereits 2 mal zu *Reimer*, aber traf ihn nicht.
»Sollte sich ein Verleger finden, so wären Sie wohl auch bereit, das
»Werk zu ergänzen (den *Liouville*'schen Brocken einzuverleiben)
»und geeignet zu redigiren. Geben Sie darüber Antwort. Ob ich
»etwas Honorar erpressen kann, ist zweifelhaft. Findet sich kein Ver-
»leger, so *zwenge* ich es durch fürs Journal. —

»Im 4ten Heft des 50sten Bandes wird Signore durch *Cayley*
»verherrlicht.

»*21. April.* In Paris wollte ich Mr *Terquem* mit Ihrem mira-
»ckelösen Satz über die Fusspunktenlinie G beim Dreieck beglücken,
»aber ich konnte damit nicht zu Rechte kommen. Hier zurückge-
»kehrt sollte es mein erstes Geschäft sein, allein die Verwickelung
»ward immer grösser, ich gerieth immer tiefer hinein, endlich fing
»es an zu tagen, alles Wunderbare verschwand, so dass zuletzt am
»7. Januar ein gerade nöthiger Klassen-Vortrag daraus werden konnte,
»wie Sie aus dem Monatsbericht wohl schon ersehen haben. Als ich
»am 31. Januar einen Plenum-Vortrag halten musste und nichts wusste,
»nahm ich etwas von der f^3, was zu meinem Erstaunen bei Freund
»und Feind, bei Geweihten und Laien Furore machte. Den ersten
»Vortrag wollte ich mit den zahlreichen Nebensätzchen ausarbeiten
»(im Monatsbericht ist das Naivste verheimlicht) und in die Denk-
»schriften der Akademie geben, allein bis jetzt kam ich noch nicht
»dazu, — immer einschlafen oder alberne Phantastereien. Ebenso
»sollte aus einigen lumpigen Sätzchen (wovon ein Theil bereits
»*Terquem* übergeben ward) eine Abhandlung werden, freiwillig in der
»Akademie vorzutragen, aber auch damit kam ich nicht zu Stande,
»gerieth tiefer hinein und stiess auf Schwierigkeiten, die nur Der,
»welcher niemals schwach werden wollte, überwinden wird, und dem
»ich sie unten mittheile. An die allgemeinen Flächen bin ich noch
»nicht wieder rangekommen, seitdem meine schönen Hoffnungen in
»Bern an der Knechtsgestalt zerschellten.

»Da ich geistig immer tiefer sinke, und da man mich da oben,
»wo Muckerei und »*Umkehr der Wissenschaft*« auf der Fahne steht,
»ganz *verworfen*, auf meine vorjährige Eingabe um gebührende Stel-

«lung mich keiner Antwort gewürdigt hat, und in 22 Jahren mir keine «Beförderung angedeihen liess, was, wie vor Jahren Staatsrath r. «*Hermann* in München sagte: «nur zu Preussens nicht zu meiner «Schande gereiche, denn ich habe ja eine geometrische Welt ge«schaffen», so reifte mein Vorsatz, das letzte Mittel zur Herausgabe «meiner Productionen zu benutzen, nämlich mit fremden Kälbern zu «pflügen. Zu diesem Behuf bin ich am 1ten April um einen zwei«jährigen Urlaub eingekommen, motivirt: «durch Annahme der mir «angebotenen Hülfe treuer Schüler, Prof. *Schläfli* in Bern und Dr. «*Sidler* in Zürich, so wie meines Freundes, General *Poncelet* in Paris, «zur Veröffentlichung meiner Forschungen im Gebiete der Geometrie.» «Als ich 3 Wochen zuvor mein Vorhaben dem Geh. Rath *Sch.* «mündlich erzählte, da erinnerte sich der Kerl sogleich, dass ich ihm «vor Jahren Ihretwegen Anträge gemacht habe, obschon er damals «nicht darauf zu hören schien. Nehmen Sie's nicht übel, dass ich Sie «als Schüler nannte, Sie haben es mir ja selbst eingeredet. Sollten «nunmehr weder Sie noch *Sidler* geneigt sein, sich mit mir zu be«fassen, so schadet es meiner Berufung auf euch doch nichts, ich «wende mich dann an Andere, in Pforzheim, Ludwigsburg, etc., oder «gehe nach Paris und mache da, so viel ich vermag. Nach 2 Jahren: «Verlängerung des Urlaubs; wird gewährt, damit ich hier nicht überall «klage und resonnire und zwar mit gutem Grund. Kontrast mit «Ihrer Weise.

«Mein heimlicher Glauben, mit den Flächen einen Preis von «3000 Fr. zu gewinnen und mit Signore zu theilen, war irrig. Es «bleibt nur die Hoffnung auf das Honorar. Bereits sind mir 2 Fried«rich-d'or ($= 41\frac{1}{2}$ Fr.) per Bogen geboten. Etwa 10—12 Bogen «kanns werden.

«Das Beste wird sein, dass ich den *Helfer* adoptire, oder ihm «eine lebenslängliche Rente aussetze, d. h, die Zinsen eines unver«äusserlichen Kapitals, wofür er noch nach meinem Tode fort redigirt «und wenn er stirbt, das Kapital entweder einem meiner Verwandten «zufällt, oder die Zinsen alljährlich für wissenschaftliche Leistungen «oder für andere nützliche Erfindungen als Preis ertheilt werden. «Denn dass ich das durch grosse Sparsamkeit mühsam Erworbene «alles ungeschlachten Verwandten soll zukommen lassen, ist *nicht «möglich, absolut unmöglich, das thue ich nicht.* Bloss einige Schwester«kinder in Koppigen sollen den gebührenden Antheil erhalten. Jene

hwester, welche Sie in Utzenstorf sahen, ist am 2ten Februar in rchberg gestorben, und dabei sind Unbilligkeiten vorgefallen, die ich aufs Aeusserste empört haben. Genug mein Entschluss, den ı ohne diess schon lange hegte, steht fest: einem Theil meines rmögens eine ewig fortdauernde wissenschaftliche Bestimmung zu ben.

«Da Sie in eigenen Angelegenheiten so verschlossenen Charak- rs sind, so werden Sie vor der Hand auch Niemand von meinem laub, etc. sprechen.

«*(22. April.)* Nun sollen Sie auch etwas für den Rüssel haben, nn derselbe noch bei Kräften ist. Ich hatte diesen Winter einige le so eine einzelne Aufgabe; wo dieselben sind, und was ich jetzt fgable, weiss ich nicht. Auf die Ordnung kommt's nicht an, daher ll ich blindlings beginnen.

«Ein Mr. Terquem übergebenes Sätzli heisst:

«Haben drei begrenzte Gerade $a\alpha$, $b\beta$, $c\gamma$, in einer Ebene, den- lben Punkt m zur Mitte, so sind sie Durchmesser eines bestimm- n Kegelschnitts m^2, und so schneiden sich sowohl die vier Kreise c, $a\beta\gamma$, $b a\gamma$, $c\alpha\beta$ in einem Punkte d, als auch die 4 Kreise $\alpha\beta\gamma$, c, βac, γab in einem Punkte δ, und es ist $d\delta$ ein vierter Durch- esser des Kegelschnitts m^2.» (Beweis: elementar.)

«Daraus werden durch «*Spinnen und Drehen auf dem Absatz*» ne Reihe Folgerungen gezogen. Z. B. fixirt man die Kreise abc d $\alpha\beta\gamma$ und lässt sodann die Durchmesser $b\beta$ und $c\gamma$ dem festen ∞ nahe rücken, so wird der erste Kreis der Krümmungskreis in und ist sehr einfach und elegant durch den zweiten bestimmt. ne weitere Folge ist: «Dass wenn m insbesondere der Schwer- nkt des Dreiecks abc und somit m^2 nothwendig Ellipse ist, als- nn die drei Krümmungskreise in a, b, c durch einen und denselben nkt d in m^2 gehen, und abcd in einem Kreise liegen.» Und umge- hrt: «Durch jeden Punkt d der Ellipse gehen 3 Krümmungskreise d ihre Osculationspunkte a, b, c sind die Ecken eines eingeschrie- nen Dreiecks von grösstem Inhalte und liegen mit d in einem reise.»

«Dies findet alles *wörtlich gleich* beim sphärischen Kegelschnitt tt (Schnitt der Kugel mit einem concentrischen Kegel 2ten Grads).

«Nun aber beginnt mein Jammer. Auf der Kugel ist der Satz *härisch polarisirbar*, wobei Kreis in Kreis übergeht, so dass ein uer Satz über das dem sphärischen Kegelschnitt umschriebene *Drei-*

»*seit* vom *kleinsten Umfang* entsteht. Danach fühlte ich, dass auch »beim *ebenen* Kegelschnitt m^2 entsprechende Sätze stattfinden müssen, »wenn auch nicht *polare* so doch *duale*, und zwar in folgender dop»pelter Gestalt.

»I. Sind in 1 Ebene drei Paar ⫤⫦ Gerade $a\alpha$, $b\beta$, $c\gamma$ von einem »Punkte m gleich weit abstehend (jedes Paar für sich), so berühren »sie einen Kegelschnitt m^2. Dem Dreiseit abc lassen sich 4 Kreise K »einschreiben; ebenso den Dreiseiten $a\beta\gamma$, $b\alpha\gamma$. $c\alpha\beta$ je 4 Kreise K_1, »K_2, K_3. Von diesen Kreisen müssen nun 4 Mal 4, je von jeder Gruppe »einer, eine gemeinschaftliche Tangente d haben, welche zugleich auch »den Kegelschnitt m^2 berührt. Oder: Jeder der 4 Kreise K muss mit »*einem bestimmten* der 4 Kreise K_1 eine gemeinschaftliche Tangente »d haben, welche auch m^2 berührt (und zwar sind a und d conjugirte »gemeinsame Tangenten der Kreise K und K_1, d. h. entweder beide »*äussere* oder beide *innere*).

»II. Werden drei beliebige Winkel $a\alpha$, $b\beta$, $c\gamma$, in 1 Ebene, von »derselben Geraden m gehälftet, so sind sie einem bestimmten Kegel»schnitt m^2 umschrieben, welcher m zur Axe hat. Die den 4 Drei»seiten abc, $a\beta\gamma$, $b\alpha\gamma$, $c\alpha\beta$ eingeschriebenen Kreise haben die vorige »Eigenschaft, nämlich zu vier 4 gl=4d, welche auch m^2 berühren. »— Die den 4 Dreiseiseiten $\alpha\beta\gamma$, αbc, βac, γab entsprechenden 4 δ »schneiden ihre correspondirenden 4 d auf der Axe m, und diese häl»tet die Winkel $d\delta$.

»Lässt man nun, bei I. oder II., die Geraden b und c der festen a »unendlich nahe rücken, so gehen von den 4 Kreisen K zwei in einen »Punkt über, der dritte wird ∞, und der 4te wird Schmiegungskreis »im Berührungspunkt a_o der a, und hat mit m^2 noch die Tangente d »gemein. Und daher weiter: Ist dem m^2 ein Dreiseit abc von klein»stem Umfang umschrieben, so haben die drei Krümmungskreise in »den drei Berührungspunkten a_o, b_o, c_o mit m^2 dieselbe Tangente d »gemein; und umgekehrt: Jede Tangente d des Kegelschnitts m^2 wird »von irgend drei Krümmungskreisen desselben berührt, und die den »Osculationspunkten a_o, b_o, c_o zugehörigen Tangenten a, b, c bilden ein »umschriebenes Dreieck von kleinstem Umfang, dessen innerer Kreis »(derjenige von den 4 K, der innerhalb des Dreiseits liegt) auch die »d berührt; die drei äussern Kreise berühren m^2 (sowie die Seiten) »gerade in den Punkten a_o, b_o, c_o. (Siehe Ende meiner Abhandlung »Elementare Lösung einer geometrischen Aufgabe« in Crelles Journal »1847.) Wohlan! setzen Sie an, und entscheiden Sie bald, was daran

»wahr oder falsch ist, damit ich den Aufsatz beenden kann. — Es »muss gewiss auch projektivisch gehen, wenn ich Kraft hätte. — Beim »sphärischen Kegelschnitt ist alles analog.

»Das Bestreben, etwas Analoges bei der allgemeinen f^2 zu finden, »führte auf einen schönen Satz, den ich Ihnen nicht vorenthalten »darf, obschon Sie ihn v. J. selbst auffinden sollten, aber den Dienst, »als nicht amtlich, verweigerten. Er offenbart eine neue Eigenschaft »eines speziellen G (f^2). Ich leite wie folgt ein.

»Gegeben eine f^2. Bewegt sich Pol P in einer Geraden G, so »dreht sich seine Polarebene um eine andere Gerade H, und umge»kehrt. Ich nenne G und H *reciproke Gerade* in Bezug auf f^2.

»*Zieht man in f^2 irgend drei Sehnen $a\alpha$, $b\beta$, $c\gamma$, welche ein »Paar reziprocke Zwecke G, H schneiden, so gehen die vier Ebenen »abc, $\alpha\beta\gamma$, $ba\gamma$, $ca\beta$ durch einen Punkte d, sowie die 4 Ebenen $\alpha\beta\gamma$. »abc, βac, γab durch einen Punkt δ, beide Punkte liegen in der Fläche »f^2 und die Sehne $d\delta$ schneidet G und H.*“ Die Endpunkte jeder »Sehne und ihre Schnitte mit G, H sind harmonisch. *Die Schnitt»linie, etwa L, je zweier Gegenebenen abc und $\alpha\beta\gamma$, $a\beta\gamma$ und abc, etc. »schneidet ebenfalls beide Gerade G, H.* (Welche Beziehung haben »diese 4 L zu jenen 4 Sehnen $a\alpha$, $b\beta$, $c\gamma$, $d\delta$? folgen diese rück»wärts aus jenen?).

»Auf dem Absatz gedreht, scheint mir zu folgen:

»Alle f^2, welche durch die 6 Endpunkte $abc\alpha\beta\gamma$ gehen und »G, H zu reziprocken Geraden haben, gehen auch durch die beiden »Schnittpunkte d und δ der zweimal 4 Ebenen und bilden ein G(f^2), »dessen Kerncurve R^6 aus G, H und dem 4 L besteht.«

»Sind G, H und etwa die 3 Endpunkte a, b, c beliebig gegeben, »so sind α, β, γ, als vierte harmonische Punkte, bestimmt; also wird »im Grunde nur verlangt: die f^2 soll durch drei gegebene Punkte »a, b, c gehen und die gegebenen G, H zu reziproken Geraden »haben; folglich zählt ein gegebenes Paar G und H für 4 Beding»ungen, für 4 Punkte.

»Schneiden zwei Gerade G, H irgend 4 begrenzte Gerade $a\alpha$, »$b\beta$, $c\gamma$, $e\varepsilon$ harmonisch, so sind letztere gemeinsame Sehnen eines »B(f^2), von dessen Grundcurve R^4 unendlich viele Punktenpaare d, δ »leicht zu construiren sind; nämlich je drei der 4 Sehnen geben »mittels der durch ihre Endpunkte gelegten 2 mal 4 Ebenen ein »solches Paar, oder eine neue Sehne $d\delta$; und sodann bestimmen »diese 4 neuen Sehnen, unter sich (?) und mit den gegebenen zu je

«drei verbunden, wiederum andere neue Sehnen, u. s. w. in infinitum. «Alle sind Sehnen der R^4 und werden von G, H harmonisch ge- «schnitten; aber sie liegen nicht in einem Hyperboloid, sondern in «(?) in f^4; denn eine freie Gerade J bestimmt mit G und H ein Hy- «perboloid J^2, das die R^4 in 8 Punkten, und zwar in 4 Paaren d, δ «schneidet, so dass also J von 4 Sehnen d δ getroffen wird, und folg- «lich der Ort der letztern $= f^4$ ist.

«Sei gegeben $B(f^2)$. In beliebigem Punkte g der R^4 sei G die «Tangente; durch G alle Ebenen E, jede E schneidet die R^4 in zwei «Punkten h und h_1; die Schaar Geraden $hh_1 = H$ liegen in einem «Hyperboloid H^2, und G gehört zu dessen andern Schaar, und H^2 ist «Glied des $B(f^2)$. Kommt der Punkt h_1 in g zu liegen, so berührt «hier E das Hyperboloid H^2 und osculirt die R^4, und der in E durch «h gehende und die G in g berührende Kreis ist Krümmungskreis «der R^4, très beau! auch schneidet dabei die E den $B(f^2)$ in einem «$B(C^2)$, die durch Punkt h gehen und sich im Punkt g osculiren, «jenen Krümmungskreis gemein haben. — Ist alles richtig?

«*23. April.* Gegeben $B(C^n)$. Aus Pol P Normalen auf alle C^n, «so ist der Ort der Fusspunkte Q eine Q^{2n}, welche durch P, durch «die n^2 Grundpunkte p, und durch die $3(n-1)^2$ Doppelpunkte d des «$B(C^n)$ geht. In jedem Q an die zugehörige C^n die Tangente t, deren «Ort $= t^x$. Dieses x hat mich genarrt; für Determinanten wird es «nicht witzig sein. x ist die Zahl der t, welche durch irgend einen «Punkt A gehen; nun schneidet der Kreis über Durchmesser AP die «Q^{2n} (ausser in P noch) in $4n-1$ Punkten Q, deren zugehörige t «durch A gehen, also sollte $x = 4n-1$ sein. Dagegen ist die Pam- «polare von A in Bezug auf $B(C^n)$ eine Curve Q^{2n-1}, die vom ge- «nannten Kreise, ausser in A, nur in $4n-3$ Punkten Q geschnitten «wird, deren zugehörigen Normalen durch P gehen, so dass $x = 4n-3$ «sein muss. Dies folgt auch daraus, dass die $2n \times (2n-1)$ Schnitte «der Curven Q^{2n} und Q^{2n-1} aus den n^2p, $3(n-1)^2$ d und $(4n-3)$ «Q bestehen. Jene zwei falschen Punkte, welche der Kreis mit Q^{2n} «gemein haben soll, sind wohl die Donnstigs zwei Kreispunkte auf «G_∞! he? Dabei ist noch Eins. Ist P_1 ein anderer Pol und Q_1^{2n} «seine Pamfusspunkten-Curve, so bestehen die $2n \times 2n$ Schnitte der «Q^{2n} und $Q_1{}^{2n}$ aus den $n^2p + 3(n-1)^2 d + 2(n-1) Q_1$, diese Q_1 in «der Geraden PP_1, es fehlen also noch $4n-2$ Punkte Q, oder wenn

»man die zwei Kreispunkte auf G_∞ annimmt, so fehlen noch 4 (n—1) »Punkte Q. Diese weiss ich nur so zu deuten: *Die G_∞ wird von »2 (n—1) Gliedern C^n des $B(C^n)$ berührt, durch die Berührungspunkte »gehen nothwendig Q^{2n} und Q_1^{2n}, aber sie müssen sich in derselben be»rühren, so dass sie 2 (n—1) Asymptoten gemein haben, was die »4 (n—1) Q ausmacht.*" *He?* Die analogen Betrachtungen bei Flächen, »bei B (f^n) und G (f^n).

»Kann es zwei solche Kegelschnitte geben, wovon jeder durch »ein Triangel conjugirte Punkte (x, y, z) des andern geht? — Des»gleichen bei den Flächen f^2 rücksichtlich der Quadrupel; hier wird »es gehen, aber wie weit kann man die Forderung steigern?

»An Ihre *Menschlichkeit* möchte ich schliesslich noch die Bitte »wagen: zuerst jene leichten Dinge zu beantworten, die ich zu meinem »Aufsatze gebrauche, und die Andern nachher zu verzehren.

»Es grüsst Sie und die Andern (Leuenberger u. Frau).

Ihr dankbarer *J. Steiner.*«

»Wär's nicht möglich, dass Signore die Antwort mir flugs selbst »überbrächte? Kaum 150 Fr. Kosten; dafür Verleger, Honorar, Ge»lehrte aller Art, Bibliothek; *A. Braun*[1]), so gutmüthig wie Sie, würde »sich freuen, ihm viel erzählt, auch *Klotsch*. Kommen Sie, lassen Sie »die $1\frac{1}{2}$ Zuhörer!«

Steiner an Schläfli.[2])

Berlin, 17. Mai 1856.

»*Lieber Freund!*

»Am 23. vorigen Monats trug ich einen Brief an Sie nach dem »Anhaltischen Bahnhof, derselbe erzählte Ihnen von Paris, von meinem »Vegetiren und meinen Endzwecken, enthielt mehrere Sätze und Auf»gaben, so wie auch eine wesentliche Frage über Ihre hiesige Ab»handlung und deren Fortsetzung. Das Ausbleiben Ihrer Antwort ver»ursacht mir viel Kopfbrechen und setzt mich in *mehrfache* Verlegen»heit. Denn letzthin besuchte mich *Reimer* (als ich ihn zum 3ten Mal »nicht traf) und erklärte sich bereit, Ihre Arbeit ins Journal aufzu»nehmen und zugleich, als Buch, 200 Extraabzüge zu veranstalten; auch »liess er sich zu einem kleinen Honorar bewegen, bot 4 Thaler; als

[1]) Direktor des botanischen Gartens in Berlin.

[2]) Ein Concept vorhanden.

«ich sagte, das wäre nur 15 Fr., er solle auf 20 Fr. steigen, lächelte «er und meinte, es käme nicht wieder ein. *Borchardt* ist aber noch «nicht so wohl geneigt, hinter meinem Rücken eher entgegen. Nun «kann ich es aber nicht durchzwengen, bevor ich Ihren Willen kenne. «Kurz ich stecke drinn — weiss nicht, was machen. Dass mein «Brief verloren gegangen, ist unwahrscheinlich. Dass Sie todtkrank, «ebenso; dass Knechtsarbeit eine Antwort unmöglich macht, eben- «so; dass meine Aufgaben unlösbar, ebenso, zudem brauchen sie nicht «absolut gelöst zu werden; dass Sie böse sind, ebenso, denn ich «wüsste nicht wesshalb, auch wäre es kleinlich, unmännlich mir nicht «— wenn auch derb — die Gründe anzugeben. Was daher auch ob- «walten mag, so sind Sie so gut, mich mit umgehender Post aus dieser «peinlichen Ungewissheit zu erlösen. Bisdahin enthalte ich mich jeder «weitern Frage über Dinge, die ich beschliessen muss, z. B. über die «Denkschriften der Akademie und andern Bücher, ob ich sie ver- «kaufen oder mitschleppen soll, etc.; eben so der Sätze und Aufgaben.

«Mit Spannung einer Antwort entgegensehend grüsst Sie «herzlich Ihr dankbarer

J. Steiner.

«NB. *Reimer* war bereit ein Werk von mir über «Algeb. «Curven und Flächen» 20 – 30 Bogen zu verlegen. Auch lehnte er «nicht ab, denselben Gegenstand von Ihnen analytisch behandelt, oder «eine Analytische Geometrie später noch folgen zu lassen, als ich ihm «versicherte, dass dieselbe reicher und besser sein würde, als alle «bisherigen.»

Schläfli an Steiner.

Bern, den 19. Mai 1856.

«*Lieber Freund!*

«Der längere Aufschub meiner Antwort rührt davon her, dass «ich mich vorbereitete, um ausführlicher auf Ihren letzten Brief zu «antworten. Mit Ihrem ersten Vortrag in der Akademie ist es sonderbar «zugegangen. Sie haben die Hypocycloide mit den drei Rückkehr- «punkten zu betrachten fortgefahren und daran Dinge entdeckt, die ich «nicht ahnte. Und gleich nach Ihrer Abreise habe ich mich auf das «gleichseitige, der gleichseitigen Hypocycloide eingeschriebene, Dreieck «geworfen, und da ebenfalls artige Dinge gefunden, wie unter anderm «eine Umhüllte, die ihre eigene Polare ist (in Bezug auf einen Kegel-

»schnitt). Auf Ihre Fragen kann ich jetzt noch nicht antworten, ich »habe die Zeit gebraucht um die Hypocycloide zu verdauen. In Ihrer »Abhandlung steckt ein Rechnungsfehler. Das Curvendreieck ist *doppelt* »so gross als der eingeschriebene Kreis. Die Rectification ist richtig.

»Sie erwähnen mit keiner Silbe, ob Herr *Crelle* noch unter den »Lebenden weilt. Was meine Abhandlung über n-Dimensionen betrifft, »so bin ich mit 15 Fr. zufrieden; und wenn an dieser Bedingung der »Abdruck scheitern sollte, so abstrahire ich von derselben und ver»lange nur, dass sie nach vielen Jahren endlich einmal veröffentlicht »werde. Die Fortsetzung ist längst geschrieben; ich könnte zwar »manches jetzt anders redigiren; doch ist dieses nicht von grossem »Belang. Es ist durchaus keine Gefahr, dass es damit wie bei *Oettinger* »und *Gudermann* gehe; ich bin nicht so weitschweifig.

»Ich werde fortan die Zeit zu mathematischer Thätigkeit nur »noch stehlen müssen. Denn einmal habe ich für drei Halbjahre den »Unterricht in der reinen Mathematik am hiesigen Vorbereitungscurs »auf das Polytechnikum übernommen, sodann die Liquidation der 18 »Versicherungsgesellschaften, mit der Verbindlichkeit, ungefähr in einem »Monat, je eine Gesellschaft zu spediren. Das letzte ist freilich eine »beschwerliche Last, wird mich aber ein für allemal ökonomisch sicher »stellen.

»Von *Liouville* habe ich nie eine Antwort erhalten, und ver»wunderte mich auch darüber, dass Sie mir nicht von Paris aus »schrieben. Die Abhandlung, die *Liouville* aufgenommen hat, ist ans »Ende des Bandes gerathen, so dass ich nicht ein Druckfehlerverzeichniss »einsenden kann, und doch ist gleich auf der ersten Seite ein sinn»störender Druckfehler und nachher kommen noch mehr. Wie ich »jetzt die Abhandlung ansehe, reut es mich, dass ich keine Beweise »dazu gegeben habe.

»In aller Eile schliessend grüsst Sie herzlich

»Ihr dankbarer Schüler

»Nachmittags 4 Uhr. *L. Schläfli.*«

— ... —

Von diesem Zeitpunkte an stockt der Briefwechsel, denn *Schläfli* war über *Steiner* sehr ungehalten und die beiden Freunde überwarfen sich, nicht, dass es *Schläfli* äusserlich zeigte, aber er beschränkte den Verkehr mit *Steiner* auf das Nothwendigste, besonders

auch dann als *Steiner* ganz sich zurückgezogen hatte und von seiner Pension in Bern oder Utzenstorf lebte. Das Zerwürfniss kam hauptsächlich zum Ausbruch bei Anlass der Abhandlung *Steiners* «Ueber eine besondere Curve 3ter Classe und 4ten Grades» gelesen in der K. Akademie der Wissenschaften zu Berlin am 7. Januar 1856. (Vergl. den Brief vom 20. April an *Schläfli*.) Die Abhandlung ist in den Monatsberichten der K. Akademie und im *Crelle*'schen Journal, Band LIII (auch Ges. Werke, Werk II p. 640—47) abgedruckt.

Wie aus dem Briefwechsel sich ergiebt, hat *Steiner* das genannte Problem *Schläfli* vorgelegt und letzterem auch eine Reihe der interessantesten Sätze über die fragliche Umhüllungscurve mitgetheilt.

Die Entdeckung aber, dass die Curve eine *Hypocycloide* sei, schrieb *Schläfli* sich selber zu. *Steiner* aber hat in der ganzen Abhandlung den Namen «Hypocycloide» nirgends ausgesprochen, *Schläfli's* erst gegen Schluss der Abhandlung bei Anlass einer andern Ergänzung der Curve genannt (Ges. Werke II. p. 646, Zeile 9 von unten), und dann bloss beigefügt: «Die Curve wird ferner auch durch rollende Bewegung erzeugt.»

Nach einer Photographie im Besitze von Prof. Baltzer, aufgenommen von H. Völlger.

Lichtdruck von Brunner & Hauser

NEUERE UND ÄLTERE MURGÄNGE DES LAMMBACHES

vom Durre her aufgenommen.

H. von Steiger.

Die Ausbrüche des Lammbaches.

Am 26. Mai ds. Js. in den ersten Nachmittagsstunden hörten Bewohner von Schwanden bei Brienz ein fernes Donnern in nördlicher oder nordöstlicher Richtung, ohne jedoch demselben anfänglich irgend welche Bedeutung beizumessen. Erst als im Laufe des Nachmittags die Lamm einige Zeit ausblieb, wurde der Grund des, anfänglich für ein Gewitter gehaltenen, Donnerns erkannt und auch bald darauf die Absturzstelle und Sturzmasse im Lammbachgraben am *Rufisatz*, in der Höhe von Untergummen gefunden. Noch glaubten die Leute in Schwanden fast allgemein, es berge diese abgestürzte Masse keine Gefahr; sie würde nach und nach durch die Lamm dem See zugeführt, meinten die Einen, sie bleibe oben liegen und verfestige sich, glaubten die Andern, bis sie am Sonntag den 31. Mai um 3 Uhr 40 Min. Morgens durch dumpfes Donnern und Rauschen aus dem Schlafe geweckt wurden; es war dies der erste sogenannte «trockene Stoss» des Lammbachausbruches, vom Mai 1896, der sich auf der nordwestlichen Seite des grossen, zwischen Oberschwanden—Hofstetten—Kienholz am Fusse des Rothhorn gelegenen Schuttkegels gegen den letztgenannten Ort heranwälzte, viele Jucharten nutzbaren Landes für Jahrzehnte der Kultur entreissend, mehrere Familien zwingend, ihre Wohnungen zu verlassen.

Die Gesammtlänge dieses Schlammstromes vom Brienzer-See bis an den Fuss der abgestürzten Masse mag ungefähr 3½ km messen, die Breite, am unteren Ende des Ablagerungsgebietes, auf der Strasse

bei Kienholz circa 120 m, weiter oben natürlich weit weniger. Die Mächtigkeit dieser Schuttmasse, auf genannter Strasse 2,5—3 m, nimmt nach oben, mit Abnahme der Breite zu, bei Unterschwanden beträgt sie circa 4 m.

Es ist dieser einer der unzähligen Schuttströme, die im Laufe der Zeit, zwischen Hofstetten—Kienholz oder gar Schwanden hin und her pendelnd, den grossen, zwischen den genannten Orten liegenden Schuttkegel[1]) gebildet haben; speziell bewegte er sich zum grösseren Theile auf dem südöstlichen Arme des Stromes von 1894, zum Theile rechts davon, weiter unten zu beiden Seiten der Schwandenbachschale, diese selbst vollständig zudeckend. Er ändert, wider Erwarten, zweimal seine Richtung: nach dem Austritt aus dem Tobel biegt er plötzlich von Süden nach West-Süd-West um und nach circa 800 m nach Süd-West, um nach 1200 m die Bahn und den See zu erreichen.

Im Gegensatz zu anderen Schlammströmen führte dieser letzte Ausbruch wenig Schlamm, auch wenig grosse Blöcke, weniger als frühere Ausbrüche, dagegen auffallend gleichmässiges Material an faust- bis kopfgrossen Trümmern, die ziemlich gleichförmig die ganze Breite des Stromes zusammensetzen, in seinem unteren Drittel mehrere primäre Längswülste bildend.

Von Radial- oder Randspalten war nichts bemerkbar, auch nicht 14 Tage nach dem Ereigniss.

Das Schuttmaterial besteht aus scharfkantigen, rhomboëdrischen bis würfelförmigen, aus den Berriasschiefern und Kieselkalken des Neocom herrührenden Trümmern, die wirr durcheinander liegen, ohne eine Spur von Regelmässigkeit in der Stellung zu zeigen, wie sie hin und wieder bei solchen Schuttströmen wahrgenommen wird, ähnlich der Geschiebestellung in Kiesbänken der Flüsse. Auf diesen Trümmern lagen zum Theil mächtige Stämme, die aber, ihrem Aussehen nach zu schliessen, schon sehr lange Zeit im Schutt des Grabens gelegen haben müssen; grünes Holz führte der Strom nicht.

Die Geschwindigkeit, mit der diese Masse sich vorwärts bewegte, war sehr verschieden. Rückte das untere Ende nur äusserst langsam gegen Kienholz vor, so dass die Bauern das Gras vorweg mähen konnten und die im Stromweg stehenden Bäume stehen blieben, so

---

[1]) Derselbe, sowie überhaupt das nördlich davon gelegene Abrissgebiet, soll Gegenstand einer späteren Arbeit sein.

R
A
B
S
S
B
S
B

habe ich um 6½ Uhr Morgens zwischen Unter- und Oberschwanden,[1]) also noch immer auf der flacheren Strecke, ein Fortschreiten von 24 m in der Minute gemessen, bei einer Breite der Flussmasse von 10—11 m; die abgelagerte Masse mochte hier 50 m breit und 4 m mächtig sein. Bei Oberschwanden, bei einer Breite der beweglichen Masse von 7—8 m, eine Geschwindigkeit von 36 m per Minute; hier hatte der Schlammstrom sein Bett schon erheblich errodirt. Gleich unterhalb des Austrittes aus dem Tobel 2 m per Secunde; hier hatte, es mochte 9 Uhr Morgens sein, der Strom sein Bett schon bis auf den festen Fels, 3 m tief, ausgezogen, nachdem er zuerst, bald nach Beginn der Bewegung, 5,5 m über das Bett der Lamm hinaufgereicht; also ein Sinken der Oberfläche um 8—9 m in 5 Stunden. Die fliessende Masse mochte hier 6 m breit sein. Auch zeitlich war die Geschwindigkeit an gleichen Orten verschieden (abgesehen von den steten momentanen Schwankungen in Geschwindigkeit und Niveau), indem bis 7½ Uhr der Strom steiniger, weniger flüssig war.

Die Bewegung selbst war analog derjenigen in Flüssen: Grösste Geschwindigkeit mit dem gröberen Material in der Mitte, Abnahme der Geschwindigkeit und feineres Material gegen die Ränder hin.

All' dieser Schutt stammt nur zum Theil aus der abgestürzten Masse, zum grösseren Theile ist es im Graben der Lamm liegendes, meistens von den Seiten abgestürztes Material, das hier stellenweise eine Mächtigkeit von 60′ hat und mit dem Fortschreiten des Einschneidens in die Schutthalden durch das Nachstürzen der Steilränder dem Strome immer neue Nahrung lieferte.

Es mochte 1 Uhr Mittag sein, als der Strom zum Stehen kam.

Die Sturzmasse hat sich oberhalb der »*Blauen Egg*« von der linken Seite des Baches, vom sogenannten *Rufisatz* (Fig. 1) abgelöst. Nach der Schilderung von *Andreas Mäder* von Unter-Schwanden, bildete sie eine mit Rasen und Tannen besetzte schmale Terrasse mit steilem, »aber nicht gerade felsigem« Abfall gegen den Lammbach. Vor Wasseraustritt aus diesem Terrassenabfall hat *A. M.* nie etwas bemerkt. Schon seit 15—20 Jahren soll unmittelbar oberhalb dieser Terrasse ein Anriss sichtbar gewesen sein, ein Absitzen von circa 4′,

---

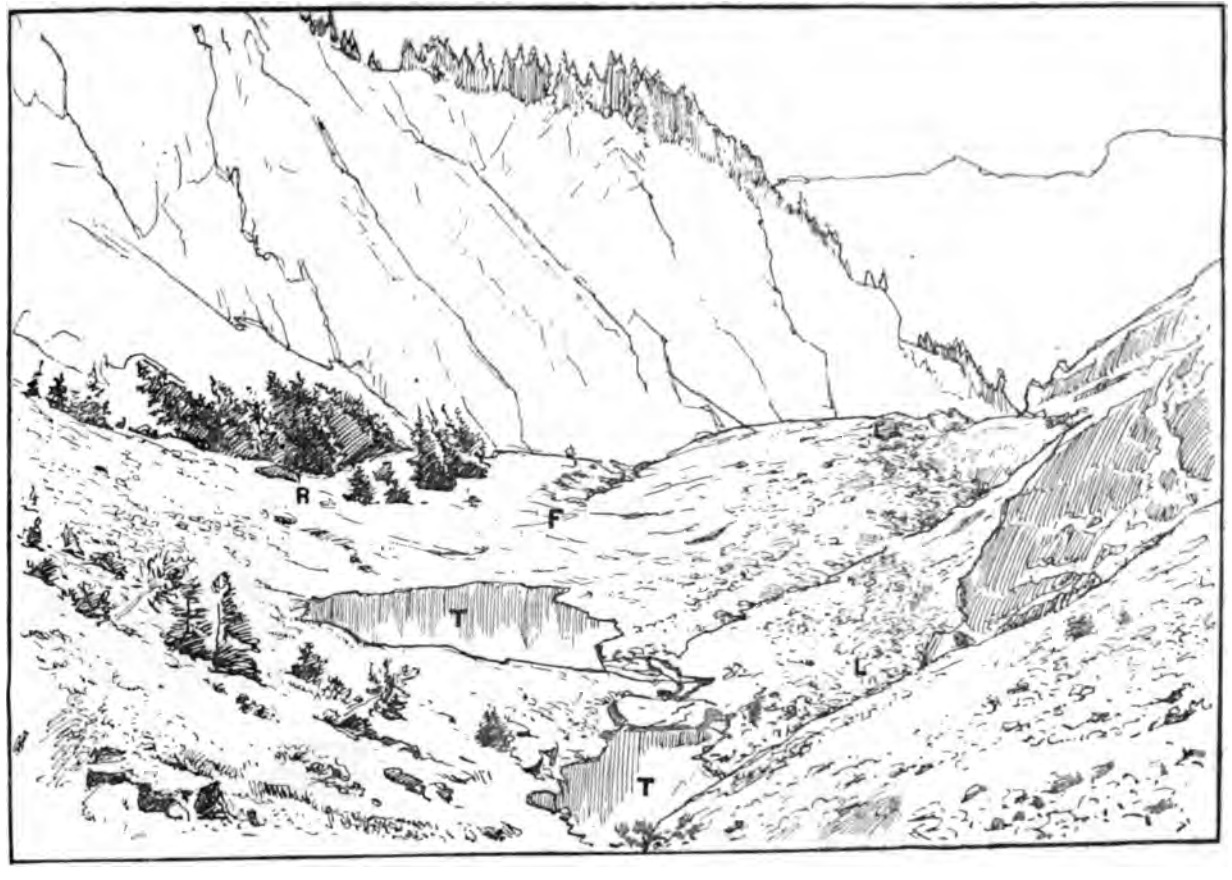
[1]) Auf den älteren Karten 1/50,000 sind die Namen: »Alt- und Neuschwanden« verwechselt. In dortiger Gegend sind neben Alt- und Neuschwanden auch die Namen Unter- und Oberschwanden gebräuchlich.

doch war noch im vorigen Herbste keine Veränderung desselben bemerkbar. Der Lammbach selbst zeigte an dieser Stelle ein Ausweichen nach dem rechtseitigen Grabenrande, verbunden mit einer Gefällsverminderung.

Bei meiner Ankunft war der Raum von der Abrissstelle bis zum untern Ende der Rippe des «*Blaue Egg*», circa 290 m lang und 150 m breit, durch die Sturzmasse vollständig ausgefüllt. Offenbar durch genannte Rippe in ihrer Lage gehalten, konnte nur Material von dem dieselbe allerdings um 100′ überhöhenden Theile der Masse abstürzen. Dieses Retentionsbecken zeigt die Form eines spitzwinkligen sphärischen Dreiecks, dessen lange Seiten von der linken Grabenwand und dem *Blauen Egg*, die kurze von dem hinteren Rande der Sturzmasse, also der Breite des Grabens gebildet wird, und dessen Spitze beim unteren Ende des «*Blauen Egg*» liegt.

Der obere Theil dieser Masse bildet einen mächtigen, bergwärts flach abfallenden Wall, ungefähr in der Mitte von einer Furche durchzogen, entstanden durch das Durchsickern des zu einem Teiche gestauten Wassers des Lamm- und Feitschgrabens. (Fig. 2).

Der am Fusse der Abrissstelle gelegene Theil bildet eine Scholle mit noch fast zusammenhängender Rasendecke und dem Waldbestand; sie zeigt noch den Charakter ihrer ersten Lage. Die Stellung der Tannen allerdings ist eine verschiedene, nicht mehr die ursprüngliche: Im obern Theile wirr durcheinander, im mittleren etwas rückwärts liegend, im untern vorwärtsliegend oder überhängend. Das in dieser Scholle liegende Gestein macht in einzelnen Theilen den Eindruck von Anstehendem, ist äusserst splittrig, schieferig, rautenförmig gebrochen; durchwegs scharfkantig zeigt es doch keine neuen Bruchflächen, sondern überall den Charakter der Verwitterung. Im Ganzen flach gegen die Furche abfallend ist diese Scholle wieder in kleinere Schollen zerlegt mit Steilabfall gegen die Abrissstelle. Von der Mitte gegen die rechte Grabenseite hin steigt die Masse um 10—15 m an, verliert die Rasendecke und geht in nackten Schutt über, untermischt mit grossen Lehmblöcken, aber nur wenigen grossen Felsblöcken. Nahe der rechten Grabenseite wird die Sturzmasse der Länge nach und parallel der Grabenseite von einem Bande oder Walle grosser blauer thoniger oder lehmiger Blöcke durchzogen (Fig. 2), die deutliche Gleit- oder Quetschflächen zeigen und von kleinen und kleinsten scharfkantigen Gesteinstrümmern erfüllt sind. Auch in diesem Theile nahm ich keine Blöcke mit frischen Bruchflächen wahr, dagegen einige von ausgeprägt linsenartiger Form mit auffallenden Gleitflächen.


R
F
T
L
T

Nach dem vorderen Rande hin, also über dem »Blauen Egg« ist ein Theil der Masse halbkreisförmig oder dreieckig ausgebrochen, wie an den Spuren an den Platten der rechten Grabenseite noch deutlich zu sehen war. Die Oberfläche dieses Ausbruches, 80 m lang und fast ebenso breit, ist ein wenig nach vorwärts geneigt, hat in ihrer rechten Hälfte stark gefurchtes, in der linken dagegen gestrichenes und gepresstes Ansehen.

Die Abrissfläche selbst fällt mit 49° gegen S. W. (circa), misst an der Basis ungefär 210 m und hat eine Höhe von 140 m. Sie hat in ihrem oberen Theile ungemein erdigen Charakter mit eingelagerten grösseren und kleineren Felstrümmern; im unteren Ende, bachabwärts wird eine schwache, 30° S. fallende Schichtung auf kurze Strecke sichtbar, die 14 Tage nach dem Absturz auch links oben an der Abrissstelle sich vermuthen lässt, aber an beiden Orten einen schon gelockerten Eindruck macht. Der Fuss der Abrissfläche ist durch die Nachstürze und Schuttkegel verdeckt, der mittlere Theil des ununterbrochen fortdauernen Steinschlages wegen nicht untersuchbar, doch fand ich auch frisch gefallene Lehmblöcke von derselben breccienartigen Beschaffenheit, die ich beim Lehmwall auf der gegenüberliegenden Seite beobachtet habe; sie hatten sich von einer, wie mir schien durch die ganze Abrissfläche sich hinziehenden, theils durch Schutt verdeckten Einlagerung losgelöst, über welcher an mehreren Stellen in der Abrisswand Wasser austritt, hier sickernd, dort rieselnd oder gar fliessend; am Tage nach dem Absturz soll der Wasseraustritt stärker gewesen sein.

Ob auch der Fuss der Abrissfläche von derselben Einlagerung gebildet wird, konnte nicht festgestellt werden, da er durch Schutt der Nachstürze verdeckt ist.

Der Charakter der abgestürzten Masse, die lehmige, brecciöse Einlagerung lassen mich annehmen, dass man es mit dem Absturze eines alten Schuttkegels, oder allgemeiner, einer Schuttmasse zu thun hat, über deren Herkunft ich noch nicht ganz sicher bin. Dem allgemeinen Charakter der Abrissstelle nach zu schliessen, vermuthe ich, diese abgestürzte, oben genannte Terrasse habe sich schon in früheren Zeiten einmal gesetzt und durch ihr Absitzen Theile des Anstehenden zum Nachsinken gebracht, die dann die Decke der Terrasse bildeten und nun als »Rasenscholle« am Fuss der Abrissfläche liegen.

Die, die fast senkrechten, 300 m hohen, stellenweise am oberen Rande nur 400 m von einander abstehenden Grabenwände bildenden

Neocomkalke fallen am unteren Ende des Tobels mit circa 25° gegen O. 15° N, in der Nähe der Abrissstelle 30° S. O. (könnte auch Schieferung sein, während Fallen 15° N. sein könnte), doch ändert sich die Lagerung sowohl im Fallen als im Streichen sehr rasch, an vielen Stellen scharfe Windungen und Knickungen zeigend. Die blättrige Schichtung und die fast senkrecht darauf stehende enge Klüftung des Gesteins machen dasselbe sehr bröckelig, verwitterbar und zum Abstürzen geneigt. Ob nicht schon unterhalb der von *Kaufmann* erwähnten Stelle die Berriasschiefer im Graben anstehen, wird eine spätere Prüfung der Localität zeigen.

Eine Begehung des Weges von Gummenalp nach Giebeleggalp im Oktober 1895 lässt mich vermuthen, dass der Rufisatz, von welchem die Masse sich abgelöst, ein früher schon einmal zum Abritzen gelangter Komplex ist. Diese Absitzung lässt sich vom linken Grabenrande in der Höhe der Gummenalp in nördlicher und nordwestlicher Richtung, den Weg nach der Giebeleggalp durchsetzend, nach dem Feitschgraben verfolgen.

Am Rufisatz, oberhalb der Abrissfläche, zeigen sich zwei neue Risse. Der obere zieht sich in N. W. Richtung, Feitsch- und Lammgraben durchsetzend, dann dem «Band» entlang, fast ununterbrochen bis nahe an den Grat und biegt dann nach Süden um; er lässt sich bis etwa 100 m oberhalb der Irtschelenhütten verfolgen. Ein Transversalriss zweigt oberhalb des «Bandes» vom Hauptriss ab und zieht sich in allgemein S. W. Richtung ebenfalls bis nahe an die Hütten von Irtschelen; auf dieser Seite war ein Zusammenhang beider Risse nicht zu finden.

Mehrere kleinere Spalten zeigen sich südlich und östlich der Irtschelenhütten.

Ob all diese neuen Risse sich schon vor dem Absturz vom 31. Mai oder unmittelbar nachher gebildet haben, lässt sich nicht feststellen, da diese Alpen in dieser Jahreszeit noch nicht bewohnt und auch nicht begangen waren; sicher ist, dass sie im Spätherbst 1895 noch nicht sichtbar waren.

Der Lammbach erhält sein Wasser nur zum geringeren Theil aus dem obern Lamm- und dem Feitschgraben, da diese bei trockener Jahreszeit trocken sind, zum grössten Theile von einer Quelle, die ungefähr 100 m oberhalb der «*Blauen Egg*» im Graben austritt, nun aber durch die Sturzmasse zugedeckt ist. Diese Quelle liefert Sommer und Winter Wasser genug, um eine kleine Säge zu treiben.

Der im Oktober 1895 ziemlich reichlich gefallene und wieder geschmolzene Schnee, der milde aber nasse Winter 95/96, der gewaltige Schneefall im Frühjahr und der anhaltende Regen im Mai, mögen wohl die letzte, unmittelbare Ursache für den Absturz gewesen sein, indem sie einerseits die Rutschmasse vollständig durchfeuchtet und dadurch deren Gewicht bedeutend erhöht, andererseits durch die angegebenen Risse und Klüftungen die unteren, früher erwähnten thonigen Schichten dermassen aufgeweicht haben, dass sie den Druck nicht mehr aushalten konnten und zum Ausgleiten gebracht wurden. Es war aber kein Stürzen, sondern ein Abritzen (längs einer Kluftfläche oder einer Anrissfläche), die unteren Partien wurden hinaus und an die gegenüberliegende Grabenwand hinaufgequetscht, von wo sie wieder zurückbrandeten; ihr frühere Lagerstätte wird nun von der Decke eingenommen. Diese Bewegung war aber nicht eine einseitige, nicht nur ein Absitzen, sondern auch Abwärtsgleiten nach dem unteren Ende des «*Blauen Egg*» hin.

Das Wasser eines Teiches, am 31. Mai noch circa 45 m lang und 35 m breit, etwa 2 m tief, veranlasst durch die durch den Sturz gestauten Bäche des Lamm- und Feitschgrabens, sowie die obenerwähnte Quelle vermochten nun das schon durchfeuchtete und gelockerte Schuttmaterial der Sturzmasse bis Sonntag früh so aufzuweichen, dass es sich in seiner Lage nicht mehr halten konnte und ausbrach.

Der Druck der so plötzlich ausgebrochenen Masse auf das unter dem Blauen Egg im Bachbett liegende, von schlammigem Wasser durchtränkte alte Schuttmaterial war gross genug, dasselbe in Bewegung zu bringen und abwärts zu schieben.[1])

Ungefähr 800 m. westlich vom Lammbach fliesst der Schwandenbach, mit seinen Sammelbächen gegen die Schwanderfluh, Rothhorn und Giebeleggalp hinaufreichend. Er hat, wie auch der Glyssenbach, beim Aufführen des zwischen Hofstetten und Tracht liegenden Schuttkegels erheblich beigetragen. Der Ausbruch aller 3 Bäche von 1797 veranlasste sogar theilweise Räumung und Auskauf von Unterschwanden und Verlegung dieser Häuser nach Oberschwanden. Er durchschneidet die kieseligen Kalke und Berriaschiefer des Neocom, stürzt in 2 Sprüngen über den Malm hinunter, in demselben prächtige Nischen bildend und verlässt die Schlucht durch das Retentionsbecken unterhalb der sogenannten *Brüche*.

[1]) In der Nacht vom 11./12. Juni, ungefähr 2½ Uhr Morgens, erfolgte ein neuer Ausbruch, der seinen Weg über den Strom vom 31. Mai nahm, aber 3—400 m oberhalb Kienholz zum Stehen kam.

Den geologischen Bau zeigt am besten die Schwanderfluh. Zu unterst, bei Schwanden, das schöne, mit dem Südschenkel unter den Schuttkegel des Schwandenbaches untertauchende Malmgewölbe, die nördlich davon gelegene Mulde (tectonische), ausgefüllt durch die scheinbar discordant aufgelagerten Berriaschiefer, diese wiederum von den concordant aufgelagerten kieseligen Kalken des Nercom bedeckt. Die Berriaschiefer und kieseligen Kalke zeigen starke Fältelung und Stauchungen, welche die scheinbare Discordanz ihrer Lagerung bewirken, und auf intensive Faltung und Pressung schliessen lassen.

Die oben genannten «Brüche» liegen am Austritt des Schwandenbaches und sind ebenfalls ein nach Süden sich öffnendes, in nördlicher und östlicher Richtung immer weiter greifendes Absturz- oder Abbruchgebiet. Die westliche Seite wird von dem circa 10° N. N. O. fallenden Malm und den noch gerade hineinragenden Berrriaschiefern gebildet, die Nord- und Ostseite von Berriasschiefern. Während der Malm früher das Retentationsbecken nördlich abschloss, ist er heute durch die von den Brüchen abgestürzten oder abgestossenen Schuttmassen bedeckt und tritt nur zeitweise an einigen Stellen zu Tage.

Diese *Brüche* lieferten das Material für die Ausbrüche des Schwandenbaches, deren Geschichte kurz folgende:

Nach den Abstürzen und Ausbrüchen von 1797 und 1840 bildete sich in den 40er Jahren oberhalb Aegerti ein noch stets sich vergrössernder Riss; um die Jahre 1855—60 versiegte unterhalb dieses Risses auf Aegerti eine Quelle; neuer Ausbruch 1860; 1868, im Juni, löste sich bei normaler Witterung von der Ostseite der Brüche ein Stück ab und gelangte als «trockene Schlammlaui» bis 50 à 100 m. unterhalb des Weges Unterschwanden-Oberschwanden, also ungefähr 700 m. weit. Nach Annahme des eidgenössischen Forstgesetzes 1876 beabsichtigte man die Aufforstung und Bepflanzung der Rutschhalden; es wurde ein 1878 ausgearbeiteter Plan bei Kanton und Bund eingereicht, worauf letzterer vor Anpflanzung die Festlegung der Schutthalden durch Thalsperren unten verlangte; 1881 wurde ein Verbauungsplan gemacht und die Kosten auf 80—84,000 Fr. devisirt. Die interessirten Gemeinden und Besitzer konnten sich nicht zu der sie betreffenden Ausgabe entschliessen und liessen die Sache ruhen, es wurde weder verbaut noch angepflanzt. 1887 wurde dann durch den Hauptsturz vom Brunni her die 1874 3 m. hoch aufgeführte und 1875 auf 6 m. erhöhte Thalsperre am unteren Ende des Retentionsbeckens

va 9 m. hoch überführt. Dieser Absturz war bedeutend lehmhaltiger der von 1867 und erfolgte Ende Oktober, der Ausbruch am 5. vember, ohne dass der vorhergehende Sommer nass gewesen wäre.

Der in diesem Retentionsbecken liegende, hauptsächlich vom ırz von 1887 herrührende Schutt ruht auf einer mit 15° gegen ien abfallenden, wahrscheinlich einem alten, nach und nach abge- ırten Schuttkegel angehörenden Fläche und ist am oberen Ende —15 m. mächtig. Er besteht aus grössern und kleinern, in blauem er braunem Lehm oder auch nackt liegenden, scharfkantigen Fels- mmern, aus Lehmblöcken, als solche transportirt und in der Grösse 2—3 m^3, die ebenfalls scharfkantige Trümmer einschliessen, und denjenigen der Sturzmasse beim Rufisatz übereinstimmen könnten.

Die «Brüche» selbst werden vom Schwandenbach nicht direkt be- ırt, sondern nur von einem «stets kleinen Wässerlein», dem Brüche- hli, einem Sickerwasser, *nahe dem Westrande* durchzogen.

Während der Westrand der Abbruchstelle durch den festen Kalk Malm gebildet wird, sind die den Nord- und Ostrand bildenden riasschiefer, wie im Lammbach, dünnschichtig, schieferig und kurz- ftig und desshalb äusserst bröckelig. Stellenweise sind die von Hand- ausbrechbaren Stücke mergelig, zeigen zuweilen deutliche Gleit- hen oder liegen in bis zu Sandkorngrösse zerkleinertem und nders gegen das Brüchibächli hin aufgeweichtem Gesteinsmaterial.

Hier wie beim Lammbach drängt sich bei Betrachtung des Ge- ns die Frage auf: Hat man es mit einem festliegenden, vollständig klüfteten, nach und nach abbröckelnden Abschnitt zu thun, oder einem in sich zertrümmerten, infolge dieser Zertrümmerung, zu hlicher Wasseraufnahme und deren Folgen in Bewegung gerathen- und zum Ausgleiten oder Abstürzen geneigten Complexe, und l desshalb weitere Ausbrüche und Abstürze zu befürchten?

Im kurzen Zeitraum von 100 Jahren sind, nur um die wichtig- ı zu nennen, folgende Murgänge zu verzeichnen:[1])

1797 Ausbruch des Lamm-, Schwanden- und Glyssenbaches.
1860 " " Schwandenbaches.
1867 " " Schwandenbaches.
1874 " " Lammbaches.
1887 " " Schwanden- und Lammbaches.
1894 " " Lammbaches.
1896 " " Lammbaches.

[1]) 1499 wurde Kienholz verschüttet.

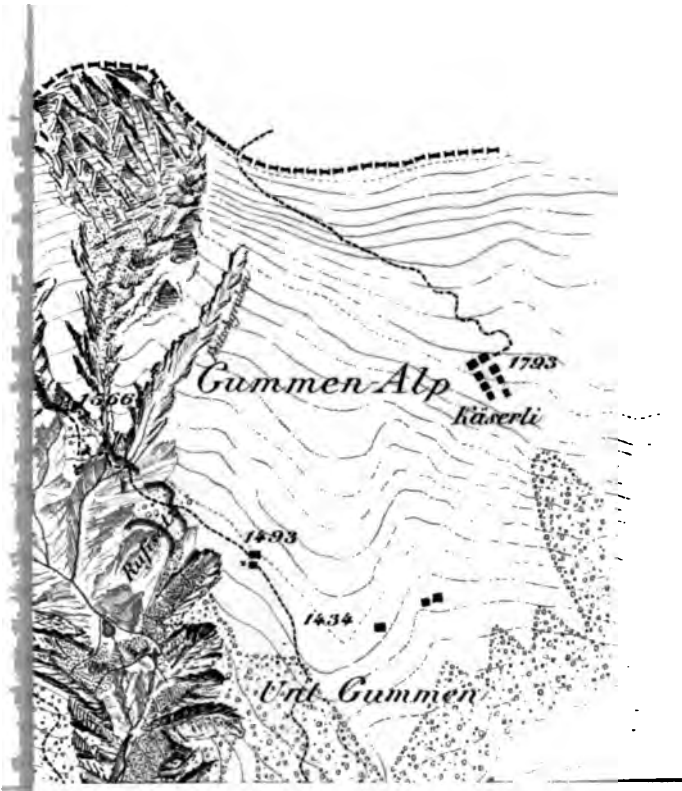
Schon diese kurze Spanne Zeit und die aufmerksame Besichtigung dieser Schuttkegel zeigen, dass letztere in der Hauptsache nicht die Folge einer einmaligen Katastrophe sind, sondern die Arbeit zahlreicher, im Laufe der Zeiten niedergegangenen Murgänge.

Die Gründe für diese Annahme, der Charakter des ganzen Gebietes mit den vielen ältern, neuern und neuesten Absitzungen, die grosse Neigung zu, weiter unten zu besprechenden, Rissbildungen, der besonders oberhalb des Anrissgebietes spärliche, Regen und Schmelzwasser frei circuliren lassende Waldbestand, die moorige Beschaffenheit einiger, gerade im Rissgebiete liegender Terrassen und Mulden, besonders aber das in Frage kommende, im Streichen und Fallen so gequälte und zertrümmerte Gestein, die stellenweise mergelige und durch Einfiltrirung von Wasser lehmige Beschaffenheit desselben, weisen darauf hin, dass diese Bewegungen ihren Abschluss noch nicht gefunden haben, dass noch weitere Murgänge oder Abstürze zu erwarten sind.

Bei Begehung, im Oktober 1895, des, nach Berücksichtigung der Verhältnisse gefährdetsten, nämlich des zwischen Schwandenbach und Lammgraben gelegenen Gebietes, konstatirte ich oberhalb und unterhalb *Aegerti Durre* mehrere vielleicht 20 m. breite, bis 1 m. hohe, aber verwachsene Absitzungen gegen den Lammgraben, parallel demselben, die sich stellenweise zu noch klaffenden Spalten erweitern.

In der Höhe von *Aegerti Durre* zieht sich die sogenannte *Aegertispalte*, ein Anriss vom Lammgraben nach dem Schwandenbach. Von dessen oberer Ecke, etwa 50 m. östlich des Stalles von *Melchior Schilt*, zieht sich der Riss in ost-südöstlicher Richtung, oben genannte verwachsene Längsabsitzungen quer durchsetzend, bis an den Lammgraben, ferner in west-nordwestlicher Richtung gegen Aegerti und den Schwandenbach. Der verticale Betrag des Absitzens mag beim Stall von Melchior Schilt 10′, gegen das westliche Ende hin 1—2′, zwischen beiden Orten stellenweise 6′ betragen. Seit Oktober vorigen Jahres hat sich dieser Riss verlängert und auch der Betrag der Absitzung hat um etwas zugenommen. Eine im Oktober 1895 noch ordentlich fliessende Quelle lieferte am 31. Mai 1896 kein Wasser, Mitte Juni nur spärlich.

Diese Risse und Spalten wiederholen sich gegen den Nord- und Nordost-Rand der Brüche hin und zwar sowohl in west-südwestlicher Richtung gegen den Schwandenbach, als auch in südlicher längs des Lammgrabens hin mit Absitzen gegen die Brüche.


Gummen-Alp
1793
Käserli
1566
1493
1434
Vrt. Gummen

Auch zeitlich mehren sich diese Risse. So bildet sich seit circa Jahren ein Riss von Aegerti Durre gegen den Ostrand der Brüche , ohne ihn noch zu erreichen; ebendaselbst habe ich Mitte Juni en frischen solchen mit Richtung circa Süd und oberhalb Brunni en solchen mit Richtung Süd-Südwest gefunden, beide im Oktober 5 noch nicht sichtbar.

Unmittelbar oberhalb des Nordrandes der Brüche zeigen sich 4 h sich folgende Absitzungen von verschiedener Länge und circa 4' Verticalbewegung.

Alle diese Risse sind untrügliche Zeichen einer fortdauernden egung des besprochenen Gebietes.

Ob Schwanden und Kienholz von einem Absturz vom *Durre* her dlich bedroht sind, hängt von der Raschheit und Energie der ltenbildung zwischen Lamm- und Schwandenbach ab. Entweder eitet das successive Abschuppen, Abstürzen gegen die Brüche hin her vorwärts als die Bildung und Erweiterung der Spalten, dann die Gefahr eines Absturzes vom Durre her vermindert; oder aber Spaltenbildung schreitet rascher vor als die Abschuppung gegen Brüche hin und dann wird eine Katastrophe nicht ausbleiben.

Ist Hilfe möglich, so kann sie nur im Festlegen der Masse des issgebietes liegen und zwar durch Fassen und Ableiten aller Quel- und scharfe Ueberwachung dieser Leitungen, Trockenlegen der rigen Stellen, Verhindern des übermässigen Eindringens von Re- - und Schmelzwasser durch Aufforstung im und oberhalb des Riss- ietes, Ableiten dieser Regen- und Schmelzwasser aus den Mulden, . derjenigen hinter Brunni, und endlich durch Verbauung.

«Dass der Sturz einmal kommen muss, wissen wir, aber wann er men wird, das wissen wir nicht» erklärten mir Leute von Schwan- ganz bestimmt und ruhig, leben aber ebenso ruhig, trotzdem sie Gefahr erkannt, auf ihrer Scholle weiter.

Th. Studer.

Pleistocaene Knochenreste aus einer palæolithischen Station in den Steinbrüchen von Veyrier am Salève.

Vor einiger Zeit erhielt ich durch Herrn *J. Reber* in Genf, welcher sich durch Erforschung prähistorischer Stationen schon so grosse Verdienste um die Urgeschichte erworben hat, eine Reihe von Knochenresten aus Ablagerungen der palæolithischen Station bei Veyrier am Salève. Die Station von Veyrier wurde schon im Jahre 1834 durch *Taillefer* aufgedeckt. Sie wurde 1868 und 1869 in der Revue Savoisienne von *Thioly* [1]), 1868 von *A. Favre* [2]) in den Archives des Sciences de la Bibliothèque universelle beschrieben. Im VI. Band, Heft I. 1872 des Archivs für Anthropologie gab dann *Rütimeyer* [3]) eine Beschreibung der dort gefundenen Thierreste und knüpfte daran Bemerkungen über Thierverbreitung im Allgemeinen und über das muthmassliche Alter der Station, das er in Parallele mit demjenigen der postglacialen belgischen Höhlen aus der Rennthierperiode [4]) stellt. *Rütimeyer* konnte nach den erhaltenen Knochenfragmenten folgende Thiere konstatiren: Pferd, Rind (nach Beschaffenheit der Knochen wahrscheinlich einer jüngeren Zeit angehörend), Hirsch, eine grosse Form, grösser als der heutige Edelhirsch und die grössten Individuen der Pfahlbauten, Rennthier, Steinbock, Gemse, Schwein (wahrscheinlich aus späterer Zeit), Alpenhase, Kaninchen, Murmelthier, Feldmaus (*Arvicola amphibius*), Biber, Bär, Dachs, Luchs, Hauskatze (aus späterer Zeit), Marder (ebenso), Iltis (ebenso), Wolf, Fuchs, Schneehuhn, Birkhuhn, Storch, Stockente, Singdrossel (wahrscheinlich jüngeren Ur-

sprungs), Haushuhn, Frosch oder Kröte. Am häufigsten sind vertreten das Rennthier und Schneehuhn, dann Pferd, Hirsch, Steinbock, in dritter Linie Alpenhase und Murmelthier; die übrigen Arten haben nur vereinzelte Knochen geliefert.

Das Auffallendste war, dass sich hier neben den Resten unserer bekannten Alpenthiere noch zahlreich die Ueberbleibsel des unserer Fauna ganz fremd gewordenen Rennthiers und des Wildpferdes vorfanden.

Eine Parallele zu diesen Funden bot die Grotte du Scé etwa 50 Meter oberhalb Villeneuve, wo *H. de Saussure* [5]) neben menschlichen Ueberresten aus der palæolithischen Zeit Thierknochen entdeckte, die nach den Bestimmungen *Rütimeyer's* dem Rennthier, Steinbock, Bären, Fuchs, Alpenhasen, Steinadler und Alpenschneehuhn angehörten. Auch hier waren Rennthierknochen am häufigsten, dann Steinbock, in dritter Linie Alpenhase und Schneehuhn.

Die mir vorliegenden Knochenreste haben vollkommen das Aussehen und die Beschaffenheit derjenigen aus anderen palæolithischen Stationen, z. B. vom Schweizersbild und von Thayngen. Sie sind von hellgelber Farbe, hart und spröde und kleben an der Zunge, ein Zeichen von starkem Verlust an Leimsubstanz. Diejenigen der grösseren Thiere, besonders des Rennthieres, sind stark zerschlagen, zu Längssplittern zertrümmert; bei kleineren Thieren sind die langen Knochen ganz erhalten, ein Beweis, dass der Hund nicht an den Mahlzeiten des Menschen partizipirte.

Folgende Thiere liessen sich nachweisen:

Vulpes vulgaris Gray. Fuchs.

Das Unterkieferfragment mit Reisszahn von einem alten, sehr kräftigen Thier und ein vollständiger Humerus

Meles taxus L. Dachs.

Untere Humerushälfte und Kiefergelenk.

Rangifer tarandus (L.) Rennthier.

Die Geweihstange eines jungen Thieres, Backzähne, Phalangen, Scapula und zahlreiche längsgespaltene Theile langer Knochen, unter denen die für die Art charakteristischen metatarsalia leicht zu unterscheiden sind.

Capra ibex L. Steinbock.

Ein Unterkieferbackzahn und ein Metacarpus.

Rupicapra tragus Gray. Gemse.

Backzähne und der Radius eines jungen Thieres.

Equus caballus L. *Pferd.*

Zwei Backzähne des Oberkiefers, ein Unterkieferfragment mit Pm. 3, einige Skelettknochen. Die Stücke deuten auf ein Thier von den Dimensionen des Pferdes aus der Rennthierstation von Schweizersbild.

Arctomys marmotta L. Murmelthier.

Ein Unterkieferschneidezahn, noch von intensiv gelber Farbe.

Lepus timidus L. Hase.

Zwei Femora, ein Humerus, Tibia und Schädelknochen. Nach der Form des Hinterhauptes und besonders des Hinterhauptloches, das beim Alpenhasen breiter als hoch, beim Feldhasen höher als breit ist, scheinen die vorliegenden Knochen zum Feldhasen zu gehören, und zwar Stücke von grossen Dimensionen.

Lagopus alpinus Nilss. Schneehuhn.

Humerus.

Aquila? Eine Humerusdiaphyse von einem sehr grossen Vogel, von dem zu wenig erhalten ist, um die Art noch zu erkennen.

Wie man sieht, fügt dieses neue Material zu der von *Rütimeyer* gegebenen Liste nichts Neues hinzu, auch hier herrschen die Knochen vom Rennthier vor und aus ihrer Behandlung zu schliessen, scheint dieses Thier die Hauptnahrung des palæolithischen Menschen gebildet zu haben.

Nachdem wir noch andere Stationen der palæolithischen Zeit in der Schweiz kennen gelernt haben, kommt uns die am Salève und bei Villeneuve gefundene Thiergesellschaft nicht mehr so seltsam vor. In der That finden wir alle von Veyrier und von Villeneuve bekannten Arten unter den in der Höhle des Kesslerlochs bei Thayngen[6]) und unter dem Felsen des Schweizersbild bei Schaffhausen[7]) aufgefundenen Knochenresten wieder, nur in etwas anderen Verhältnissen. So ist z. B. der Steinbock unter den bei Schaffhausen gefundenen Thieren selten, während seine Reste bei Villeneuve fast so häufig wie die des Rennthiers vorkommen.

Trotz der Uebereinstimmung dieser Faunen, die sich unter analogen Umständen in Frankreich, Belgien und Süddeutschland wiederholen, glaube ich doch nicht, dass dieselben ein gleiches Alter beanspruchen können.

Machen wir uns zunächst die Verhältnisse klar, so können wir annehmen, dass durch das Vorrücken der Gletscher einestheils von

den Alpen im Süden aus, anderentheils vom Norden her die Thiere, soweit sie nicht den veränderten Verhältnissen zum Opfer fielen, nach den eisfreien Stellen zusammen getrieben wurden, wo sie nun untereinander vorkamen. Vom Norden kamen die Rennthiere, gefolgt vom Vielfrass, Moschusochsen, die Schneehasen, Murmelthiere, Lemminge, Schneehühner, vom Süden her Steinböcke und Gemsen.

Die Waldthiere, welche früher wohl die Wälder der Ebene bevölkert hatten, fanden noch Schutz in den kümmerlichen, übriggebliebenen Waldbeständen [8]). Dabei suchte jedes Thier diejenigen Verhältnisse auf, welchen es schon vorher angepasst war: das Rennthier, das Moorschneehuhn die Tundrengebiete, die sich vor den gewaltigen Fronten der Gletscher ausdehnten, das Murmelthier die Sand- und Geröllhalden der Morainen, Gemse und Steinbock die felsigen Gebiete; wo der Boden der Ebene trocken und steppenartig wurde, verbreiteten sich Herden von Wildpferden und Dsiggetais. Sowie nun die Gletscher zurückwichen, verschoben sich die Regionen. Aufspriessender Wald verdrängte die Tundren liebenden Thiere aus ihrem bevorzugten Gebiete, das noch immer der Gletscherfront folgend nach Süden und nach Norden auseinanderwich, ebenso wurden die Steppen- und Felsenthiere nach zwei Richtungen auseinandergedrängt, erstere wichen nach dem trockenen Osten aus, die andern einentheils nach dem Polarkreis, anderntheils nach den Alpenhöhen. Den Felsenthieren war der Weg nach den Alpen geradezu durch die Terrainverhältnisse vorgeschrieben, denn nach Norden verhinderten weite Tiefländer ein weiteres Vordringen. Der Prozess ging aber bei dem langsamen Rückzug der Gletscher, der immer wieder durch partielle Vorstösse unterbrochen wurde, äusserst langsam vor sich. Die Etappen der nach Süden wandernden Thiere können wir nach den in unseren Morainen und Kieslagern gemachten Funden verfolgen [9]). In dem verwaschenen Glacialkies von Rapperswyl im Kanton Bern fanden sich Reste des Pferdes, des Rennthieres und des wollhaarigen Rhinoceros, bei Langenthal Geweihstangen vom Rennthier. Reste von Murmelthieren lieferten eine grosse Zahl der Rückzugsmorainen unseres Landes. Bei Zollikofen lagen die Murmelthierreste in den Aussenseiten des Frontwalles einer Rhonegletschermoraine. Eine der letzten Etappen scheinen nun die Vorkommnisse bei Veyrier und bei Villeneuve darzustellen, wo der Rhonegletscher bereits tief in das obere Rhonethal sich zurückgezogen hatte.

Dem Rennthier und dem Pferde folgte aber auch der palæolithische Mensch, dessen wichtigstes Jagdobjekt diese Thiere waren. So kam auch dieser schliesslich in die höheren Alpenthäler.

Aus diesen Voraussetzungen können wir nun die Ungleichzeitigkeit der palæolithischen Stationen unseres Landes folgern.

Als der Mensch Rennthier und Pferd in der Gegend von Schaffhausen jagte, war wohl noch ein grosser Theil der Schweiz mit Eis bedeckt, so dass die Tundrengebiete vor den Gletscherfronten noch über Schaffhausen hinausragten. Die Gegend des Rhonethales und des Fusses vom Salève waren noch in Eis gehüllt. Erst als der Gletscher schon tief in das engere Rhonethal zurückgezogen war und der Genfersee wieder Wellen warf, konnten sich die nach den Alpen gedrängten Thiere dort ansiedeln und mit ihnen der sie verfolgende Mensch. Vielleicht waren schon neue Völkerzüge mit anderer Kultur in das bewaldete Tiefland eingezogen, als der palæolithische Mensch noch in den Alpen das Rennthier verfolgte. Die grossen mit dem Gletscher zurückgedrängten Thiere fanden aber in den Alpen ein immer mehr sich verkleinerndes Areal, das ihnen Nahrung bot; die Rennthiere konnten am Ende ihre bevorzugten Tundrengebiete erst oberhalb der Baumgrenze antreffen und so musste Nahrungsmangel und Inzucht unter den auf inselartige Gebiete beschränkten Herden bald die Art der Vernichtung preisgeben. So verschwindet das Rennthier schon in früher Zeit in den Alpen, nicht einmal mehr zur Zeit der Pfahlbauten finden wir seine Spur, was aber noch nicht beweist, dass es in den Alpen nicht mehr vorkam; denn Ueberreste von Alpenthieren sind in den Pfahlbauten der Ebene so selten, dass es sehr fraglich ist, ob die damaligen Bewohner ihr Jagdgebiet bis in die Alpen ausgedehnt haben.

Wilde Pferde z. B. scheinen nach dem Speisesegen des Klosters St. Gallen noch im 10. Jahrhundert im Alpengebiete vorgekommen zu sein. In der neolithischen, den Pfahlbauten der älteren Steinperiode synchronischen Schicht am Schweizersbild bei Schaffhausen sind Pferdereste noch häufig und trotzdem finden sich solche in den Pfahlbauten der Steinperiode nur ganz ausnahmsweise vor. Dieselben beschränken sich auf einen Metatarsus von Moosseedorf, einen Zahn von Wangen, ein Naviculare tarsi von Robbenhausen und einen Unterkiefer von Meilen, was neben den Zentnern von Knochenresten des Hirsches, Urstiers, Rehs etc., abgesehen von den Hausthierresten, einen verschwindenden Bruchtheil ausmacht. Ebenso gehören die Funde von Gems- und Steinbockresten zu den grössten Seltenheiten [10]).

Fassen wir also unsere Resultate zusammen, so können wir sagen: Die Polarthiere, welche zur Zeit der grössten Ausdehnung der Gletscher nach den Ebenen Mitteleuropas gedrängt wurden, zogen sich beim Rückzug derselben, diesen folgend, einentheils nach dem Polarkreis, anderntheils nach den höheren Alpen zurück, wo aber die grösseren, anspruchsvolleren Arten bald in Folge Beschränkung des Nahurngsgebietes und der Inzucht ausstarben.

Anmerkungen.

[1]) *Thioly.* L'époque du Renne au pied du Mont Salève. Revue Savoysienne 1868 und Documents sur les époques du Renne et de la Pierre polie dans les environs de Genève 1869.

[2]) *A. Favre.* Station de l'homme de l'age de la pierre. Archives des Sciences de la bibliothèque universelle 1868.

[3]) *Rütimeyer.* Ueber die Rennthier-Station von Veyrier am Salève. Archiv für Anthropologie. Bd. VI. Heft 1.

[4]) In den belgischen Höhlen der Rennthierperiode finden sich: Ziesel, Murmelthier, Biber, Alpenhase, Feldhase, Pfeifhase (Lagomys), Lemming, Höhlenlöwe Luchs, Wildkatze, Vielfrass, Iltis, Hermelin, Bär, Höhlenbär, Fuchs, Polarfuchs, Mammuth, Pferd, Rhinoceros, Ur, Wisent, Steinbock, Gemse, Saiga-Antilope, Wildschwein, Edelhirsch, Reh, Rennthier.

[5]) *H. de Saussure.* La Grotte du Scé près Villeneuve. Station suisse du Renne.

Archives des Sciences de la bibliothèque universelle 1870. Réimprimé sep. 1880. Genève.

[6]) *Merk.* Der Höhlenfund im Kesslerloch bei Thayngen. Zürich 1875. Bestimmung der Thierreste durch *Rütimeyer.*

Rütimeyer. Veränderungen der Thierwelt in der Schweiz, seit Anwesenheit des Menschen. Basel 1875.

[7]) a. *Nuesch.* Korrespondenzblatt der deutschen anthropologischen Gesellschaft 1892. Nr. 10. Bericht der XXIII. allgemeinen Versammlung in Ulm. Band XXXV. *Nuesch.* Das Schweizersbild, eine Niederlassung aus palæolithischer und neolithischer Zeit. *Zürich.*

b. *Nehring.* Die kleineren Wirbelthiere vom Schweizersbild bei Schaffhausen. Denkschriften der Schweizerischen Naturforschenden Gesellschaft. Band XXXV. 1895. Zürich.

c. *Studer Th.* Die Thierreste aus den pleistocænen Ablagerungen des Schweizersbild bei Schaffhausen. Denkschriften der Schweizerischen Naturforschenden Gesellschaft. Band XXXV. 1895. Zürich.

[8]) Während der præglacialen Zeit existiren bereits in Mitteleuropa Pferd, Wildschwein, Edelhirsch, Reh, Antilope sp., Bison, Urstier, Bos primigenius, Biber, Spitzmaus (Sorex vulgaris), Maulwurf (Talpa europæa), Wolf, Fuchs, neben zahlreichen ausgestorbenen Formen, so dass also die charakteristischen Bewohner Mitteleuropas schon vorhanden waren, als die Gletscherperiode eintrat.

Für die Ansicht, dass Gemse und Steinbock nicht polaren, sondern mitteleuropäischen Ursprungs sind, sprechen verschiedene Thatsachen. Für die Gemse die weite Verbreitung der Familie der Rupicaprinen auf den Gebirgen, welche einer gleichzeitigen Faltung in parallelen Breitenkreisen ihren Ursprung verdanken. Die Gemse, *Rupicapra*, bewohnt die Pyrenäen, die Alpen, den Balkan und den Kaukasus. *Nemorhœdus* den östlichen Himalaja bis China und Japan. Nach Süden verbreitet sich von dem Gebirgscentrum Asiens aus der Typus bis auf die malayische Halbinsel und Sumatra in *Nemorhœdus sumatrensis*, nach Norden bis Ost-Tibet in der eigenthümlichen Gattung *Budorcas* mit *B. taxicolor M. Edw.* Bis in die Felsengebirge Amerikas lassen sich noch Ausläufer der Familie verfolgen in der Rocky Mountain Goat, *Haploceros montanus*. Aus den polaren Regionen ist dagegen überhaupt keine Antilope bekannt. Antilopen lebten in Mitteleuropa zur miocæn, pliocæn und præglacialen Zeit, so Gazellen, *Gazella anglica*, und eine Antilopenart in der Præglacialzeit. Für die Familie der Ziegen *Caprinæ*, gilt dasselbe. Aechte Ziegen finden sich zuerst in den pliocænen Ablagerungen der Siwalikhügel Indiens. Steinböcke folgen in ihren Verbreitungsgebieten der Gemse, so *Capra pyrenaica* in den Pyrenäen, *Capra ibex* in den Alpen, im Kaukasus vertritt sie die sehr nahe stehende *Capra caucasica*, im Himalaja die *Capra sibirica*, die noch auf dem Altai verbreitet ist. Nach Süden reicht die Gattung bis in die abessinischen Hochländer in Afrika und in die Nilgherries in Indien. Aus den arktischen Ländern sind dagegen keine Ziegen bekannt.

Ueberhaupt dürften unter den für die Hochalpen charakteristischen Thieren diejenigen einen præglacialen und autochthonen Ursprung beanspruchen, welche in den arktischen Regionen keinen Vertreter besitzen, dafür in den parallel streichenden Gebirgen der alten Welt eine durchgehende Verbreitung haben, so unter den Säugethieren Gemse, Steinbock, unter den Vögeln Lämmergeier, *Gypœtus barbatus*, Alpensegler, *Gypselus melba*, Felsenschwalbe, *Hirundo rupestris*, Alpendohle und Alpenkrähe, *Pyrrhocorax alpinus* und *graculus*, Alpenmauerläufer, *Tichodroma muraria*, Alpenflühvogel, *Accentor alpinus*, Steindrossel, *Monticola saxatilis L.*, Blaudrossel, *M. cyanea*, Schneefink, *Montifringilla nivalis*, Steinhuhn und Rothhuhn, *Perdix saxatilis* und *rubra*. Unter den Reptilien die Viper, *Vipera aspis* und die Mauereidechse *Podarcis muralis*, während als Einwanderer aus den Polarregionen zu betrachten wären, von Säugethieren: *Vesperugo nilssoni*, Murmelthier? *Arctomys marmotta*, Schneemaus *Arvicola nivalis*, Alpenhase *Lepus variabilis*. Von Vögeln: Blaufalke *Hypotriorchis aesalon*, Rauhfussbussard *Archibuteo lagopus*, Rauhfusskauz *Nyctale Tengmalmi*, Sperlingseule *Athene passerina*, Nusshäher *Nucifraga caryocatactes*, dreizehiger Specht *Picoides tridactylus*, Polarmeise *Parus borealis*, Wachholderdrossel *Turdus pilaris*, Leinfink *Linaria alnorum*, Föhren- und Fichtenkreuzschnabel *Loxia pityopsittacus* und *curvirostra*, Urhahn *Tetras urogallus*, Birkhahn *T. tetrix*, Schneehuhn *Lagopus alpinus*, Schnepfe *Scolopax rusticola*. Unter den Reptilien: die Kreuzotter *Pelias perus* und die Bergeidechse *Lacerta vivipara*, unter den Fischen: die Felchen *Coregonen*.

In der sub 7c zitirten Arbeit über die Thierreste vom Schweizersbild habe ich p. 29 den Steinbock noch als Alpenthier polaren Ursprungs angeführt. Aus den oben angeführten Gründen kann ich dieses nicht mehr annehmen.

[9]) *Studer Th.* «Ueber Säugethierreste aus glacialen Ablagerungen des bernischen Mittellandes» und «Ueber die Arctomysreste aus dem Diluvium der Umgegend von Bern.» Mittheilungen der Naturforschenden Gesellschaft in Bern 1888.

[10]) *Rütimeyer.* Die Fauna der Pfahlbauten. Neue Denkschriften der allgemeinen Schweizerischen Gesellschaft für Naturwissenschaften. Zürich 1862.

Studer Th. Fauna der Pfahlbauten des Bielersees. Mittheilungen der Naturforschenden Gesellschaft. Bern 1883.

Dr. Th. Studer, Professor.

Ueber ein Steinbockgehörn aus der Zeit der Pfahlbauten.

Unter den Knochenresten, welche die schweizerischen Pfahlbauten hinterlassen haben, sind solche von Alpenthieren bis jetzt ausserordentlich selten. Wir kennen nur wenige Reste der Gemse, die vereinzelt unter massenhaftem Material von Hirsch, Reh und Wildschwein in den Pfahlbauten des Bieler-, Moosseedorf- und Pfäffikersees gefunden wurden, noch seltener sind solche vom Steinbock, von dem sich bis jetzt nur ein Hornzapfen bei Ober-Meilen im Zürchersee fand. Derselbe wurde von *Rütimeyer* (Untersuchung der Thierreste aus den Pfahlbauten der Schweiz. Zürich 1860. p. 28 und Fauna der Pfahlbauten. Zürich 1862. p. 28) eingehend beschrieben.

In letzter Zeit erhielt unser naturhistorisches Museum durch gütige Vermittlung von Herrn Dr. *Dick* zwei mächtige noch auf den Stirnbeinen ansitzende Hornzapfen vom Steinbock, die im Murtensee nicht weit von der Pfahlbaustation Greng gefunden worden waren. Leider liess sich über die näheren Umstände des Fundes nichts Genaueres mehr ermitteln, aber die Erhaltung und Färbung der Knochen stimmt ganz mit denen aus dem Pfahlbau von Greng überein. Die Färbung ist ein lichtes Braun, das die ganze Knochensubstanz durchdringt.

Vom Schädel sind beide Stirnbeine erhalten, deren Naht in der vorderen Partie total verstrichen ist.

Die Stirnbeine scheinen mit Gewalt vom Schädel abgeschlagen worden zu sein, wie Schlagmarken, die auf Anwendung eines stumpfen Instrumentes, vielleicht eines Steinbeiles deuten, beweisen. An einzelnen Stellen sind noch kleine Theile des Thränenbeins daran sitzen geblieben. Um die Basis der Hornzapfen sind verschiedene Schnitt-

spuren zu erkennen, die nicht tief in den Knochen eindringen. Diese seichten Einschnitte, welche gewöhnlich im Beginn scharf sind und sich dann etwas nach dem anderen Ende verbreitern, dürften eher von einem geschliffenen Steininstrument, als von einem Metallmesser herrühren, sie wurden geführt, um die Haut vom Knochen abzuschälen. Das Ganze macht den Eindruck, wie wenn es sich darum gehandelt hätte, eine Trophäe herzustellen, die zum Schmuck eines Giebels, oder eines andern hervorragenden Gegenstandes dienen sollte.

Der vorliegende Rest deutet auf ein altes, gewaltiges Thier, dessen Gehörn zwar von nicht so bedeutender Länge, wie das des in Meilen gefundenen Exemplars, aber von ebenso mächtiger Dicke war.

Jeder Hornzapfen, dessen Spitze abgebrochen ist, misst über der Krümmung noch 320 mm., dazu darf man noch gut 100 mm. auf die fehlende Spitze rechnen. Der Anteroposteriordurchmesser 81 mm. an der Basis, in der Mitte noch 70 mm., der Querdurchmesser 71 mm. an der Basis. Der Umfang an der Basis 260 mm., in der Mitte 204 mm. Die Entfernung der beiden Hornwurzeln am Aussenrand 149 mm., am Innenrand 33 mm. Divergenz der Hornspitzen 395 mm., doch muss dieselbe viel grösser gewesen sein, da ca. $^1/_8$ des Hornzapfens fehlt. Länge der Stirn, über der Naht gemessen: 160 mm., Breite der Stirn am oberen Augenrand 144 mm., Dicke des Stirnbeins am Hinterrand 6 mm.

Der Hornzapfen von Meilen gehörte nach den Messungen *Rütimeyer's* einem ebenso kräftigen Thier. Die Länge des Hornzapfens über der Krümmuug betrug 500 mm., der Umfang an der Basis 260 mm., wie bei unserem Stück.

Die Länge des Hornes berechnete Rütimeyer dazu auf 30", also fast 1 Meter.

Bei einem alten, ausgestopften Steinbock unserer Sammlung, der im Jahre 1809 in den Alpen an der Savoyergrenze erlegt wurde, beträgt die Länge der Hornscheiden 785 mm. Die Entfernung der Hornwurzeln über den Augen 124 mm. Die mir vorliegende Hornscheide eines alten Thieres besitzt eine Länge von 810 mm., über der Krümmung gemessen, der innere Umfang der Basis, welcher dem Umfang des Hornzapfens entspricht, beträgt 220 mm. Der Anteroposteriordurchmesser 81 mm., der Querdurchmesser 64 mm. Unter den 41 Steinbockgehörnen der Sammlung von Herrn *Dr. Girtanner* die in der Abtheilung für Jagd und Fischerei an der Landesausstellung in Genf zu sehen war, besitzt das grösste Gehörn eine Bogenlänge von

820 mm. Das von Herrn *Maurer* aus Walchwyl ebenda ausgestelltes Gehörn eines schweizerischen Steinbocks hatte eine Bogenlänge von 800 mm. und einen Basisumfang von 250 mm.

An einem von Rütimeyer gemessenen Steinbockschädel betrug die Länge des Hornzapfens 400 mm., bei 220 mm. Umfang an der Basis, die Hornscheide hat eine Länge von 740 mm.

Ich gebe hier noch die Dimensionen zweier Schädel von alten Steinböcken unserer Sammlung, von denen einer zu einem Skelett gehört, das s. Z. dem Museum von S. M. dem König *Victor Emanuel* zum Geschenk gemacht worden ist. An dem Schädel sind die Zähne schon tief abgekaut. Zum Vergleich setze ich dabei die Maasse des Murtener und des Meilener Steinbocks.

1. Schädel aus dem Museum zum Skelett gehörend.
2. Schädel aus dem Museum.
3. Steinbockgehörn aus dem Murtensee.
4. Steinbockgehörn von Meilen. (Maasse nach *Rütimeyer*, l. c.)

			Murtensee	Meilen
Länge des Hornzapfens, über der Krümmung gemessen	1. 315	2. 325	3. 420[1])	4. 500
Anteroposterior-Durchmesser an der Basis	65	64	81	
Anteroposterior-Durchmesser in der Mitte	55	54	70	
Umfang an der Basis	195	190	260	260
Distanz der Hornwurzeln über der Augenhöhle	119	119	194	
Divergenz der Hornspitzen	335	334	395[2])	
Länge des Stirnbeines über der Naht .	116	120	160	
Distanz der Oberaugenränder . . .	139	127	144	

Rütimeyer berechnete nach dem oben gefundenen Verhältniss von Hornzapfen zu Hornscheide die Länge der Meilener Hornscheide auf 30", also fast einen Meter.

Wir haben oben bei einer Hornscheide von 810 mm. Länge gefunden, dass der Umfang des Hornzapfens an der Basis ca. 220 mm. betragen musste. Da nun die beiden Hornzapfen vom Murtense und von Meilen einen Umfang von 260 mm. haben, dürfen wir wohl die Länge der Hornscheiden auf ca. 1 m. und die Dicke als eine sehr bedeutende annehmen. Vielleicht waren beide etwas verschieden darin, dass bei dem Murtener Thier die Hörner etwas kürzer und

[1]) An den 320 mm. betragenden Hornzapfen fehlen mindestens 100 mm.
[2]) Diese Zahl bezieht sich nur auf die vorhandenen Enden.

gedrungener mit starker Divergenz waren, während sie bei dem Meilener länger und dabei etwas schlanker erschienen. Gleiche Verschiedenheiten zeigen sich auch bei unseren Steinbockschädeln vom naturhistorischen Museum, bei dem einen (1) sind die Hornzapfen bei gleicher Dicke kürzer und mehr auswärts gebogen, als bei dem anderen (2), auch der Gesichtsschädel breiter, was sich namentlich in der bedeutenden Breite der Nasenbeine ausspricht. Der ausgestopfte Steinbock des naturhistorischen Museums, sowie die vorerwähnte Hornscheide gehören zu dem schlankeren Typus, während der Kopf eines alten Steinbocks, unseres Museums, der in der Mitte des vorigen Jahrhunderts von Herrn *Steiger*, Syndikator der italienischen Vogteien, am Gotthardt erlegt worden war, sehr dicke, aber kürzere und divergentere Hörner, als der alte ausgestopfte Steinbock von Savoyen zeigt, derselbe dürfte aber nach der Knotenbildung ein gleiches Alter gehabt haben.

Fünf andere ausgestopfte Steinböcke, die unser Museum besitzt, sowie mehrere Schädel und Gehörne [1]) habe ich hier nicht in Betracht gezogen, da bei ihnen das Gehörn noch nicht zur vollen Entwicklung gelangt ist.

Aus dem Vorkommen von Steinbockresten bei Pfahlbaustationen dürfen wir nicht den Schluss ziehen, dass zu jener Zeit noch Steinböcke in der Ebene vorkamen, wie in der ersten Postglacialzeit. Im Gegentheil zeigt die Seltenheit des Vorkommens und die Behandlung des Gehörns aus dem Murtensee, dass es sich um eine seltene Jagdtrophäe handelte, die ein kühner Jäger, der sich bis in das Alpengebiet wagte, erbeutete, oder die vielleicht im Handel durch Tausch in den Besitz der Pfahlbauten kam.

Zugleich sehen wir, dass zu jener Zeit, wo das Steinwild noch nicht durch stete Verfolgung und Konkurrenz von Seiten der zahmen Hausthiere in seinen natürlichen Wohngebieten beeinträchtigt wurde, die Thiere sich noch in voller Kraft und Grösse entwickeln konnten.

[1]) Das naturhistorische Museum in Bern besitzt 6 ausgestopfte Exemplare des Steinbockes, zwei erwachsene und zwei junge Böcke und zwei Geissen, zwei Skelette, ein männliches und ein weibliches, drei isolirte Schädel und drei Schädelächte Gehörnpaare, worunter das eines in der Mitte des vorigen Jahrhunderts am Gotthard geschossenen Steinbocks.

J. H. Graf.

Notizen zur Geschichte der Mathematik und der Naturwissenschaften in der Schweiz.

No. 45. Die Inhaber der ordentlichen Professur für Mathematik an der bernischen Akademie und nachherigen Hochschule sind nun alle eingehend biographisch behandelt worden und zwar

1) *Niklaus Blauner von Bern* 1713—1791, hatte den Lehrstuhl inne von 1749—1784. Vgl. Prof. Dr. J. H. Graf. Niklaus Blauner, der erste Professor der Mathematik an der bernischen Akademie. Bernische Biographien III. Bd. S. 67—89. Ferner Wolf, Rud., Biographien zur Kulturgesch. I, S. 323—340.
2) *Johann Georg Tralles von Hamburg*, helvetischer Bürger, 1763—1822, hatte den Lehrstuhl für Mathematik inne von 1785—1803. Vergl. Graf, J. H., der Mathematiker Johann Georg Tralles, Bernische Biographien I. Band, S. 526—544. Ferner Wolf, Rud., Biogr. z. Kulturgeschichte I, S. 323—340. Wolf, Rud. Gesch. der Vermessungen S. 143—158.
3) *Johann Friedrich Trechsel von Burgdorf* 1776—1849, hatte den Lehrstuhl inne von 1805—1849. Vergl. Wolf, Rud., Biogr. zur Kulturgesch. II, S. 405—434. Bernische Biog. I, S. 141—150. Graf, J. H., Geschichte der Dufour-Karte, Bern 1896 an vielen Orten (s. Register).
4) *Ludwig Schläfli von Burgdorf* 1814—1895, hatte den Lehrstuhl inne von 1853—1892. Vergl. Graf, J. H., Ludwig Schläfli. Mittheilungen 1895 S. 122—203.

Was die Blauner anbetrifft, so bemerken wir, dass diese Familie in Bern nun ausgestorben ist. Am 30. April 1891 starb nämlich in Bern *Fräulein Cäcilia Susanna Marg. Blauner* geb. 1832, Tochter des Bernhard Friedrich Blauner (1803—1853), gewesener Naturalienhändler, die älteste direkte Descendentin. —

No. 46. Anlässlich eines im Anfang Januar in Solothurn gehaltenen Vortrags über die I. Periode der schweiz. Landesvermessung (Geschichte der Dufour-Karte 1832—64) wurde mir von H. Hauptmann *Rust*, Redaktor in Chur eine Notiz gesandt, wonach, wie es schon Wolf in der Gesch. der Vermessungen S. 128 u. 130 andeutet, J. R. Meyer mit seinem Grossvater *Franz Georg Rust* in Verbindung getreten sei. Franz Georg Rust von Lingenau im Vorarlberg besass mit einigen Brüdern zu jener Zeit zu Solothurn, wo er 1816 Bürger wurde, eine weitherum bekannte Stuccaturwerkstätte speziell für Kirchenbauten. Von ihm u. bei ihm wurde 1804

auch der Gesichtspunkt, unter welchem ich dieselbe betrachtet und nicht nur interessant, sondern selbst nothwendig finde, dass sie auf's Reine gebracht werde; wenigstens dass man sie auf den Punkt bringe, dass man wisse unter welchen Umständen sich aus dem bekannten Luftzustande in zweien Punkten der Atmosphäre ihre Verschiedenheit in Höhe bestimmen lasse, und unter welchen Umständen dies nicht geschehen könne. Denn es ist klar, dass wenn die Gesetzlichkeit der Abnahme der Dichte (als Funktion der Entfernung des atmosphärischen Punktes vom Mittelpunkt der Erde) zuweilen unterbrochen würde, in diesem Falle keine auf ein stetiges Gesetz sich gründende Formel entspräche. Wäre die *Dalton'sche* Vorstellung der Mischung verschiedener elastischer Materien eine nothwendige statt eine bloss mögliche, so fiele jenes ganz weg und man würde stets bei gegebenen Umständen genaue Resultate finden. Die Formel für die Differenz der Höhe, die — nach den bisherigen Vorschriften — nur aus einem Terminus besteht, würde bloss die Summe mehrerer sein und sich leicht in anderer Gestalt auch noch bringen lassen; wenigstens wäre dies der Fall sobald ein ruhiger Gleichgewichtszustand der Luftmasse eingetreten wäre. Die Sache verhält sich meiner Meinung nach anders. Die Verwickelung selbst aber ist nicht hinreichend bekannt und es ist mehr als zu bezweifeln, dass die bisherigen Beobachtungen nicht einmal zureichen einem — wenn ich mich so ausdrücken darf — Normalluftzustand eine Regel anzupassen. Die Umstände in der Schweiz waren zu ungünstig für mich, um das was sich aufklären lässt, zu erreichen, und in der Erwartung in der Folge etwas Sicheres zu bestimmen, habe ich das Geschehene wenig geschätzt und daher die gemachten Beobachtungen theils verloren theils vernichtet, da ich sehe, dass ich weiterhin nicht Gelegenheit finden werde das Verlangte zu leisten, und da die Verwirrung meiner Papiere, durch die Hausstallirung, die ich in Bern erlitten, mir alle Lust benahm Dinge zusammenzusuchen, mit welchen ich nun nichts mehr anzufangen hatte und deren Anblick mir nur Verdruss und Reue der unnütz verlorenen Zeit und Mühe erweckte. Gerne würde ich Ihnen Beobachtungen zu jedem Gebrauch übergeben haben, da ich vernommen, dass Sie viel über diese Sachen sammeln, Sie sehen aber, dass es unmöglich ist, Ihnen zu entsprechen.

Da ich noch einige Zeit hier bleibe, so kann es geschehen, dass noch einige Beobachtungen angestellt werden auf gut bestimmten Höhen, nur wird es schwer fallen gute Barometer zu erhalten. Schon in Bern suchte ich über die Veränderung der Refraktion Beobachtungen zu machen, allein meine Wohnung war dafür nicht gelegen, und nachher der Aufenthalt an einem andern Orte zu kurz um mehr zu thun als das Phänomen wahrzunehmen. Hier habe ich freilich alle die erforderlichen Mittel nicht zur Hand. Indessen habe ich doch mit einem Kreisinstrumente beträchtliche Veränderungen scheinbarer Höhenwinkel entfernter Punkte wahrgenommen. Allein um das Gesetz der Aenderung zu entwickeln, müsste ich mit noch grösserer Sicherheit beobachten können. Diese Beobachtungen könnten indessen zur Belehrung über die Modifikation der Atmosphäre beitragen, da sich diese Veränderung der Brechbarkeit des Lichtstrahles keineswegs durch die Veränderung der Temperatur und der Dichtigkeit erklären zu lassen scheint.

Nebst meinen Wünschen für Ihr Wohlsein genehmigen Sie, hochzuverehrender Herr, die Versicherung meiner Hochachtung.

Tralles.

Inhalts-Verzeichniss.

	Seite der Sitzungsberichte	Seite der Abhandlungen
Jahresbericht 1 V. 1895—2 V. 1896.	III	
Jahresrechnung pro 1895	XVIII	
Verzeichniss der Mitglieder am 31. Dez. 1896 . .	XIII	
Baltzer A., Prof. Dr.,		
Ueber ein interglacial erwiesenes Profil bei Pianico	XI	
Der alte Rhonegletscher und sein Verhältniss zum Aargletscher	XII	
Baumberger E., Sekundarlehrer in Twann (nun in Basel),		
Ueber die Entstehung der Hauteriveschichten . .	IX	
Brückner E., Prof. Dr.,		
Brandungswirkungen an der Insel Wight. . .	XII	
Veränderungen des Rhonegletschers und von Gipfelformen in den kristallinischen Schiefern . .	XII	
Drechsel E., Prof. Dr.,		
Ueber das Jod und seine Bedeutung für den thierischen Organismus	XI	
Fischer E., Prof. Dr.,		
Ueber die Trüffeln mit Berücksichtigung schweizerischer Vorkommnisse	VIII	
Vorweisung eines Stückes von Psaronius . . .	XII	
Ueber Tuberaceen und Gastromyceten . . .	XII	
Graf J. H., Prof. Dr.,		
L. Schläfli (siehe Mittheilungen 1895) . . .	VI	
Ueber die schweizerische Landesvermessung von 1832—64	XI	
Ueber die Ueberschwemmungen der Emme und alte und neue Flusskorrektionen	XII	
Der Briefwechsel zwischen Jakob Steiner und Ludwig Schläfli. (Festgabe der Bernischen Naturf. Gesellschaft an die Zürcherische Naturforschende Gesellschaft anlässlich der Feier des 150jährigen Bestehens der Letzteren im August 1896.) . . .		70
Notizen zur Geschichte der Mathematik und der Naturwissenschaften in der Schweiz		287
Gruner P., Dr. phil. Docent und Gymnasiallehrer,		
Kathodenstrahlen und X-Strahlen	VI	
Huber G., Prof. Dr.,		
Ueber Planetoiden	VI	28

	Seite der Sitzungsberichte	Abhandlungen
Kissling E., Dr. phil. Docent und Sekundarlehrer,		
Vorweisung von Exemplaren der Scutella helvetica	XI	
Fundort von fossilen Pflanzen an der Losenegg bei Eriz	XI	
Vorweisung eigenthümlicher Lehmkugeln aus dem Sammelkanal des Lammbaches	XII	
v. Kostanecki, St. Prof. Dr.,		
Ueber gelbe Farbstoffe	XII	
Rossel A., Prof. Dr.,		
Ueber die Wirkung der Phosphorsäure als Düngmittel	XII	
Neue chemische Verbindungen hergestellt bei hohen Temperaturen und ihr Zusammenhang mit den modernen Anschauungen (mit Abbildungen) . .		8
Steck Th., Dr. phil., Conservator,		
Demonstration von Neuropteren	XII	
v. Steiger H., Eidgenöss. topogr. Bureau in Bern,		
Die Ausbrüche des Lammbaches (mit Tafeln) . .		265
Studer Th., Prof. Dr.,		
Vorweisung eines Zahns von Hyæmoschus . .	XI	
Ueber Hörner einer Antilope aus dem Obermiocän bei Locle	XI	
Pleistocæne Knochenreste aus einer palæolithischen Station in den Steinbrüchen von Veyrier am Salève		276
Ueber ein Steinbockgehörn aus der Zeit der Pfahlbauten		283
Thiessing, Dr. phil. Redaktor,		
Ueber die Entdeckung eines neolitischen Gräberfeldes bei Worms	IX	
Neue Gräberfunde auf dem Wyler bei Bern . .	X	
Tschirch A., Prof. Dr.,		
Untersuchungen über das Chlorophyll und andere Pflanzenfarbstoffe, sowie über die Beziehungen des Chlorophylls zum Blutfarbstoff	VII	
Die chemische Industrie auf den Ausstellungen in Genf und Berlin	XII	
Wagner C., Dr. phil. in Zürich,		
Ueber die Darstellung einiger bestimmten Integrale durch Bessel'sche Funktionen		53
Walker, Dr. med. Spitalarzt in Solothurn,		
Louis Pasteur und seine Forschungen . . .	XI	
Zeller R., Dr. phil., Sekundarlehrer,		
Nachträge zu meinem geologischen Querprofil durch die Centralalpen (mit Abbildung)		1
Ziegler A., Dr. med. Eidgen. Oberfeldarzt,		
Ueber hufartige Spuren auf Sandsteinplatten aus dem Rheinthal	XII	

Verlag von K. J. WYSS in Bern.

(Fortsetzung von Seite 2 des Umschlags.)

Fascikel IV 6: *Fauna helvetica.* Heft 6: Mollusken. Zusammengestellt von Prof. Dr. Th. Studer, Dr. G. Amstein und Dr. A. Brot. Preis 60 Cts.

Fascikel V 4: *Heraldik und Genealogie.* Bearbeitet von Jean Grellet und Maurice Tripet. Bern 1895. 68 Seiten 8°. Preis Fr. 1. 50

Fascikel V 6 a—c: *Architektur, Plastik, Malerei.* Zusammengestellt von Dr. B. Haendcke. Bern 1892. 100 Seiten 8°. Preis Fr. 2. —

Fascikel V 9 ab: *Landwirthschaft.* Zusammengestellt v. Prof. F. Anderegg u. Dr. E. Anderegg. Bern 1893. Heft 1—3. 258 S. 8° à Fr. 3. —
id. „ 4 „ —. 60
id. „ 5 und 6 à „ 2. —

Fascikel V 9 c: *Forstwesen, Jagd und Fischerei.* II. Forstwesen. Zusammengestellt durch das eidgen. Oberforstinspektorat. Bern 1894. 160 Seiten 8°. Preis Fr. 2. —

Fascikel V 9 d: *Schutzbauten.* Zusammengestellt durch das eidgen. Oberforstinspektorat. Bern 1895. 136 Seiten 8°. Preis Fr. 2. —

Fascikel V 9 g β: *Mass und Gewicht.* Bearbeitet von F. Ris, Direktor der eidgen. Eichstätte. Bern 1894. 36 Seiten 8°. Preis Fr. 1. —

Fascikel V 9 g γ: *Post- und Telegraphenwesen.*
Postwesen. Zusammengestellt von der Schweizer. Oberpost-Direktion.
Telegraphenwesen. Zusammengestellt von E. Abrezol, Inspektor der Central-Telegraphenverwaltung. Bern 1895. 113 Seiten 8°. Preis Fr. 2. —

Fascikel V 9 g ε: *Bankwesen, Handelsstatistik, Versicherungswesen* Zusammengestellt von W. Speiser, Basel, Dr. Geering und Dr. J. J. Kummer. Bern 1893. 207 Seiten 8°. Preis Fr. 3. —

Fascikel V 9 j: *Alkohol und Alkoholismus.* Zusammengestellt von Otto Lauterburg, Pfarrer in Neuenegg, E. W. Milliet, Direktor der eidgen. Alkoholverwaltung, und Antony Rochat, Pfarrer in Satigny. Bern 1895. 183 Seiten 8°. Preis Fr. 2. —

Fascikel V 10 e γ: *Die christkatholische Litteratur der Schweiz.* Zusammengestellt v. Dr. F. Lauchert. Bern 1893. 32 Seiten 8°. 60 Cts.

Fascikel V 10 e α: *Bibliographie der evangelisch-reformirten Kirche in der Schweiz.* Heft 1: Die deutschen Kantone. Zusammengestellt von Dr. G. Finsler. Preis Fr. 2. —

Fascikel V 10 e: *Die katholisch-theologische und kirchliche Litteratur des Bisthums Basel* vom Jahre 1750 bis zum Jahre 1893. Zusammengestellt von Pfr. Ludwig R. Schmidlin in Biberist.
Heft 1 und 2 à Fr. 3. —

Durch jede Buchhandlung zu beziehen.

Verlag von K. J. WYSS in Bern.

Graf, J. H., Prof., Dr. *Einleitung in die Theorie der Gammafunktion und der Euler'schen Integrale* Fr. 2. —

— — *Geschichte der Mathematik und der Naturwissenschaften in bernischen Landen* vom Wiederaufblühen der Wissenschaften bis in die neuere Zeit. Heft 1—5. Fr. 7. 20

— — *Das Leben und Wirken des Physikers und Geodäten Jacques Barthélmy Micheli du Crest* aus Genf, Staatsgefangener des alten Bern 1746—1766. Mit dem Portrait Micheli's, einer Ansicht seines Gefängnisses in Aarburg und dem Facsimile seines Panorama der Alpen . . . . . Fr. 3. —

— — *Das Leben und Wirken des Physikers und Astronomen Johann Jac. Huber* aus Basel, 1733—1798. Mit dem Bildnisse Huber's und einer Tafel, seine freie Uebersetzung darstellend . . . . . Fr. 1. —

— — *Professor Dr. Rudolf Wolf, 1816—1893* . . 1. —

— — *Professor Ludwig Schläfli, 1814—1895* . . . 1. 20

— — *Der Briefwechsel zwischen Jakob Steiner und Ludwig Schläfli* . . . . . Fr. 3. —

Huber, G., Prof., Dr. *Sternschnuppen, Feuerkugeln, Meteorite und Meteorschwärme* . . . . . Fr. 1. —

— — *Forschungen auf dem Gebiete der Spektralanalyse* . —. 80

— — *Die kleinen Planeten des Asteroidenringes* . —. 60

Kissling, Dr., E. *Die versteinerten Thier- und Pflanzenreste in der Umgebung von Bern.* Excursions-Büchlein für Studirende . . . . . Fr. 4. —

Baumberger, E. *Ueber die geologischen Verhältnisse am linken Ufer des Bielersees.* . . . . . Fr. 2. —

Baltzer, A., Prof. *Vom Rande der Wüste.* Populärer Vortrag, gehalten im November 1894 in der Bernischen Naturforschenden Gesellschaft. Mit drei Lichtdrucktafeln. Fr. 1. 50.

Bützberger, F., Dr. *Kurzer Lehrgang der ebenen Trigonometrie* mit vielen Aufgaben und Anwendungen, cart. Fr. 1. 50

Fischer, Prof. L., *Zweiter Nachtrag z. Verzeichniss der Gefässpflanzen des Berner-Oberlandes, mit Berücksichtigung der Standortsverhältnisse, der horizontalen und vertikalen Verbreitung* . . . . . Fr. —. 25

Leist, K., *Ueber den Einfluss des alpinen Standortes auf die Ausbildung der Laubblätter.* Mit 2 lithographischen Tafeln Fr. 1. —

Durch jede Buchhandlung zu beziehen.

Mittheilungen

der

Naturforschenden Gesellschaft

in Bern

aus dem Jahre 1897.

Nr. 1436-1450.

Redaktion: J. H. GRAF.

BERN.
Druck und Verlag von K. J. Wyss.
1898.

Verlag von K. J. WYSS in Bern.

BIBLIOGRAPHIE
der
Schweizerischen Landeskunde.

Unter Mitwirkung
der
hohen Bundesbehörden, eidgen. und kant. Amtsstellen
und zahlreicher Gelehrter
herausgegeben von der
Centralkommission für schweizerische Landeskunde.

In deutscher und französischer Ausgabe.

Bis jetzt erschienen:

Fascikel Ia: *Bibliographische Vorarbeiten der landeskundlichen Litteratur und Kataloge der Bibliotheken der Schweiz.* Zusammengestellt von Prof. Dr. J. H. Graf. Bern 1894. 69 Seiten 8°. Preis Fr. 1.—

Fascikel I b, enthaltend: *Bibliographie der Gesellschaftsschriften, Zeitungen und Kalender der Schweiz,* von Prof. J. L. Brandstetter in Luzern. 380 Seiten. Preis Fr. 5.—

Fascikel II a: *Landesvermessung und Karten der Schweiz, ihrer Landstriche und Kantone.* Herausgegeben vom eidgen. topographischen Bureau. Redigirt von Prof. Dr. J. H. Graf. Bern 1892. 198 Seiten 8°. Preis Fr. 3.—

Fascikel II b: *Karten kleinerer Gebiete der Schweiz.* Herausgegeben vom eidg. topograph. Bureau. Redigirt von Prof. Dr. J. H. Graf. Bern 1892. 164 Seiten 8°. Preis Fr. 3.—

Fascikel II c: *Stadt- und Ortschaftspläne, Reliefs und Panoramen der Schweiz.* Herausgegeben vom eidg. topograph. Bureau. Redigirt von Prof. Dr. J. H. Graf. Bern 1893. 175 Seiten 8°. Preis Fr. 3.—

Fascikel II d, enthaltend: *Generalregister, Ergänzungen und Nachträge zu den Fascikeln II a—c* (Landesvermessung, Kataloge der Kartensammlungen, Karten, Reliefs und Panoramen). Im Auftrage des eidgen. topograph. Bureaus redigirt von Prof. Dr. J. H. Graf. 220 Seiten 8°. Preis Fr. 4.—

Fascikel IV b: *Die Fauna der italienischen Schweiz.* Redigirt von Prof. Dr. A. Location. Como 1894. 19 Seiten 8°. Preis 50 Cts.

Fascikel IV 6: *Fauna helvetica:* Heft 2: Seefauna. Zusammengestellt von Prof. D. F. Zschokke. Bern 1897. 30 Seiten. 40 Cts.

Fascikel IV 6: *Fauna helvetica.* Heft 4: Vögel. Zusammengestellt von Prof. Dr. Theophil Studer. Bern 1895. 57 Seiten 8°. Preis Fr. 1.—

(Fortsetzung auf Seite 3 des Umschlages.)

Durch jede Buchhandlung zu beziehen.

Mittheilungen

der

Naturforschenden Gesellschaft

in Bern

aus dem Jahre 1897.

Nr. 1436-1450.

Redaktion: J. H. GRAF.

BERN.
Druck und Verlag von K. J. Wyss.
1898.

506
N283

Jahresbericht

über die

Thätigkeit der bernischen Naturforschenden Gesellschaft

in der Zeit vom 2. Mai 1896 bis 1. Mai 1897.

Hochgeehrte Herren!

In dem verflossenen Vereinsjahre wurden von unserer Gesellschaft Sitzungen abgehalten, wovon 5 im Saale des Hotels Storchen, 3 im logischen, 3 im pharmaceutischen und 1 im physiologischen Institut. e Sommersitzung fand in Verbindung mit der Naturforschenden Geschaft von Solothurn in Kirchberg statt.

An den Vorträgen, welche die Sitzungen grösstenteils ausfüllten, eiligten sich in verdankenswerter Weise:

Herr	Baltzer	2	Vorträge
»	Brückner	1	Vortrag
»	Drechsel	1	»
»	L. Fischer	1	»
»	E. Fischer	1	»
»	v. Freudenreich	1	»
Fräulein	Gascon	1	»
Herr	J. H. Graf	3	Vorträge
»	P. Gruner	1	Vortrag
»	A. Kaufmann	1	»
»	Kissling	1	»
»	v. Kostanecki	1	»
»	Kronecker	1	»
»	A. Rossel	1	»
»	Sidler	1	»
»	Th. Steck	1	»
»	B. Studer	1	»
»	Th. Studer	2	Vorträge
»	Tschirch	3	»
»	Zeller	1	Vortrag
»	Ziegler	1	»

Die auswärtige Sitzung fand am 28. Juni gemeinsam mit der Naturforschenden Gesellschaft von Solothurn im Gasthof zur Sonne in Kirchberg statt.

Herr Emil Elsässer in Kirchberg hatte in zuvorkommender Weise die Vorbereitungen zum Empfang der Gäste getroffen. Im festlich dekorierten Saale wurden wir vom Männerchor Kirchberg mit Gesang empfangen. Das Präsidium der folgenden Sitzung übernahm unser verehrter Senior, Herr Professor F. Lang von Solothurn. Es sprachen: Herr Drechsel «Ueber das Jod und seine Bedeutung für den tierischen Organismus.»

Herr Walker, Spitalarzt in Solothurn. «Ueber Louis Pasteur und seine Forschungen.»

Herr A. Rossel. «Ueber die Wirkung der Phosphorsäure als Düngmittel.»

Herr Graf. «Ueber die Ueberschwemmungen der Emme und alte und neue Flusskorrektionen.»

Herr Professor Dr. L. Fischer machte Anregungen zur Erhaltung von Bäumen hohen Alters.

Herr A. Baltzer legte eine Anzahl Photographien aus dem Lammbachgebiet bei Brienz vor.

Ein Bankett, verschönert durch die Vorträge des Gesangvereins von Kirchberg und animiert durch zahlreiche Toaste, vereinigte dann die Mitglieder im grossen Saale zur Sonne, von wo zu Fuss der Heimweg bis Burgdorf angetreten wurde.

Ein für den Monat Mai vorgesehener gemeinschaftlicher Ausflug konnte leider wegen des konsequent schlechten Wetters nicht ausgeführt werden.

Zu dem 50jährigen Amtsjubiläum unseres verehrten Freundes, Prof. Dr. F. Lang in Solothurn, wurde eine Glückwunschadresse der Gesellschaft von unserm Delegierten, Herrn Prof. Dr. Graf, überreicht.

Ueber den Lesezirkel berichtet Herr Dr. Th. Steck:

«Für das abgelaufene Jahr ist ein ziemlicher Rückgang in der Zahl der Teilnehmer am Lesezirkel zu konstatieren. Dieselbe beträgt gegenwärtig nur noch 23. Wegen höchst unregelmässiger Spedition der Mappen wurde ein Mitglied aus der Liste der Teilnehmer gestrichen. Auch unter den übrigen Mitgliedern gibt es leider noch solche, die hinsichtlich der Spedition und Einhaltung der richtigen Reihenfolge der einzelnen Mappen sich grösserer Pünktlichkeit befleissen könnten.

Herr Seminarlehrer F. Marti übernahm in verdankenswerter Weise das durch den Austritt der Herren Dr. Schlachter und Dr. A. v. Steiger verwaist gewordene Amt eines Kontrolleurs.

Die Mitteilungen des deutsch-österreichischen Alpenvereins wurden auf mehrfach geäusserten Wunsch hin nicht mehr beigelegt.»

Der Mitgliederbestand der Gesellschaft hat sich leider wieder um ein Mitglied vermindert, es sind 5 Austritte gegenüber 4 Eintritten zu verzeichnen.

Für das Vereinsjahr 1896/97 wurde zum Präsidenten gewählt, Herr Professor Dr. Drechsel, zum Vicepräsidenten Herr Professor Dr. E. Fischer.

Für das nächste Jahr steht der bernischen Naturforschenden Gellschaft die Aufgabe bevor, Vorbereitungen zu dem Empfang der hweizerischen Naturforschenden Gesellschaft in Bern auf das Jahr 1898 treffen. Es wird Ehrensache unserer Gesellschaft sein, dahin zu irken, dass sich dies nun seit dem Bestande der Schweizerischen Naturrschenden Gesellschaft zum 5. Male in Bern wiederholende Jahresfest ürdig an seine Vorgänger von 1822, 1839, 1858, 1878 anreihe.

Der abtretende Präsident:

Th. Studer.

Sitzungs-Berichte.

909. Sitzung vom 9. Januar 1897.

Abends 8 Uhr im zoolog. Institut.

Vorsitzender: Herr Th. Studer. Anwesend: 32 Mitglieder und 2 Gäste.

Herr J. R. Zeller: **Naturwissenschaftliche Streifereien in Aegypten.**

Während eines zweimonatlichen Aufenthaltes in Aegypten im Frühjahr 1896 war der Vortragende hauptsächlich darauf bedacht, einerseits die Fauna und Flora, andrerseits die geologischen Verhältnisse, sowie die Wüste kennen zu lernen. Nach einer kurzen Erörterung der Rolle, welche der Nil in diesem so ganz von der Bewässerung abhängigen Lande spielt, werden die wichtigsten Vertreter der ägyptischen Tierwelt, namentlich der Haustiere erwähnt und ein Blick geworfen auf den Ackerbau, der den Reichtum des Landes darstellt. Einlässlicher wird besprochen die Schichtfolge des Aegyptischen Eocäns, wie sie am Gebel Mo-Kattam bei Kairo so schön aufgeschlossen ist und durch ihren Petrefaktenreichtum schon seit dem Altertum berühmt ist. Durch die Untersuchungen von Meyer-Eymar hat sich die völlige Kongruenz der gleichzeitigen Ablagerungen des Pariserbeckens und Aegyptens erwiesen. Eine Frage, welche noch nicht abgeschlossen ist, betrifft die Entstehung der verkieselten Hölzer, welche sich sowohl in der Umgebung von Kairo (versteinerter Wald), als auch Hunderte von Kilometern weit in der libyschen Wüste vorfinden. Gerade die grosse räumliche Verbreitung dieser meist der Nicolia aegyptiaca angehörigen Pflanzenreste widerstrebt der Theorie Schweinfurths, welcher sie durch Geysire verkieselt sein lassen will.

Eine Expedition in das 100 km. nordwestlich von Kairo gelegene Thal der Natronseen (Wadi Natron) gab dem Reisenden Gelegenheit, sowohl die Wüste an und für sich, als auch ihre Pflanzen- und Tierwelt zu studieren. Die Wüste, teils als Sand, teils als Kieswüste entwickelt, zeigte aufs schönste die Wirkungen der Insolation und Deflation, andrerseits erhielt der Vortragende den bestimmten Eindruck, dass die Theorien Walters über die Entstehung der Wadi durch Windwirkung der Wirklichkeit kaum entsprechen können, indem diese Trockenthäler die typische Gestalt von Erosionsthälern darbieten und die Wirkung der in der Wüste wehenden Winde nicht überschätzt werden darf. Gelang es doch nicht einmal an hiezu scheinbar günstigen Stellen richtige Kantengeschiebe aufzufinden. — Aeusserst interessant waren die Natronseen, welche dem ca. 160 km. langen, 10 km. breiten, äusserst flachen Natronthal den Namen gaben. Die 10 Becken liegen in einer Reihe, sie enthalten eine rote konzentrierte Lauge von Kochsalz und Natron, in welcher in Unmasse ein kleiner Phyllopode (Artemia salina) vorkommt. Die Seen stehen im direkten Abhängigkeitsverhältnis zum Nil; sie trocknen zum

grössten Teil im Sommer aus, sobald der Nil steigt, brechen aus der dem Nilthal zugekehrten Thalseite zahlreiche Quellen, welche zur neuen Bildung der Seebecken führen. Auf welche Weise das Natron dabei entsteht, ist noch nicht sicher festgestellt. Nach der Theorie Sickenbergers passiert das Wasser Schichten mit kohlensaurem Kalk, Gips und Kochsalz, beladet sich dadurch mit schwefelsaurem Natron, das auf dem Wege der Quellen zu den Seen durch Algen und Mikrokosmenvegetation zu Schwefelnatrium reduziert und dann in das Karbonat verwandelt wird. Die ägyptische Regierung trifft gegenwärtig Anstalten, das Natron im Grossen auszubeuten, sie benutzt dabei nicht das Seewasser selbst, aus welchem das Natron schwer zu isolieren wäre, sondern den sog. «Korschef». Dies ist eine die Seen umgebende Zone trockenen Sandbodens, welcher nur Natron enthält, das stellenweise sogar ausblüht, während das Kochsalz in der Tiefe bleibt. Dieser Korschef wird in Süsswasser geworfen, wo der Sand sich niederschlägt und das Natron in Lösung geht. Süsswasser findet sich in dem so sterilen Wadi Natron in Menge oft wenig tief im Boden, man braucht nur eine Menge Brunnen zu graben, um die Wüste in einen Garten zu verwandeln. Die Vegetation des Thales beschränkt sich auf die die Seen einfassenden Röhrichte von Burdi (Typha latifolia), welche einer mannigfaltigen Sumpfvögelfauna zum Aufenthalte dienen. Ueber die geologischen Verhältnisse ist man nicht ins Klare gekommen. Gips, salzhaltige Thone und verkieselte Kalke sind alles, Fossilien wurden ausser versteinertem Holz keine gefunden. Jedenfalls sind die Ablagerungen sehr jungen Alters. Der Rückweg auf Kamelen nach Kairo führte an den interessanten, mitten in der Wüste gelegenen festungsartigen Klöstern vorbei, in denen koptische Mönche ein beschauliches Dasein führen.

910. Sitzung vom 23. Januar 1897.

Abends 8 Uhr im physiol. Institut.

Vorsitzender: Herr Th. Studer. Anwesend: 17 Mitglieder und 2 Gäste.

Herr H. Kronecker: **Atembewegungen** (mit Experimenten).

911. Sitzung am 13. Februar 1897.

Abends 8 Uhr im pharmac. Institut.

Vorsitzender: Herr J. H. Graf. Anwesend: 21 Mitglieder und 1 Gast.

1. Hr. **Tschirch** besprach in Ergänzung seines früheren Vortrages an der Hand von einigen hundert ausgestellten Präparaten, die derselbe den chemischen Fabriken *Siegfried*-Zofingen, Gebr. *Schnorff*-Ueticon, *Geigy*-Basel, *Société chimique des usines de Rhône*-Genève verdankte, die **Entwicklung der chemischen Industrie der Schweiz**. Der Vortragende behandelte zunächst die chemische Grossindustrie, dann die Herstellung von neuen Arzneimitteln und feineren chemischen Präparaten und endlich die Farbenindustrie. Aus den Ausführungen ging hervor, dass die schweizerische chemische Industrie schon jetzt sehr beachtenswerte Resultate erzielt hat.

2. Hr. **Tschirch** besprach ferner ein neues **Konservierungsverfahren für Hymenomyceten**. Der Vortragende hat es sich zur Aufgabe gemacht,

ein Verfahren zu ermitteln, mit Hilfe dessen es gelingt, die Fruchtträger der höheren Pilze in ihrer Form und möglichst auch in ihrer Farbe dauernd zu erhalten. Das Verfahren gab bei der vorwiegenden Mehrzahl der Pilze ein gutes Resultat, nicht bei den rotgefärbten Arten. Es besteht darin, dass die Fruchtträger zunächst in verdünnten Alkohol gelegt werden, dem etwas Schwefelsäure zugesetzt wurde. Hierin bleiben sie je nach der Art zwei Stunden bis 2 Tage liegen. Dann werden sie auf Fliesspapier abgetrocknet und direkt in Vaselinöl eingetragen, dem 0,5 % Phenol zugesetzt worden war. Der Vortragende legte 80 Präparate von Hymenomyceten vor, die in der angegebenen Weise konserviert wurden. Einige lagen bereits 1½ Jahre in Vaselinöl, die Mehrzahl seit dem Sommer 1896. Alle waren in der Form unverändert, die meisten auch in der Farbe. Das Vaselinöl war nirgends gefärbt oder trübe geworden.

3. Hr. **Tschirch** legt die neueste Lieferung (Taf. 50—60) der **Pflanzenphysiologischen Wandtafeln** für den Unterricht vor, die derselbe in Gemeinschaft mit Prof. Frank herausgibt.

4. Hr. **Tschirch** legte vor und besprach den **Anatomischen Atlas der Pharmakognosie und Nahrungsmittelkunde**, die derselbe gemeinsam mit Dr. Oesterle herausgibt. Der Vortragende erläuterte an die 60 seither erschienenen Tafeln, Plan und Grundsätze des Werkes, welches sich, abgesehen von anderem, zur Aufgabe gemacht hat, der Entwicklungsgeschichte auch in der Pharmakognosie Geltung zu verschaffen.

5. Herr B. Studer: **Bericht über die Pilzsaison 1896.**

Der Vortragende konstatiert, dass Sommer und Herbst 1896 infolge der sehr wechselnden warmen und feuchten Witterung einen ungewöhnlichen Reichtum an Hymenomyceten zur Entwicklung gebracht. Als eine für Bern neue Species wird Limocium pudorinum Fr. erwähnt, das letzten Herbst in grossen Mengen aufgetreten ist und vorher nie gefunden wurde. Boletus fusipes Henfler ist im Jahre 1890 in der Umgegend von Bern zuerst bemerkt worden, in den 2 letzten Jahren scheint er wieder verschwunden zu sein. Boletus scaber Bull var. alba ist früher häufig vorgekommen, scheint gleichzeitig mit Boletus fusipes das Gebiet verlassen zu haben.

912. Sitzung vom 20. Februar 1897.

Abends 8 Uhr im zoolog. Institut.

Vorsitzender: Herr Th. Studer. Anwesend: 19 Mitglieder und 1 Gast.

1. Herr Th. Studer: **Diluviale Knochen vom Salève; Steinbockgehörn aus den Pfahlbauten.**
2. Herr J. H. Graf: Bericht über die **Exhumierung Steiners.**

913. Sitzung vom 6. März 1897.

Abends 8 Uhr im Storchen.

Vorsitzender: Herr Th. Studer. Anwesend: 19 Mitglieder und 3 Gäste.

Herr P. Gumer: **Neuere Anschauungen über Materie und Energie.**

914. Sitzung vom 20. März 1897.

Abends 8 Uhr im pharmac. Institut.

Vorsitzender: Herr Th. Studer. Anwesend: 26 Mitglieder und 1 Gast.

1. Herr F. Schönenberger: **Die Baumriesen der Schweiz.**

Nach einigen einleitenden Bemerkungen über den ästhetischen und den Nutzwert der Baumvegetation im allgemeinen, wird festgestellt, dass die in Bezug auf Grösse und Schönheit hervorragenden Baumgestalten sich stark vermindern, namentlich seit dem Bau der Eisenbahnen und wegen dem steten Steigen der Holzpreise.

Es ist bisher nicht viel geschehen, um dem Ausrotten dieser Naturdenkmäler in wirksamer Weise entgegen zu treten. Um den Sinn für Baumschönheit in weitere Kreise zu tragen, lässt das eidgenössische Departement des Innern eine Sammlung von Baumphotographien anlegen und durch die Vermittlung des Buchhandels erscheint ein Baumalbum, das im ganzen 25 grosse Lichtdruckbilder umfassen soll, wovon die beiden ersten Lieferungen aufgelegt sind. Zur Demonstration dienen im übrigen eine Anzahl durch den Vortragenden aufgenommene Photographien.

Eine der sehenswertesten unserer Nadelhölzer ist die Fichte von Stiegelschwand hinter Adelboden, deren unterste Aeste schlangenartig ineinander verschlungen sind. Weisstannen von riesigen Dimensionen gibt es eine grosse Zahl. Oefters ist der Hauptgipfel durch eine Anzahl Seitengipfel ersetzt. Sehr schöne Exemplare solcher Kandelabertannen findet man in St. Cergues und bei Orvin auf hochgelegenen Weiden. Bei Blitzingen im Wallis steht die grösste Lärche der Schweiz, deren Alter auf 500 Jahre geschätzt wird. Noch älter ist wahrscheinlich die grosse Eibe auf dem Gerstler, unweit Burgdorf, eine botanische Merkwürdigkeit ersten Ranges.

Die grösste Eiche ist die sog. Bettlereiche, welche zwischen Scherzligen und Gwatt hart an der Landstrasse steht. Die zahme Kastanie ist durch Aufnahmen vertreten, welche zur Blütezeit im Tessin gemacht wurden. Sehr schön ist die Ulme, welche in Bissone am Luganersee steht.

Sodann wird von den geschichtlichen Bäumen gesprochen, unter denen besonders berühmt sind, der Ahorn von Truns, unter welchem 1424 der graue Bund beschworen worden, die Linde von Rilly bei Lausanne, auf welcher 1519 ein Plakat angeschlagen worden, zur Verkündigung der Reformation; die Linden von Münchenwyler, Freiburg und Yvonand, welche angeblich zur Erinnerung an die Schlacht bei Murten gepflanzt worden sein sollen, während man diejenige von Bonvillars mit der Schlacht von Grandson in Verbindung bringt.

Zum Schluss geschieht der in die Schweiz eingeführten exotischen Holzarten Erwähnung. Von hervorragender Schönheit ist die Libanon-Ceder in der Campagne Beaulieu bei Genf, herrührend von Samen, welcher 1735 vom Naturforscher Jussieu vom Libanon gebracht worden ist. In der Villa Roccabella bei Locarno steht die grösste und schönste Araucaria imbricata, welche wir in der Schweiz besitzen, ebenso ein grosser Eukalyptus globulus.

2. Herr E. Kissling: **Funde von Arctomysresten in der Umgegend von Bern.**

3. Herr E. v. Freudenreich: **Die Erreger der Käsereifung.**

Wie Ihnen bekannt, hat die Bakteriologie nicht bloss auf dem Gebiete der Infektionskrankheiten namhafte Errungenschaften zu verzeichnen, sondern auch für die Gärungsindustrien ist sie von grosser Bedeutung gewesen. Ich erinnere Sie bloss an die Fortschritte, welche die Wein- und Bierindustrie durch Anwendung der *Pasteur*'schen Methoden gemacht haben.

Auch auf dem Gebiete der Milchindustrie haben die Bakteriologen seit einigen Jahren eine rege Thätigkeit entfaltet und man hat ihnen bereits einige nennenswerte Fortschritte zu verdanken, so z. B. die Einführung von Reinkulturen bei der Rahmsäuerung zum Zwecke der Butterfabrikation, wodurch eine viel konstantere und gleichmässigere Qualität der Produkte erzielt wird. Dieses Verfahren wird seit ein paar Jahren in Dänemark und Norddeutschland mit viel Erfolg durchgeführt. Für uns in der Schweiz dagegen, wo meist Süssrahmbutter hergestellt wird, hat es noch nicht die gleiche Bedeutung erlangt.

Für unsere Milchindustrie ist wohl der Käse die Hauptsache, und meine bakteriologischen Studien haben daher bis jetzt hauptsächlich den letzteren im Auge gehabt. In dieser Beziehung haben die bakteriologischen Untersuchungen über manche Punkte Aufklärung gegeben, so z. B. über die Ursachen der Blähung, des Bitterwerdens der Käse u. s w. Der Hauptvorgang jedoch bei der ganzen Käsefabrikation, die sog. **Reifung** des Käses ist noch in Dunkelheit gehüllt. Man weiss zwar, dass diese eigentümliche Gärung der Thätigkeit der Bakterien ihre Entstehung verdankt, denn wenn man die Milch vor dem Verkäsen **pasteurisiert**, d. h. die meisten Bakterien derselben abtötet, oder durch Zusatz antiseptischer Mittel das Wachstum der Bakterien im Käse verhindert, so reift der Käse nicht. Jedoch ist es noch nicht gelungen, der Erreger der Reifung des Käses habhaft zu werden. Die Sache scheint doch nicht schwer zu sein, denn wenn diese Käsebakterien im Caseïn einen guten Nährboden finden, so ist zu erwarten, dass sie auf unseren künstlichen Nährböden sich leicht züchten lassen werden. Von allen bis jetzt am Käse isolierten Bakterien hat man jedoch noch nicht mit Sicherheit nachgewiesen, dass die Reifung ihr Werk sei. Abgesehen von den vielen zufällig im Käse angetroffenen Mikroben, konstatiert man nur bei Anwendung der verschiedensten Methoden zur Züchtung aërober oder anaërober Bakterien, dass hauptsächlich zwei Gruppen in demselben vertreten sind: besonders viel Milchsäurefermente (d. h. Bakterien, welche den Milchzucker in Milchsäure und Kohlensäure spalten und in jeder Milch zu finden sind) und auch einige sog. peptonisierende Bakterien, welchen *Duclaux* den Namen **Tyrothrix**-Bacillen gegeben hat. Es sind dieses Bacillen, die wohl der gleichen Familie angehören, wie die weitverbreiteten Heubacillen, welche die Gelatine verflüssigen und in der Milch weitgehende Veränderungen hervorbringen, die bis zur Bildung von Leucin, Tyrosin und Ammoniak gehen können. Es war daher natürlich diesen letzteren Bakterien die Hauptrolle bei der Reifung zuzuschreiben. Jedoch ist mir wie auch anderen bei solchen Untersuchungen ihre geringe Zahl gegenüber den Milchsäurebakterien aufgefallen. Während man in einem Gramm reifenden Käses Millionen der letzteren zählt, findet man die ersteren nur vereinzelt auf den Kulturplatten, einige Hundert per Gramm oder oft auch gar keine. Ja, ich habe feststellen

können, dass sie in kolossaler Menge einer frischen Käsemasse zugesetzt, sehr rasch in derselben absterben; so z. B. enthielt ein Versuchskäse, der mit solchen Bakterien geimpft worden war, 700,000 derselben per Gramm nach der Herstellung, 200,000 nach 5 Tagen, 30,000 nach 15 Tagen und 24.230 nach 4 Wochen, offenbar nur die Abkömmlinge der am Leben gebliebenen Sporen. Wie sollten nun diese Bacillenarten die Reifung bedingen, wenn sie sich im Käse gar nicht vermehren, ja rasch in demselben absterben. Ferner konnte ich durch zahlreiche Versuche feststellen, dass der Zusatz solcher Kulturen zu frischen Käsen die Reifung gar nicht zu befördern schien. Dagegen kam ich in anderen, seit Jahren fortgesetzten Versuchen stets zu dem Resultate, dass der Zusatz von Milchsäurefermenten zu pasteurisierter Milch die Reifung der aus letzterer hergestellten Käse begünstigte, während die Kontrollkäse schlecht oder gar nicht reiften. Ich habe daher schon öfters die Vermutung ausgesprochen, dass unter den Milchsäurefermenten die Erreger der Käsereifung zu suchen seien, jedoch war ich mir wohl bewusst, dass dieser Annahme gewisse Bedenken entgegentreten mussten. Bis jetzt nämlich weiss man von den Milchsäurefermenten nur, dass sie Milchsäure bilden, und von weiteren durch sie bewirkten Zersetzungen des Caseïns weiss man nichts. Bringt man z. B. solche Milchsäurefermente in sterilisierte Milch hinein, so gerinnt die Milch infolge der Säurebildung und erleidet keine weiteren Zersetzungen. Die gebildete Säure wirkt eben antiseptisch und verhindert ein weiteres Wachstum der Bakterien. Ich versuchte nun durch einen Kreidezusatz und öfteres Durchschütteln der Kulturflaschen zunächst die Säure zu neutralisieren und überliess die mit verschiedenen aus Käse isolierten Milchsäurefermenten geimpfte Milch 2—3 Monate sich selber. Nach dieser Zeit wurde die Milch untersucht. Da es sich hier nur um Vorversuche handelte, nahm ich Abstand von einer vollständigen, weitführenden chemischen Analyse und bediente mich eines einfacheren Verfahrens. Bekanntlich befindet sich in der Milch nur ein geringer Teil der Eiweissstoffe in Lösung, der grösste Teil ist bloss suspendiert und wenn man Milch z. B. durch ein *Chamberland*'sches Filter filtriert, so findet man im Filtrate nur etwa den zehnten Teil der gesamten Eiweissstoffe wieder, weil nur der in Lösung befindliche Teil das Filter passiert. Einer der Hauptvorgänge bei der Käsereifung nun ist, dass das Caseïn in lösliche Eiweisssubstanz übergeführt wird, und wenn man ein wässeriges Käseextract herstellt und durch die *Chamberland*'sche Kerze filtriert, so findet man in dem Filtrate diese gelösten Eiweissstoffe wieder. Darauf beruht die von *Duclaux* bei seinen Käseanalysen befolgte Methode, indem er zur Feststellung des Reifungsgrades des Käses das Verhältnis zwischen dem Gesamteiweissstoffe und dem filtrierbar gewordenen Teile desselben bestimmt. Wenn auch das Löslichwerden des Caseïns bei dem Reifungsprozess nicht alles ist, sondern von weiteren Zersetzungen begleitet wird, so bildet es jedenfalls den Anfang und einen Hauptteil des ganzen Prozesses, wie auch spätere Untersuchungen (insbesondere *Bondzynski*, Landw. Jahrbuch der Schweiz, VIII, p. 1894) zeigten.

Statt nun wie *Duclaux* bei seinen Käseanalysen in einer bestimmten Portion das gesamte Eiweiss und den in einer gleichen Portion filtrierbar gewordenen Teil derselben zu bestimmen, was mehrere Trockenrückstand-asche- und Milchzuckerbestimmungen nötig macht, begnügte ich mich, in

dem Filtrat der mit diesen Bakterien geimpften Milch den Stickstoff zu bestimmen (nach *Kjeldahl*). War mehr Stickstoff in einem solchen Filtrat enthalten als im Filtrat einer gleichen bakterienfreien Milch, so musste angenommen werden, dass ein Teil des Caseïns durch die Einwirkung der eingeimpften Bakterien eben löslich gemacht worden sei. Selbstverständlich wurde jedesmal die Reinheit der Kulturen festgestellt. Die Stickstoffbestimmungen konnte ich im Laboratorium des Herrn Dr. Schaffer, mit Hülfe seines Assistenten Herrn Schütz, ausführen. Beiden Herren möchte ich hier meinen besten Dank dafür aussprechen.

Zwei Kolben waren mit einem ovalen Kokkus, der oft als kurze Stäbchen erscheint und wohl mit *Leichmanns* Bacillus der spontanen Milchsäuerung identisch ist, geimpft.

Ein anderer Kolben war mit einem aus Käse isolierten Milchsäureferment in Stäbchenform geimpft.

Zwei fernere Kolben endlich impfte ich mit je 2 anderen Käse-Milchsäurefermenten, die wahrscheinlich identisch sind mit den von mir in früheren Arbeiten Bacillus « und ♂ genannten Mikroorganismen.

Ich werde diese 3 Kulturen A, B und C nennen.

Bei zwei Proben Magermilch gleicher Herkunft fand ich im Filtrat 0,034 und 0,031 % Stickstoff, was einem Gehalt von 0,227 und 0,209 % Caseïn (durch Multiplikation mit dem Caseïnfaktor 6,557) entsprechen würde.

Das Filtrat der Kulturen C dagegen enthielt im ersten Kolben 0,179 % Stickstoff (gleich 1,178 % Caseïn) und im zweiten Kolben 0,152 % Stickstoff (gleich 0,996 Caseïn), also im Mittel 5,1 mal mehr Stickstoff, resp. lösliche Eiweisssubstanz.

Im Filtrat der Kultur B fand ich 0,191 % Stickstoff (gleich 1,225 % Caseïn), d. h. ca. 6,4 mal mehr als in der Kontrollmilch.

Mit der Kultur A waren die Resultate etwas weniger günstig, 0,044 % Stickstoff (gleich 0,989 Caseïn) im ersten Kolben und 0,111 % Stickstoff (gleich 0,73 Caseïn) im zweiten Kolben, oder im Mittel 2,4 mal mehr als in der Kontrollmilch.

Die Milch bläut stets ganz leicht das rote Lacmuspapier. Die Farbe des Filtrates war in den Kulturen B und C bräunlich, in der Kultur A dagegen hellgelb, wie das Filtrat der Kontrollmilch. Geruch und Geschmack der geimpften Milchproben waren ganz eigentümlich und sehr verschieden von dem der Kontrollmilch.

Wie sind nun diese Versuche zu deuten? Sicher ist dadurch festgestellt, dass in diesen Kulturen, besonders in den Kulturen B und C ein Teil des Caseïns in lösliche Eiweisssubstanz übergeführt worden ist. Sollte dieses etwa bloss der Einwirkung der gebildeten Milchsäure zuzuschreiben sein? Um diese Frage zu entscheiden, versetzte ich Milch mit 0,5—1 und 2 % Milchsäure und untersuchte letztere Probe, nachdem sie einige Zeit bei 37° verblieben war, indem ich den Stickstoffgehalt des Filtrates bestimmte. Derselbe betrug 0,034 %, derjenige der filtrierten Kontrollmilch 0,031. Wie man sieht, liegen hier die Differenzen innerhalb der zulässigen Fehlergrenzen. Die beiden anderen Milchproben werde ich nach längerer Zeit analysieren, ich glaube aber schon jetzt annehmen zu dürfen, dass die in meinen Versuchen konstatierte Lösung des Caseïns nicht etwa auf die blosse Einwirkung der gebildeten Milchsäure zurückzuführen ist. Daraus ergibt sich also, dass Milchsäure-

fermente in der That fähig sind, das Caseïn in lösliche Eiweisssubstanz überzuführen und dieses muss, mit Rücksicht auf ihre so starke Vermehrung im Käse, zu der Annahme führen, dass dieselben bei dem Reifungsprozesse des Käses sich hauptsächlich beteiligen, da dieser Prozess zum grossen Teil in dem Löslichwerden der Eiweisssubstanz besteht. Meine früher ausgesprochene Vermutung, dass sie bei der Reifung des Emmenthalerkäses eine grosse, ja vielleicht die alleinige Rolle spielen, gewinnt dadurch an Wahrscheinlichkeit.

Ich bin mir freilich bewusst, dass die dargelegten Versuche nur als Vorversuche gelten können, und es sind daher bereits weitere Versuche im Gange, die darüber volle Klarheit schaffen werden. Sollten dieselben die bisherigen Resultate bestätigen und erweitern, so brauche ich kaum auf die wichtigen Folgen hinzuweisen, die sich daraus für die Praxis ziehen lassen. Denn Hauptbedingung, um die Reifung des Käses etwa durch Zusatz von Bakterien zu begünstigen, ist, dass wir die Bakterien kennen, welche die Reifung bewirken.

915. Sitzung vom 1. Mai 1897.

Abends 8 Uhr im pharmac. Institut.

Vorsitzender: Herr Th. Studer. Anwesend: 18 Mitglieder.

1. Eingelangt ist ein Schreiben, in welchem der S. A. C. (Sektion Bern) die naturforschende Gesellschaft ersucht, 2 Delegierte zu bezeichnen, zur Besprechung der Frage, wie die verschiedenen wissenschaftlichen Vereine der Stadt Bern ein eigenes Heim sich schaffen könnten. — Die Bezeichnung der Delegierten ist dem Vorstande überlassen.
2. Wahlen: Zum Präsidenten für das Vereinsjahr 1897/98 wird gewählt Herr Prof. Dr. Edm. Drechsel, zum Vicepräsidenten: Herr Prof. Dr. Ed. Fischer.
3. Herr A. Tschirch: **Drei botanische Gärten in den Tropen.**

916. Sitzung vom 12. Juni 1897.

Abends 8 Uhr im Storchen.

Vorsitzender: Herr Edm. Drechsel. Anwesend: 16 Mitglieder.

1. Herr Th. Studer verliest den Jahresbericht pro 1896/97.
2. Das Centralkomitee der Schweizerischen naturforschenden Gesellschaft wünscht, dass offiziell angezeigt werden möchte, ob die naturforschende Gesellschaft von Bern das Jahresfest pro 1898 übernehmen wolle. Die Anmeldung wird einstimmig beschlossen.
3. Die Jahresrechnung für das verflossene Jahr wird genehmigt.
4. Herr Edm. Drechsel: **Die Aufgaben der physiologischen Chemie.**

917. Sitzung vom 4. Juli 1897.

in Aarwangen.

Gemeinsam mit der naturforschenden Gesellschaft von Solothurn.

1. Herr Dr. Köpsel: **Das Elektrizitätswerk in Wynau.**
2. **Nachmittags Besichtigung der Anlagen** in Wynau.

918. Sitzung vom 6. November 1897.

Abends 8 Uhr im Storchen.

Vorsitzender: Herr Ed. Fischer. Anwesend: 21 Mitglieder und 1 Gast.

1. Herr A. Tschirch hält eine **Gedächtnisrede auf den verstorbenen Präsidenten unserer Gesellschaft, Herrn Dr. Ed. Drechsel.**
2. Herr Ed. Brückner: **Gute und schlechte Weinjahre in ihren Beziehungen zu den Klimaschwankungen.**

919. Sitzung vom 20. November 1897.

Abends 8 Uhr im geolog. Institut.

Vorsitzender: Herr Ed. Fischer. Anwesend: 28 Mitglieder und 7 Gäste.

1. Herr A. Baltzer: **Fossile Mammuthleichen aus dem Eise Neu-Sibiriens.**
   Lieferung XXX der Beiträge zur geolog. Karte der Schweiz.
   Ein neues Barytvorkommen aus dem Oberland.
2. Herr Ed. Brückner: **Die Verbreitung des Eisbodens in Sibirien.**

920. Sitzung vom 4. Dezember 1897.

Abends 8 Uhr im Storchen.

Vorsitzender: Herr Ed. Fischer. Anwesend: 15 Mitglieder.

Herr O. Hug: **Der Isteinerklotz bei Basel.**

921. Sitzung vom 19. Dezember 1897.

Abends 8 Uhr im Storchen.

Vorsitzender: Herr Ed. Fischer. Anwesend: 18 Mitglieder.

1. Herr E. Kissling: **Der Quellenerguss der städtischen Wasserversorgung in den letzten 30 Jahren.**
2. Herr Kaufmann: **Demonstration von Spinnennestern aus Corsika und Lärchennadelballen aus dem Silser See.**
3. Herr J. H. Graf weist **Reproduktionen alter Karten** vor.
4. Herr Th. Studer: **Die Fortpflanzungsgeschichte der Aale.**

Verzeichnis der Mitglieder

der

Bernischen Naturforschenden Gesellschaft.

(Am 31. Dezember 1897.)

---

it * bezeichneten Mitglieder wurden im Jahre 1897 neu aufgenommen.

Vorstand.

Dr. *Ed. Fischer,* Vice-Präsident bis 1. Mai 1898.
ıder, jun., Apotheker, Kassier seit 1875.
. Kissling, Sekretär seit 1892, Unterbibliothekar seit 1888.
Dr. *J. H. Graf,* Redaktor der Mitteilungen seit 1883.
h. Steck, Oberbibliothekar und Geschäftsführer des Lesezirkels.

Mitglieder.

	Eintritt.
nderegg, Ernst, Dr. phil. und Gymnasiallehrer, Bern	1891
ndreae, Philipp, Apotheker, Bern	1883
adertscher, Dr. A., Sekundarlehrer, Bern	1888
almer, Dr. Hans, Bern	1886
altzer, Dr. A., Professor der Mineralogie und Geologie, Bern	1884
aumberger, Ernst, Sekundarlehrer in Basel	1890
eck, Dr. Gottl., Lehrer des Freien Gymnasiums, Bern	1876
Benoit, Dr. jur. G., Bern	1872
enteli, A., Rektor und Docent, Bern	1869
enteli, A., V. D. M., Bern	1891
erdez, H., Professor an der Tierarzneischule, Bern	1879
rückner, Dr. Ed., Prof. der Geographie, Bern	1888
runner, C., Dr. phil., Trautsohngasse 6, Wien	1846
üchi, Fr., Optiker, Bern	1874
urri, Dr. phil., Prosektor	1895
Büren, Eug., allié von Salis, Sachwalter, Bern	1877
herbuliez, Dr. Direktor, Mülhausen	1861
oaz, eidgenössischer Oberforstinspektor, Bern	1875
onrad, Dr. Fr., Arzt in Bern	1872
ramer, Gottl., Arzt in Biel	1854
relier, Dr., Sekundarlehrer in St. Immer	1896
ick, Dr. Rud., Arzt in Bern	1876
roz, Arnold, Kantonsschullehrer in Pruntrut	1890

		Eintritt.
24.	*Dubois*, Dr. med., Arzt, Privatdocent, Bern	1884
25.	*Dumont*, Dr. med. F., Arzt, Privatdocent, Bern	1890
26.	*Dutoit*, Dr. med., Arzt in Bern	1867
27.	*Eggenberger*, J., Dr. phil., eidg. Beamter, Könizstr. 32, Bern	1892
28.	*Engelmann*, Dr., Apotheker in Basel	1874
29.	*v. Fellenberg*, Dr. phil. E., Bergingenieur, Bern	1861
30.	*Fischer*, Dr. phil. Ed., Professor der Botanik, Bern	1885
31.	*Fischer*, Dr. L., Professor der Botanik, Bern	1852
32.	*v. Freudenreich*, Dr. E., Bern	1885
33.	**Friedheim*, D., Prof., Bern	1897
34.	*de Giacomi*, J., Dr. med., Arzt und Privatdocent, Bern	1889
35.	*Girard*, Prof. Dr. med., Arzt in Bern	1876
36.	*Gosset*, Philipp, Ingenieur, Wabern bei Bern	1865
37.	*Graf*, Dr. J. H., Professor der Mathematik, Bern	1874
38.	*Gressly*, Alb., Oberst, Maschinen-Ingenieur, Bern	1872
39.	*Grimm*, J., Präparator, Bern	1876
40.	*Gruner*, Dr. Paul, Gymnasiallehrer und Docent, Bern	1892
41.	*Guillebeau*, Professor Dr., Bern	1878
42.	*Haaf*, C., Droguist, Bern	1857
43.	*Haas*, Dr. med. Sigismund, Arzt in Muri b. Bern	1890
44.	*Hafner*, René, Apotheker in Biel	1891
45.	*Hasler*, Dr. phil. G., Dir. d. Telegraphen-Werkstätte, Bern	1861
46.	*Held*, Leon, Ingenieur, Bern	1879
47.	*Holzer*, Ferd., Lehrer in Oberwyl bei Büren	1890
48.	*Huber*, Dr. G., Professor der Mathematik, Bern	1888
49.	*Huber*, Rud., Dr. phil., Gymnasiallehrer, Bern	1891
50.	**Hug*, Otto, Dr. phil., Bern	1897
51.	**Jadassohn*, Dr. Prof., Bern	1897
52.	*Jenner*, E. Entomolog, hist. Museum, Bern	1870
53.	*Jonquière*, Dr., Professor der Medicin, Bern	1853
54.	*Jonquière*, Dr. med. Georg, Arzt in Bern	1884
55.	*Käch*, P., Sekundarlehrer in Bern	1880
56.	*Kaufmann*, Alfr., Dr. phil. und Gymnasiallehrer, Bern	1886
57.	*Kesselring*, H., Lehrer an der Sekundarschule in Bern	1870
58.	*Kissling*, Dr. E., Sekundarlehrer und Privatdocent, Bern	1888
59.	*Kobi*, Dr., Rektor der Kantonsschule Pruntrut	1878
60.	*Kocher*, Dr., Professor der Chirurgie, Bern	1872
61.	*Koller*, G., Ingenieur, Bern	1872
62.	*von Kostanecki*, Dr., Prof. der Chemie, Bern	1896
63.	*König*, Emil, Dr. phil., Gymnasiallehrer, Bern	1893
64.	*Körber*, H., Buchhändler in Bern	1872
65.	*Kraft*, Alex., Besitzer des Bernerhofs, Bern	1872
66.	*Krebs*, A., Seminarlehrer in Bern	1888
67.	*Kronecker*, Dr. H., Professor der Physiologie, Bern	1884
68.	*Kummer*, Dr. med. J., Arzt in Bern	1890
69.	*Kürsteiner*, Dr. med., Bern	1895
70.	*Lanz*, Dr. Em., Arzt in Biel	1876
71.	*Leist*, Dr. K., Lehrer an der Sekundarschule, Bern	1888
72.	*Lindt*, Dr. med. Wilh., Arzt in Bern	1854
73.	*Lindt*, Dr. med., W. jun., Arzt und Docent, Bern	1888
74.	*Lochbrunner*, Th., Uhrenmacher in Bern	1896

	Eintritt.
ory, C. L., Rentier, Münsingen	1894
ischer, E., Dr. med., Bern	1895
ütschg, J., Waisenvater, Bern	1872
arckwald, Dr. Max, Frankfurt a. M.	1889
arti, Christian, Sekundarlehrer in Nidau	1889
arti, Lehrer a. d. N. Mädchenschule, Bern	1892
oser, Dr. phil. Ch., Privatdocent, Bern	1884
üller, Emil, Apotheker in Bern	1882
üller, Professor Dr., P., in Bern	1888
üller, Max, Dr. med., Bern	1893
ünger, F., Dr. phil., Sekundarlehrer, Basel	1892
Mutach, Alfr., von Riedburg, Bern	1865
ützenberg, Dr. med. Ernst, Spiez	1885
anni, Dr. Wilh., Arzt in Mühleberg	1890
icolet, L., Pharmacien, St. Imier	1892
)tti, Dr. Joh., Lehrer auf der Rütti	1897
fister, J. H., Mechaniker in Bern	1871
flüger, Dr. Professor, Bern	1889
ulver, E., Apotheker in Interlaken	1890
ulver, G., Vorsteher in Hindelbank	1891
is, F., Lehrer der Physik am städt. Gymnasium	1869
ossel, A. Dr., Professor der Chemie, Luterbach	1893
othenbach, Alfr., Gasdirektor in Bern	1872
othenbühler, Sekundarlehrer, Bern	1896
ubeli, Dr. O., Professor an der Tierarzneischule, Bern	1892
uhli, Professor Dr. H., in Bern	1875
·hällibaum, Dr. H., Arzt in Sils-Maria	1889
:haffer, Dr., Kantonschemiker und Docent, Bern	1878
:hlachter, Dr., Lehrer an der Lerberschule, Bern	1884
:hmid, Dr. W., Major im Generalstab, Bern	1891
:hmidt, F. W., Dr. phil., Assistent am chem. Laboratorium, Bern	1893
:hönenberger, eidgen. Forstadjunkt, Bern	1894
:huppli, M., Direktor der N. Mädchenschule, Hilterfingen	1870
:hütz, Assistent des Kantonschemikers, Bern	1896
:hwab, Alfr., Banquier in Bern	1873
:hwab, Sam., Dr. med., Bern	1885
'dler, Dr., Professor der Astronomie, Bern	1872
ähli, F., Dr. phil., Gymnasiallehrer in Burgdorf	1893
eck, Th., Dr. phil., Conservator am Naturhist. Museum, Bern	1878
. Steiger, Hans, Major, Bern	1897
ooss, Prof. Dr. med. Max, Arzt in Bern	1883
rasser, Dr. Hans, Professor der Anatomie, Bern	1872
uder, Bernhard, sen., Bern	1844
uder, Bernhard, Apotheker, Bern	1871
uder, Dr. Theophil, Professor der Zoologie, Bern	1868
uder, Wilhelm, Apotheker in Bern	1877
ımbor, J., Dr. phil., Chem. Laboratorium, Bern	1894
ınner, G. H., Apotheker in Bern	1882
ıvel, Professor Dr. E., Bern	1892
hiessing, Dr., Redaktor, Bern	1867

		Eintritt.
125.	*v. Tscharner,* Dr. phil. L., Oberstlt., Bern	1874
126.	*v. Tscharner-de Lessert,* Oberstlieutenant, Bern	1878
127.	*Tschirch,* Dr. A., Professor der Pharmakognosie in Bern	1890
128.	*Valentin,* Professor Dr. med. Ad., Arzt in Bern	1872
129.	*Volz,* Wilhelm, Apotheker in Bern	1887
130.	*Wäber-Lindt,* A., Bern	1864
131.	*Wagner,* Karl, Dr. phil., Enge-Zürich	1892
132.	*Walthard,* Max, Dr. med., Arzt in Bern	1894
133.	*Wanzenried,* Sekundarlehrer in Grosshöchstetten	1867
134.	*v. Wattenwyl-v. Wattenwyl,* Jean, Grossrat, Bern	1877
135.	*Weingart,* J., Schuldirektor in Bern	1875
136.	*Wüthrich,* Dr. phil. E., Direktor der Molkereischule Rütti	1892
137.	*Wyss,* Dr. G., Buchdrucker in Bern	1887
138.	*Wyttenbach-v. Fischer,* Dr., Arzt in Bern	1872
139.	*de Zehender,* Marq., Ingenieur, Bern	1874
140.	*Zeller,* R., Dr. phil., Geolog, Bern	1893
141.	*Ziegler,* Dr. med. A., eidgen. Oberfeldarzt, Bern	1859
142.	*Zumstein,* Dr. med. J. J., in Marburg	1885
143.	*Zwicky,* Lehrer am städt. Gymnasium, Bern	1856

Im Jahre 1897 ausgetreten:

Berlinerblau, Dr., Sosnowice	1887
Frank, L., Assistent am chem. Laboratorium, Bern	1859
Fueter-Schnell, Apotheker, Bern	1894
Hess, E., Professor an der Tierarzneischule	1883

Im Jahre 1897 verstorben:

Bourgeois, E., Dr. med., Arzt in Bern	1872
Drechsel, Prof. Dr., Bern	1892
Rothen, Dr. phil., internationaler Telegraphendirektor, Bern	1872
Wander, Dr. phil., Chemiker, Bern	1865

Korrespondierende Mitglieder:

1.	*Biermer,* Dr. Professor in Breslau	1861
2.	*Flesch,* Dr. M., Arzt in Frankfurt	1882
3.	*Gasser,* Dr. E., Professor der Anatomie in Marburg	1884
4.	*Graf,* Lehrer, in St. Gallen	1858
5.	*Grützner,* Dr. A., Prof. in Tübingen	1881
6.	*Hiepe,* Dr. Wilhelm, in Birmingham	1874
7.	*Imfeld,* Xaver, Topograph in Hottingen	1880
8.	*Krebs,* Gymnasiallehrer in Winterthur	1864

		Eintritt.
9.	*Landolf*, Dr., in Chili	1881
10.	*Lang*, Dr. A., Professor in Zürich	1876
11.	*Leonhard*, Dr., Veterinär in Frankfurt	1870
12.	*Lichtheim*, Professor in Königsberg	1881
13.	*Metzdorf*, Dr. Professor der Vet.-Sch. in Proskau, Schlesien	1870
14.	*Petri*, Dr. Ed., Prof. der Geographie in St. Petersburg	1883
15.	*Pütz*, Dr. H., Professor der Vet.-Med., Halle a. S.	1870
16.	*Regelsperger*, Gust., Dr., rue la Boétie 85, Paris	1883
17.	*Rothenbach*, Lehrer am Lehrerseminar in Küssnacht	1871
18.	*Wälchli*, Dr. med. D. J., Buenos Ayres	1873
19.	*Wild*, Dr. Professor, in St. Petersburg	1859

Aufnahmen im Jahre 1897.

v. Steiger, H., Major, Bern.
Otti, Joh., Dr., Lehrer auf der Rütti.
Hug, Otto, Dr., Bern.
Jadassohn, Prof., Dr., Bern.
Friedheim, Prof., Dr., Bern.

Auszug

aus der

Jahres-Rechnung der Bernischen Naturforschenden Gesellschaft.

1896

Einnahmen.

An Jahresbeiträgen	Fr.	1208. —
An Eintrittsgeldern	„	20. —
An Zinsen	„	105. 05
An verkauften Mitteilungen	„	60. —
Aus dem Reservefonds	„	228. 55
	Fr.	1621. 60

Ausgaben.

Passiv-Saldo letzter Rechnung	Fr.	142. 24
Mitteilungen	„	857. 10
Sitzungen	„	117. 50
Bibliothek	„	193. 05
Leszirkel	„	188. 80
Verschiedenes	„	351. 81
	Fr.	1850. 50

Bilanz.

Die Ausgaben betragen	Fr.	1850. 50
Die Einnahmen betragen	„	1621. 60
Es ergibt sich demnach ein Passiv-Saldo von	Fr.	228. 90

Reservefonds.

Saldo letzter Rechnung	Fr.	2528. 55
im Rechnungsjahr bezogen	„	228. 55
Bestand auf 31. Dezember 1896	Fr.	2300. —

Vermögensetat.

Das Vermögen besteht auf 31. Dezember 1896 im Reservefonds	Fr.	2300. —
weniger dem Passiv-Saldo obiger Rechnung	„	228. 90
	Fr.	2071. 10

Der Kassier: **B. Studer**, Apoth.

A. Baltzer.

Notiz über ein Mineralvorkommen im Berneroberland.

(Eingereicht den 12. März 1897.)

Im Quellgebiet der grossen Emme befindet sich eine ziemlich ansehnliche Alp, die Riedernalp (bei circa 1400 m.). Sie liegt, näher bezeichnet, auf der Rück- oder nördlichen Seite des Riedergrates, der selbst nichts anderes ist als eine Fortsetzung des Brienzergrates.

Von dieser Alp nun wurden in neuerer Zeit eigenthümliche graue, schwere Kugeln bekannt, die mir von Herrn Pfarrer Studer in Ringgenberg zur Untersuchung freundlichst mitgetheilt wurden.[1]) Form rund oder länglichrund, die eine der Kugeln hat $2^1/_2$ die andere 6 cm. Längs- und 5 cm. Querdurchmesser. Auch grössere sollen vorkommen. Inneres dunkelgrau, Aussenseite hell. Die 1 mm. dicke Rinde geht allmählig in die dunkle Masse über. Das Innere besteht in der Hauptsache aus der dunkelgrauen, gleichmässig dichten Substanz. Der Kern dagegen ist deutlich krystallinisch, theils hell, durchsichtig, theils schwach nelkenbraun gefärbt, mit dem Messer leicht ritzbar. Von ihm ziehen sich unregelmässige Adern sternförmig in die Masse hinein, bis nahe an die Peripherie, was bei beiden der mir vorliegenden Kugeln zu sehen ist. Bei der einen tritt gleichzeitig eine undeutliche peripherische Anordnung der Adern auf.

[1]) Ich spreche dafür Herrn Pfarrer Studer meinen verbindlichsten Dank aus und bin überhaupt für Mittheilung neuer Vorkommnisse an Versteinerungen und Mineralien unserer Gegend immer dankbar. Während ich von Personen der verschiedensten Stände unseres Kantons schon öfters im Lauf der letzten 12 Jahre Anfragen oder Zusendungen erhielt, glänzten nur die Landärzte auffallender Weise durch anscheinend gänzliche Interesselosigkeit für Geologie! Es mag dies an der Vernachlässigung dieses Faches in Folge der streng beruflichen Ausbildung unserer Mediziner an der Hochschule liegen.

Die graue Hauptmasse hat unebenen Bruch, Härte etwas über 3, braust mit Säuren langsam aber anhaltend auf (auch mit verdünnter Essigsäure). Aufbau gleichmässig, weder schalig noch strahlig.

Die qualitative Analyse ergab mir Baryt, Kalk, Schwefelsäure, Kohlensäure; ferner Spuren von Eisen, Thonerde und Strontian. Im salzsauren Auszug ist Baryt nicht, dagegen Kalk und eine Spur Strontian vorhanden. Aller Baryt ist also an Schwefelsäure gebunden. Auf der Kohle mit Soda erhitzt entsteht eine schmutzig-röthliche undurchsichtige Masse.

Die weisse krystallinische Kernsubstanz konnte wegen Mangel an reinem Material noch nicht näher untersucht werden, kann indessen nach einigen Vorversuchen dieselben Bestandtheile wie die graue Masse enthalten. Möglicherweise handelt es sich hier um Kalkbaryt, Dreelit oder auch nur um ein Gemeng von Kalkspath und Baryt.

Hiernach sind die Kugeln Concretionen[1]) von dichtem Schwerspath, gemengt mit circa $^1/_8$—$^1/_4$ von kohlensaurem Kalk[2]); der krystallinische Kern bleibt ausser Betracht.

Die Art des Vorkommens ist mir unbekannt. Bei Kaufmann[3]) finde ich nichts darüber, auch nicht in Kenngott's Mineralien der Schweiz. Jener gibt in dieser Gegend (Blatt XIII der geologischen Karte) unteren Flysch und Wangschichten an; es ist möglich, dass die Kugeln in den letzteren vorkommen, da genannter Autor in ihnen Feldspath, Quarz, Glauconit, Pyrit anführt.

---

[1]) Genau genommen zeigen sie die Merkmale von Con- und Secretionen (sogenannte Septarien). Die Concretion trocknete aus, erhielt ein sternförmiges Risssystem und auf demselben erfolgte die Infiltration und Ausfüllung durch die krystallinische Masse.

[2]) Chemische Bindung desselben wegen Ausziehbarkeit durch Essigsäure nicht wahrscheinlich.

[3]) Beiträge z. geol. Karte d. Schweiz XXIV, 1.

E. Kissling.

Neue Funde von diluvialen Arctomysresten aus der Umgegend von Bern.

(Eingereicht am 9. März.)

Seitdem durch *Th. Studer* die *Arctomysreste* aus den glacialen Ablagerungen der näheren Umgebung von Bern[1]) bekannt geworden sind, wurden in jüngerer und letzter Zeit 2 Funde gemacht, welche ein relativ bedeutendes Material geliefert haben und die in den nachfolgenden Zeilen kurz beschrieben werden sollen.

Die eine der Fundstellen befindet sich auf dem *Ferrenberg* bei *Stettlen*, die andere im *Steinibach* bei *Belp*.

Am südlichen Gehänge des *Bantigers*, ungefähr 150 m. über der Sohle des Worblenthales, ist ein deutlich ausgesprochenes Plateau vorhanden, bedeckt von glacialen Ablagerungen, z. Th. typischen Wallmoränenformen. Eine dieser Moränen sitzt unmittelbar auf den Molasseschichten, welche den Abhang gegen das Dorf *Stettlen* zusammensetzen, auf und ist auf der Karte bezeichnet mit dem Namen »*Buchholz*«. Es ist dies ein bewaldeter Rücken, der sich so ziemlich in der Nord-Südrichtung hinzieht und dessen convexe Seite nach Osten gerichtet ist.

Am südlichen Ende des Walles nun, und zwar auf seiner Aussenseite wurde in jüngster Zeit in der Höhe von circa 650 m. eine Kiesgrube angelegt. In dem tiefen Einschnitt erkennen wir folgendes Profil:

[1]) *Th. Studer*: Ueber die Arctomysreste aus dem Diluvium der Umgegend von Bern. Mittheilungen d. naturf. Ges. Bern. 1888, pag. 71 u. ff.

1) sandige Letten 2m.
2) gelbe Letten
3) Schicht mit groben, meist eckigen Blöcken (Oberflächenmoräne)
4) feinen Kies in Form eines Stockes, an welchen sich die unter 1—3 genannten Schichten anlegen, ein ähnliches Verhältniss, wie es gegenwärtig beim Durchstich der Endmoräne des Aaregletschers beim Schänzli zu beobachten ist.

Das Material aus Schicht 3 weist auf Anwesenheit des Aargletschers hin. Es kommen vor zahlreiche Blöcke von typischem Protogin; seltener sind sericitische Gneisse, schwarze Alpenkalke und Niesensandsteine, häufig aber Molasseblöcke, was auf lokale Aufarbeitung schliessen lässt.

Während so auf dem Plateau oben Aaregletschermaterial liegt, sind für die Thalsohle unzweifelhafte Rhonegeschiebe nachgewiesen. (Euphotid bei Sinneringen durch Dr. v. Fellenberg, Eklogit beim Ziegelhäusi durch den Verfasser.)

In der Schicht 4 nun sind zu Beginn dieses Jahres Murmelthierknochen gefunden worden, auf die mich Herr Lehrer Frauchiger in Stettlen aufmerksam gemacht hat.

Die Ueberreste gehören wenigsten 4 verschiedenen Individuen an. Es sind:

1) Ein vollständig erhaltener Schädel mit zugehörigem, linkem Unterkiefer, von brauner Farbe, einem alten Thiere angehörend.
2) Der Schädel eines alten Thieres mit linkem Unterkiefer. Nasenbeine und ein Theil des linken Oberkiefers fehlen; Nagezähne von intensiv gelber Farbe.
3) Die beiden Unterkiefer eines mittelgrossen Thieres. Die Mahlzähne zeigen merkwürdig stark abgekaute Flächen. Der vorderste Prämolar mit sehr undeutlichem Höcker.
4) Ein defekter Schädel mit zugehörigen Unterkiefern eines jungen, eben im Zahnwechsel begriffenen Thieres. Der vorderste Milchzahn mit nur zwei Wurzeln und schwach angedeutetem Höcker.

Ausserdem fanden sich noch:

3 Humeri, sämmtliche mit den Knochenbrücken, 2 Ulnae, 2 Radii, 2 Beckenhälften, 3 Oberschenkelknochen, 1 Tibia und endlich 14 Wirbel, worunter Atlas und Epistropheus.

Ueber die Grössenverhältnisse der Schädel 1 und 2 gibt die nachstehende Tabelle Aufschluss.

Was nun den Fund vom Buchholz bemerkenswerth macht, ist der Umstand, dass die sämmtlichen Knochen beisammen in einer noch wohlerhaltenen Fluchtröhre lagen. Leider war diese zur Zeit, da ich mich an Ort und Stelle begab, von den Arbeitern bereits zerstört.

Ilingegen waren etwas höher oben in dem stockförmigen Kies 4 andere Röhren sehr schön zu sehen, von denen zwei etwa 1 m., die beiden anderen 1,5 m. weit in die Moräne hinein gereicht haben mögen, und die einen Durchmesser von ungefähr 1 dm. besassen. Am Boden fand sich, namentlich gegen das hintere Ende zu, eine eigenthümliche, schwarzbraune, organische Masse. (Reste von Excrementen?) Die Wände sodann waren ausgekleidet mit einem schneeweissen, flaumigen Ueberzug, der sich bei der Prüfung als kohlensaurer Kalk erwiesen hat.

Nach den angeführten Verhältnissen zu schliessen, darf man wohl annehmen, dass der abgedeckte Bau eine Sommerwohnung gewesen ist.

Ein ebenso interessanter Fund ist im Sommer 1893 im *Steinibach* bei *Belp* gemacht worden.

Nordwärts vom genannten Orte beginnt eine Seitenmoräne des Aaregletschers, die sich verfolgen lässt bis in die Gegend von *Kaufdorf* und so als seitlicher Wall das Belpbecken begrenzt auf eine bedeutende Erstreckung hin. Nach dem Becken zu fällt die Moräne ziemlich steil ab und geht dann über in vorerst noch unregelmässig geschichteten Glacialschutt, welcher weiter unten am Gehänge zur typischen Deltabildung wird, deren schiefe, gegen das Becken zu einfallende Schichtung aufgeschlossen ist in einer Kiesgrube ob dem Hofe *Scheuermatt.*

Unmittelbar unter dem Wirthshaus zum Steinibach ist am Abhang eine Grube angelegt worden (auf Quote 540 circa), aus welcher der Eigenthümer, Herr Wirth Steffen, gelegentlich das nöthige Schottermaterial gewinnt.

Dort deckten die Arbeiter in dem feinen Kies Murmelthierreste auf, die von den Herren Steffen und Sekundarlehrer Lory sorgfältig gesammelt und sodann durch Herrn Dr. Steck dem Museum in Bern übergeben worden sind.[1])

[1]) Herr Prof. Studer war so freundl., mir die Schädel zur Messung zu überlassen.

Die Knochen lagen in einem 50 cm. im Durchmesser haltenden Kessel, der ungefähr 6 m. tief im Moränenschutt drin angelegt war. Wir haben daher offenbar eine geräumige Winterwohnung vor uns, in welcher eine ganze Familie vom Untergang ereilt worden ist.

Es fanden sich:

1) Ein vollständiger Schädel und beide Unterkiefer eines alten Thieres.
2) Ein vollständiger Schädel mit beiden Unterkiefern, von etwas geringeren Dimensionen, als der vorige.
3) Ein Schädel mit abgebrochenen Jochbogen und die zwei Unterkiefer eines alten Thieres.
4) Fin defekter Schädel mit abgebrochenen Jochbogen und zwei Unterkiefer eines jüngeren Thieres.

Von den zahlreichen weiteren Skeletttheilen sind zu nennen: 6 Schulterblätter, 7 Oberarmknochen, sämmtliche mit den Knochenbrücken, 4 Radii, 5 Ulnae, 6 Beckenhälften, 6 Oberschenkelknochen, 7 Tibiae, 2 Fibulae, 4 Kreuzbeine und 47 Wirbel.

Von den 4 Kreuzbeinen zählt eines 4 Wirbel; der letzte ist vom dritten durch eine deutlich sichtbare Naht getrennt.

Die beiden Funde vermehren so die bis jetzt bekannten Reste der **Marmotta** nebst anderen Skelettstücken um 7 Schädel, unter welchen 3 vollständig erhaltene und 14 Unterkiefer.

Für 6 der Schädel habe ich in der nachstehenden Tabelle die wichtigeren Masse nach *Hensel*[1]) eingetragen.

	Buchholz bei *Stettlen.*		*Steinibach* bei *Belp.*			
	Nr. 1.	Nr. 2.	Nr. 1.	Nr. 2.	Nr. 3.	Nr. 4.
Basilarlänge	95	93	95	93	93	83
Scheitellänge	114	—	110,5	108	—	88
Grösste Breite an den Jochbogen	64	62	64	62	58	—
Grösste Breite des Hinterhauptes	45,5	44	44	42,5	—	—
Höhe des Hinterhauptes	29	26	29	27	27	24
Länge des Unterkiefers	68	66,5	68	65	64,5	58

[1]) Hensel, Mammologische Notizen. Archiv f. Naturgesch., 45. Jahrgang, 2. Heft, pag. 202 u. f.

Unter den Schädeln sind die beiden Nr. 1 vom Buchholz und vom Steinibach mit einer Basilarlänge von 95 mm. die grössten bis dahin in unserer Umgebung aufgefundenen. (Der grösste von Studer gemessene Schädel von Grafenried misst nur 92 mm.)

Recht auffallend ist der Unterschied in der Breite an den Jochbogen gegenüber einem *Bobac.* Während diese an unseren grössten Schädeln nur 64 mm. beträgt, erreicht sie bei einem Bobacschädel von 92 mm. Basilarlänge 67 mm.

In sämmtlichen Unterkiefern hat der vorderste Prämolar, wie es für *Marmotta* charakteristisch ist, 3 Wurzeln und lässt auf seiner Vorderseite den kleinen Höcker erkennen, der jedoch nicht immer deutlich ausgeprägt ist.

J. H. Graf.

Die Exhumirung Jakob Steiner's

und die

Einweihung des Grabdenkmals Ludwig Schläfli's

anlässlich der Feier des hundertsten Geburtstages Steiner's

am 18. März 1896.

(Mit 3 Beilagen.)

Am 1. April 1863 starb in Bern der grosse Synthetiker *Jakob Steiner* von Utzenstorf.

Schon 1834 zum Mitgliede der königl. preussischen Akademie der Wissenschaften ernannt, wurde er 1835 ausserordentlicher Professor der Mathematik an der Berliner Universität und blieb in dieser bescheidenen Stellung bis an das Ende seiner Thätigkeit als Lehrer. Diese ausserordentliche Professur war speziell für ihn geschaffen worden, Steiner ist aber nie zum ordentlichen Professor befördert worden. Steiner [1]) hat diese Nichtbeachtung seiner Verdienste tief empfunden; auf seine Eingabe um gebührende Stellung hat er nicht einmal Antwort und seit 22 Jahren keine Beförderung erhalten, worüber ihn allerdings Staatsrath v. *Herrmann* in München mit den Worten tröstete, dass dies «nur zu Preussens nicht zu seiner Schande gereiche, habe er doch eine geometrische Welt geschaffen». Gekränkt hat es ihn aber doch, ja er konnte diese persönliche Missachtung auf dem Todbette noch nicht einmal vergessen. Dies und anderes machten, dass Steiner mit der Mitwelt allmählig zerfiel. Er ver-

[1]) Vergleiche Graf J. H., «Der Briefwechsel zwischen Jakob Steiner und Ludwig Schläfli.» Bern. Mittheilungen 1896, S. 256 und Separatabzug S. 200.

Jakob Steiner
(1796—1863)

J. H. Graf.

Die Exhumirung Jakob Steiner's

und

Einweihung des Grabdenkmals Ludwig Schläfli's

zur Feier des hundertsten Geburtstages

am 18. März 1896.

Jakob Steiner
(1796—1863)

bitterte sich in seinen letzten Lebensjahren immer mehr das Leben, ja ein menschenfeindliches Misstrauen beschlich seine Natur; er nannte sich selbst einen ausgebrannten Krater. Treffender vergleicht ihn *C. F. Geiser* mit dem verstümmelten Torso eines Herkules.

E. Lampe sagt mit Recht:[1] «Ein letztes frohes Aufleuchten «eines tief angelegten, aber verkümmerten Gemüthlebens in dem ver- «bitterten, kranken Geiste des grossen Berliner Mathematikers war «die Freundschaft mit L. Schläfli. In der Stadt und in dem Lande, «wo er die höchste wissenschaftliche Anerkennung und ehrenvolle «Stellung (vergleiche oben) gefunden hatte, welche die Heimath ihm «nicht gewährte,[2]) hatte er keinen dauernden Freund gewonnen, war «insbesondere mit seinen gleichaltrigen Fachgenossen zerfallen, hatte «mit den jüngeren derselben keine Verbindung geknüpft oder auch «nur zu knüpfen gesucht. Da bescheerte ihm das Schicksal aus «seinem Geburtslande einen jüngern Freund, der sich mit ganzer «Seele ihm anschloss und die Tragik seines Lebens war es, dass er «nach wenigen Jahren innigen Verkehrs auch diesen Freund wieder von «sich scheuchte.»

Lampe erzählt weiter, wie er Steiner, damals ein gebrochener Mann ohne Spannkraft, in den Wintern 1860/61 und 1861/62 noch zum Lehrer gehabt habe.[3]) Im jetzt verschwundenen Café de Bavière in der französischen Strasse ass Steiner damals zu Mittag und hielt daselbst auf einem Ecksopha seinen Verdauungsschlummer. Wenn dann Abends um 8 Uhr die akademische Liedertafel im Nebensaal ihre Uebungen begann, erhob er sich schwerfällig und verschwand.

Nach Bern übergesiedelt wohnte er vorübergehend im Gasthof zum wilden Mann, ist dann, als seine Krankheit, die Wassersucht, immer fortschritt, in ein Zimmer ob der sogenannten alten Schaal an der Kramgasse übergesiedelt, wo er auch gestorben ist. Seinem Sarge, der im Monbijou-Kirchhofe beigesetzt wurde, folgten wenige Freunde; sein manuscriptlicher Nachlass wurde auf der Bibliothek der schweizerischen naturforschenden Gesellschaft deponirt, aber leider so

---

[1]) Naturwissenschaftliche Rundschau v. W. Sklarek XII., Nr. 1, S. 15, bei Anlass der Besprechung des von uns herausgegebenen Briefwechsels zwischen Jakob Steiner u. L. Schläfli.

[2]) Nicht ganz zutreffend, da man daran dachte, ihm an der Berner Hochschule eine Stellung zu schaffen.

[3]) Steiner war während des Sommersemesters zur Herstellung seiner Gesundheit beurlaubt.

elend aufbewahrt, dass einige Manuscripte arg beschädigt sind und sicher alle zu Grunde gegangen wären, wenn wir sie nicht beim Antritt des Amtes als Oberbibliothekar der Gesellschaft gefunden und sofort Sorge für bessere Aufbewahrung getroffen hätten. Die Papiere wurden von Prof. Dr. *F. Büzberger* an der Kantonsschule in Zürich einer Durchsicht und Ordnung unterzogen und wie es mit seinem Nachlass gegangen, so ging es auch, es muss, wenn schon nicht zur Ehre der schweizerischen Mathematiker, gesagt werden, mit seinem Grab. Vergessen und verschwunden schien die Stätte, die seine irdische Hülle barg, bis in den achtziger Jahren die beiden jungen strebsamen Mathematiker, Herr Dr. *Christian Moser*, jetzt Docent und Mathematiker im eidgenöss. Industrie-Departement, und der schon genannte Dr. *F. Bützberger*, damals Lehrer in Langenthal, an der Hand der Kontrollen des Friedhofes die Grabstätte wieder auffinden konnten. Herr Prof. Dr. *Georg Sidler* liess dann auf seine Kosten einen einfachen Grabstein setzen, der die Inschrift trug: «Jakob Steiner, Mathematiker und Akademiker in Berlin 1796 bis 1863».

Der Monbijou-Friedhof in Bern soll anderen Zwecken dienen und zum Theil als Promenade, zum Theil als Bauplatz verwendet werden, desshalb hielten es die Docenten der Mathematik an der Hochschule Bern, die Herren Prof. Dr. G. Huber, Prof. Dr. G. Sidler, Prof. Dr. E. Ott und Dr. Christian Moser und der Berichterstatter für ihre Pflicht, rechtzeitig alle Rechte zu sichern für die Exhumation der sterblichen Reste Steiner's. Schon am 25. Mai 1894 richteten wir ein Gesuch in diesem Sinne an die städtische Baudirektion, welche unsere Bitte am 6. Juni der städtischen Polizei-Direktion übermittelte.

Inzwischen verstarb am 20. März 1895 in Bern nach langen schmerzhaften Leiden Prof. Dr. Ludwig Schläfli. Sein Sterbezimmer liegt an der Könizstrasse und von dessen Fenster konnte man auf die Stätte im Monbijou hinblicken, wo sein congenialer älterer Freund, Jakob Steiner, die Ruhestätte gefunden hatte. Es reifte bei uns der Gedanke, zugleich mit der Exhumation Steiner's, die am 18. März 1896, an seinem 100jährigen Geburtstag stattfinden sollte, Schläfli ein Grabdenkmal zu setzen. Es bildete sich das nachgenannte Steiner-Schläfli-Comité, welches folgendes Cirkular an alle schweizerischen Mathematiker erliess:

«Am 18. März nächsten Jahres kehrt der 100jährige Geburtstag des grossen Mathematikers *Jakob Steiner* von Utzenstorf wieder. Seine sterblichen Reste befinden sich im Monbijou-Friedhofe in Bern

begraben. Da dieser Friedhof demnächst einer andern Bestimmung gewidmet werden soll, so trat an uns der Gedanke heran, die sterblichen Reste Steiner's zu exhumiren und an anderer Stätte der Erde wieder zu übergeben. In ausserordentlich zuvorkommender Weise hat uns der Gemeinderath der Stadt Bern eine Grabstätte in der Reihe der konzessionirten Gräber gratis zur Verfügung gestellt, so dass der Exhumirung Steiner's nichts mehr im Wege steht. Wir gedenken dieselbe aber aus naheliegenden Gründen auf den 18. März 1896 zu verschieben. Sodann kommt noch der Umstand hinzu, dass mit dem 20. März der Todestag unseres Altmeisters der Mathematik *Ludwig Schläfli* wiederkehrt, der bekanntlich dieses Jahr verstorben ist, und dessen Grab auch auf dem gegenwärtig benutzten Bremgarten-Friedhof sich befindet.

Das Comité hat sich ferner die Aufgabe gestellt, die Grabstätte Schläfli's zu sichern; der Tit. Gemeinderath der Stadt Bern ist uns auch hier auf das Freundlichste entgegengekommen und will gegen eine Gebühr von 250 Fr. (die Hälfte der üblichen) Schläfli's Grabstätte ebenfalls zu den konzessionirten d. h. auf 60 Jahre hinaus gesicherten erklären. Endlich soll das Grab Schläfli's, wie es sich wohl für den grossen und einfachen Gelehrten, der er war, geziemt, mit einem bescheidenen Monument geschmückt werden.

Sowohl die Angelegenheit Steiner's als die Grabstätte und das Monument Schläfli's verursachen immerhin bedeutende Kosten, für deren Aufbringung wir uns in allererster Linie an die schweizerischen Verehrer, Schüler und Freunde der beiden Mathematiker wenden.

Wir bitten alle diejenigen, welche gewillt sind, etwas an die Unkosten beizutragen, gefälligst den nebenstehend angehängten Subskriptionszeddel auszufüllen und an Prof. Dr. J. H. Graf, Wylerstr. 10, Bern, einsenden zu wollen. Das Comité wird nach Erledigung der beiden Angelegenheiten nicht verfehlen, zu Handen der Subskribenten Rechnung zu stellen. Mit Hochschätzung und Dank Namens des Steiner-Schläfli-Comités: Prof. Dr. C. F. Geiser, Zürich; Prof. Dr. H. Kinkelin, Basel; Prof. Dr. Hugo Schiff, Florenz; Prof. Dr. G. Sidler; Prof. Dr. G. Huber; Prof. Dr. E. Ott; Dr. Ch. Moser, Docent; Dr. F. Büzberger, Burgdorf; Prof. Dr. J. H. Graf.»

Speziell wurde auf die Bitte von Hugo Schiff, der ein intimer Freund Schläfli's war, was auch daraus hervorgeht, dass die letzte Postkarte Schläfli's, die er nicht einmal fertig schreiben konnte, an ihn gerichtet war, beschlossen, es ihm zu überlassen auch einige

italienische Mathematiker zur Subskription heranzuziehen. Es rechtfertigte sich dadurch, dass L. Schläfli mit vielen italienischen Mathematikern wie Cremona, Casorati, Beltrami, Brioschi, Chelini, Battaglini u. s. w. im intimen Verkehr gestanden hatte. Ausserdem hatte die treue Haushälterin und langjährige Pflegerin Schläfli's, die er auch testamentarisch zur Erbin seines Nachlasses eingesetzt hat, aus freien Stücken sich verpflichtet den allfälligen Rest, welchen die Subskription nicht decken würde, zu übernehmen. Auf Ansuchen des Comités hat der Gemeinderath der Stadt Bern in bereitwilligster Weise für die sterblichen Reste Jakob Steiner's gratis im Bremgarten-Friedhofe eine reservirte Grabstätte zur Verfügung gestellt und die Erlaubniss zur Exhumation gegeben.

Wir hatten, um dies zu erreichen, folgendes Schreiben abgesendet:

Bern, den 31. Juli 1895.

«*An den Tit. Gemeinderath der Stadt Bern.*

Hochgeehrter Herr Präsident! Hochgeehrte Herren!

«Am 1. April 1863 verstarb in unserer Stadt *Jakob Steiner* von *Utzenstorf*, gewesener Professor der Mathematik in Berlin und Mitglied der dortigen königl. Akademie der Wissenschaften. Steiner wurde sodann auf dem Monbijou-Friedhofe beerdigt und Freunden gelang es, sein Grab ausfindig zu machen und ihm einen einfachen Grabstein zu setzen. In kurzer Frist wird das Areal des Monbijou andern Bestimmungszwecken gewidmet werden, daher tritt die Frage an uns heran, was mit den sterblichen Resten Steiner's geschehen soll. Man macht es der vorigen Generation zum Vorwurf, dass sie nicht einmal die sterblichen Reste des grossen Haller der Nachwelt habe überliefern können, sollen wir in unserm Fall, wo es sich um einen auf dem Gebiete der Mathematik bedeutenden Mann handelt, ähnlich verfahren? Steiner, der Begründer einer ganz neuen Disciplin, der synthetischen Geometrie, ein Mann. dessen Werke auf Kosten der Akademie herausgegeben wurden, wird nach Jahrhunderten noch als Autorität und erfinderischer Geist auf dem Gebiete der Mathematik von der Welt anerkannt werden und die Nachwelt würde strenge mit uns zu Gerichte sitzen, wenn wir, als die Vertreter seines Faches, nicht alles aufwenden würden, seine Ueberreste vor Profanation zu schützen und intakt aufzubewahren.

Eine Mittheilung der städtischen Polizei-Direktion stellte fest.

Ansicht des Schädels Steiner's aufgenommen bei Anlass der Exhum am 18. März 1896

ass der Exhumirung der Gebeine Steiner's nichts im Wege stehe, ɛtzt aber die Gebühr für ein Grab im Bremgarten-Friedhofe auf 500 ɛsp. 600 Franken fest.

Angesichts der eminenten Bedeutung des Mannes als Forscher ɔheint uns aber, wäre es wohl angezeigt, wenn der Tit. Gemeinde-ɹth eine Grabstätte gratis dem unterfertigten Comité für die Exhu-ıirung Steiner's zur Verfügung stellen würde.

Da wir überzeugt sind, bei Ihnen, hochgeehrte Herren, auf eine ichtige Würdigung des grossen Mannes bauen zu dürfen, so wagen ir es, Ihnen das höfliche Gesuch zu unterbreiten:

«Der Tit. Gemeinderath der Stadt Bern möchte für die Exhumirung des grossen Mathematikers Jakob Steiner eine Grabstätte im Bremgarten-Friedhofe unentgeltlich gewähren».

Indem wir Ihnen, hochgeehrte Herren, die Angelegenheit zu ɜneigter Erledigung unterbreiten, zeichnen mit vollkommener Hoch-ɦtung: das Comité für die Exhumirung Steiner's.»

Am 17. März wurden im Monbijou-Friedhofe unter dem Beisein ɛs Vertreters der Sanitätspolizei, Herrn Dr. med. *Ost,* und dem Prä-ɖenten des Comités die Reste Steiner's dem Grabe enthoben. Der ɦhädel des grossen Mathematikers wurde gemessen und seitlich und ɔntal photographirt und gewiss wird es auch interessiren, eine Ab-ldung desselben zu besitzen. Herr Prof. Dr. *Th. Studer* berichtet ırüber Folgendes:

«Zur Beurtheilung des Schädels *von Steiner* liegt mir nur eine pho-graphische Darstellung vor, welche den Schädel einmal im Profil ıd einmal in Frontalansicht wiedergibt unter einer Reduktion von ıter 0,5.

Die Schädellänge betrug nach einer Messung von Herrn Prof. Dr. *raf* am Original 185 mm., in der Photographie beträgt sie 82 mm., mit ı Grundelage der deutschen Horizontale gemessen; ob auch am Original ie deutsche Horizontale als Grundlage genommen wurde, konnte ich icht erfahren.

Der Schädel erscheint schön gewölbt und voluminös, die Stirn reit und hoch, die Scheitelwölbung sehr regelmässig, nach dem Hinter-aupt fällt der Schädel steil ab. Auffallend ist, dass die linke Schläfen-egend bedeutend mehr aufgetrieben ist, als die rechte, so dass der ɔhädel dadurch in der Frontalansicht assymmetrisch erscheint. An der ɜraden Stirn erscheinen die Stirnhöcker vorragend, ebenso der asenwulst, die Superciliarbogen sind namentlich am Beginn von

Innen ziemlich stark, dadurch ist die Glabella eingesenkt. Auf ihr ist noch eine Spur der Stirnnaht erhalten, was darauf deutet, dass diese relativ spät verwachsen ist. Die Coronalnaht ist gegen den Scheitel verstrichen, die Lamdanaht ganz verstrichen. Nirgends ist eine Spur von Schaltknochen zu erkennen. Die Linea temporalis ist schwach ausgeprägt. Die Augenhöhlen sind gross, die Nase hoch, die Oberkiefergegend schmal, wahrscheinlich war der Gaumen schmal. Die Indices, welche sich an der Photographie berechnen liessen, sind:

Schädelindex = 82, 9 Brachycephal.

(Nach direkter Messung von Professor Dr. *Graf*, welche aber nicht mit Berücksichtigung der deutschen Horizontale ausgeführt wurde.)

1600 : 185	= 85,5.	
Ohrhöhenindex	= 67.	
Gesichtsindex	= 60,7	Leptoprosop.
Orbitalindex	= 82	Mesoconch.
Nasenindex	= 40	Leptorhin.

In den allgemeinen Verhältnissen schliesst sich die Schädelform an diejenige der Bevölkerung unseres Mittellandes an, die in weit überwiegender Zahl brachycephal und leptoprosop ist. Der Schädel zeichnet sich durch sein Volum und die abgesehen von der Assymetrie edle Form aus.»

Vom Sarg war keine Spur mehr vorhanden, ein Rest der Cravatte und einige Hemdenknöpfchen wurden noch gefunden. Sämmtliche Skelettheile wurden sorgfältig nach Vorschrift desinfizirt und eingesargt und hierauf, Nachmittags 3 Uhr, unter Begleit einiger Comitémitglieder in der Leichenhalle beim Bremgarten-Friedhofe deponirt. Am 18. März Vormittags 11 Uhr, dem 100jährigen Geburtstag Steiner's, sollten seine sterblichen Reste feierlich der Erde wieder übergeben und zugleich sollte das Grabdenkmal L. Schläfli's eingeweiht werden. An alle Subskribenten wurde vom Comité folgendes Circular versandt:

Steiner-Schläfli-Comité. Bern, den 9. März 1896.

Tit!

«Am 18. März kehrt der 100jährige Gedenktag der Geburt des grossen Mathematikers Jakob Steiner von Utzenstorf wieder. Seine sterblichen Reste sind im Monbijou-Friedhofe in Bern beigesetzt. Auf obigen Tag hat nun das unterfertigte Comité die Exhumation Steiner's und die Wiederbeisetzung seiner sterblichen Reste auf dem Bremgarten-Friedhofe angeordnet. Zugleich wird damit die Uebernahme

des Grabmonumentes des am 20. März vorigen Jahres verstorbenen Prof. Dr. Ludwig Schläfli verbunden. Das nachstehende Programm gibt Ihnen über den Verlauf der Feier Auskunft.

Wir haben nun die Ehre, Sie zu der Feier höflichst einzuladen und rechnen auf Ihre Theilnahme. Mit Hochschätzung Namens des Steiner-Schläfli-Comités, der Präsident: Prof. Dr. J. H. Graf.»

»Programm für die Exhumation der sterblichen Reste Jakob Steiner's und die Einweihung des Schläfli-Denkmals:

17. März, Nachmittags 2 Uhr: Ausgrabung der sterblichen Reste Jakob Steiner's auf dem Monbijou-Friedhofe unter Anwesenheit der Mitglieder des Comités und des Vertreters der Sanitäts- und Polizeibehörde; hernach Deponirung der wieder eingesargten Reste in der Leichenhalle des Bremgarten-Friedhofes.

18. März, Vormittags 11 Uhr: Sammlung der Theilnehmer beim Bremgarten-Friedhofe.

11¼ Uhr: Beisetzung der sterblichen Reste Steiner's in der vom Gemeinderath angewiesenen reservirten und konzessionirten Grabstätte. Ansprache.

12 Uhr: Uebergabe des Grabmonumentes Ludwig Schläfli's auf dem Bremgarten-Friedhofe. Ansprache.

1 Uhr: Sammlung der Theilnehmer zu gemeinschaftlichem Mittagessen im Speisesaal des Hotel Jura beim Bahnhof. (Couvert à Fr. 2.—.)«

Speziell eingeladen wurde der Gemeinderath der Stadt Bern, derselbe hatte auf die Bitte des Comités hin beschlossen den Unterhalt beider Grabstellen zu übernehmen. Das bezügliche Schreiben lautet:

Bern, den 11. März 1896.

Der Gemeinderath der Stadt Bern an Herrn Professor Dr. Graf, Bern.

Hochgeehrter Herr!

Der Gemeinderath hat an die Exhumation der sterblichen Reste Jakob Steiner's und Einweihung des Schläfli-Denkmals am 18. März die Herren Stadtpräsident Lindt und Vizepräsident Scherz abgeordnet. Wir möchten Sie bitten, diesem letztern ein Programm der abzuhaltenden Feier zuschicken zu wollen.

Gleichzeitig hat der Gemeinderath verfügt, dass die Grabstätten und Monumente der Mathematiker Steiner und Schläfli von der Gemeinde in Unterhalt übernommen werden, nachdem diese Gräber vom Comité werden in Stand gestellt worden sein. Für das Grab Schläfli

wird zwar in der nächsten Zeit noch die Erbin zu sorgen haben. Später wird dann die Gemeinde dafür eintreten. Mit vollkommener Hochachtung Namens des Gemeinderathes, der Stadtpräsident: Lindt; der Stadtschreiber: Bandelier.»

Der Gemeinderath von Burgdorf (Heimatort Schläfli's) delegirte die Herren H. Bögli, Gymnasiallehrer, und J. F. Stalder, Sekundarlehrer, und vom Gemeinderath Utzenstorf (Geburtsort Steiner's) war folgendes Schreiben eingelaufen:

Utzenstorf, den 17. März 1896.

An das Tit. Steiner-Schläfli-Comité in Bern.

Hochgeehrte Herren!

«Sie beehrten uns mit der Einladung zur Theilnahme an der Exhumation der sterblichen Reste unseres Gemeindebürgers, Herrn Professor *Jakob Steiner* sel., und Einweihung des *Schläfli-Denkmals*. Wir verehren die Erinnerung an diese beiden grossen Todten und hätten denselben die ihnen wohlgebührende Ehre, die ihnen am 17. und 18. dies erwiesen wird, mit ganz besonderer Hochachtung zu beweisen gerne mitgeholfen, wenn die Beiwohnung an dieser Feierlichkeit uns möglich wäre. Wir müssen daher zu unserm grossen Bedauern darauf verzichten. Nicht umhin können wir aber, Ihnen, hochgeehrte Herren, die an uns gerichtete Einladung auf's Herzlichste zu verdanken und zeichnen mit besonderer Hochachtung Namens des Gemeinderaths, der Präsident: J. Jb. Fischer; der Sekretär: Kehrli.»

Am 18. März Vormittags 11 Uhr versammelten sich die Vertreter der Behörden, das Comité und eine Anzahl Schüler und Freunde der beiden Gelehrten auf dem Bremgarten-Friedhofe. Der Sarg Steiner's wurde dem Schooss der Mutter Erde übergeben. Hiebei richtete Herr Prof. Dr. C. F. Geiser-Zürich, bekanntlich ein Grossneffe Steiner's, folgende Worte an die Versammlung:

«Am kommenden 1. April werden 33 Jahre verflossen sein, seit Jakob Steiner von uns geschieden ist; ein halbes Menschenalter trennt uns bereits von dem Todestage des grossen Mathematikers. Diejenigen unter uns, die ihn noch gekannt, die seine Schüler gewesen sind oder die sonst in persönlichen Beziehungen zu ihm gestanden haben, fühlen das herannahende Alter, dessen Schnee schon in dichten Flocken auf uns gefallen ist. Wenn nun auch das wissenschaftliche Lebenswerk Steiner's uns immer vor Augen stand, so ist in dieser langen Zeit das Persönliche des Mannes mehr und mehr in den

ıtergrund gerückt. Selbst die Grabstätte schien verschollen, und der Friedhof, auf welchem er beerdigt war, aufgehoben wurde, so ısste man sogar befürchten, dass die Stelle, welche seine sterblichen ste barg, für immer verloren sei. Glücklicher Weise haben die rnischen Mathematiker sich mit Erfolg darum bemüht, den Geinen des berühmten Landsmannes einen bleibenden und unverlierren Ruheplatz zu sichern. Und so sei in dieser Stunde vor Allem s den Behörden der Stadt Bern, welche das neue Grab zur Verıung gestellt und den würdigen Unterhalt desselben übernommen ben, der herzlichste Dank dargebracht.

Die Ueberführung und definitive Bestattung Steiner's auf dem uen Kirchhofe ist zugleich mit einer bescheidenen Feier seines ndertjährigen Geburtstages verbunden. Wie natürlich ist es also, ss wir vor dem offenen Grabe, das seine zerfallenden irdischen berreste aufnehmen wird, uns des unzerstörbaren geistigen Erbes nnern, das er hinterlassen hat. Wir können dasselbe heute sicherer nessen, als unmittelbar nach seinem Tode und es getrost in dem einen tze zusammenfassen: dass wir in ihm den grössten Geometer unseres ıtalters besessen haben, auf dessen Schöpfungen noch künftige Jahrnderte in Forschung und Lehre weiterbauen werden.

Hesse spricht in dem kurzen Nachrufe, der im 62. Bande des elle'schen Journals enthalten ist, von Steiner's »Entdeckungen, die it über die Grenzen hinausgehen, welche seine Zeitgenossen sich steckt haben». Und in der That sind auch heute noch viele dieser tdeckungen nicht bewiesen und in einen systematischen Zusammenıg gebracht. Immerhin ist die Arbeit der Nachfolger auf den von n angebahnten Gebieten nicht ohne Erfolg geblieben und man darf besondere hervorheben, dass der von Steiner gestiftete Preis der rliner-Akademie zu mehrern der interessantesten Untersuchungen der ıern Geometrie Veranlassung gewesen ist. Durch die umfangreichen beiten Cremona's und Sturm's hat die Lehre von den Flächen dritten ıdes eine grosse Bereicherung erfahren und namentlich in dem Sturm'ıen Buche sind die rein geometrischen Methoden Steiner's mit önstem Erfolge angewendet. Smith und Kortum haben über die ometrische Behandlung der Gleichungen 3. und 4. Grades und er die Erzeugung der Curven 4. Grades aus projektivischen scheln niedrigeren Grades Resultate gefunden, die auch das Vorıdensein imaginärer Elemente gebührend berücksichtigen. In dem wierigen Gebiete der algebraischen Raumcurven haben Nöther's

exakte Forschungen sichere Ergebnisse zu Tage gefördert. Durch Ernst Kötter ist der Versuch gemacht worden der Lehre von den ebenen algebraischen Curven eine rein geometrische Grundlage zu geben.

Wenn alle diese Untersuchungen und eine grosse Reihe anderer Arbeiten der gegenwärtig auf dem Felde der Geometrie thätigen Forscher vorzugsweise an die spätern Abhandlungen Steiner's anknüpfen, so scheint es doch, dass in dem Gesammturtheil über ihn seine frühern Werke wieder mehr berücksichtigt und gewürdigt werden. Das im Jahre 1833 erschienene kleine Büchlein: «Die geometrischen Konstruktionen, ausgeführt mittelst der geraden Linie und eines festen Kreises» ist erst vor Kurzem in «Ostwald's Klassiker der exakten Wissenschaften» aufgenommen worden. Der nämlichen Sammlung soll auch das aus dem Jahre 1832 stammende Hauptwerk: «Systematische Entwicklung der Abhängigkeit geometrischer Gestalten voneinander» einverleibt werden. Von den nach Steiner's Tode herausgegebenen Vorlesungen erfreut sich der elementare Theil, den er als «Populäre Kegelschnitte» zu bezeichnen pflegte, der fortdauernden Gunst der Mathematiker. Gewiss würde auch eine selbständige Ausgabe der beiden Abhandlungen über «Maximum und Minimum» einen grossen Leserkreis finden.

Diese Schriften, welche gewissermassen auf einem direkten Wege von der Schwelle der Wissenschaft bis zu den Hauptergebnissen derselben führen, gehören durch ihre einfache und natürliche Darstellung, durch ihren so mannigfaltigen und eigenartigen Inhalt zu denjenigen Werken, die man immer und immer wieder mit Genuss und Belehrung, mit Freude und Bewunderung in die Hand nimmt. Man darf sie füglich den Büchern Leonhard Euler's an die Seite stellen, die auf dem freilich weit ausgedehntern Gebiete der Analysis ein volles Jahrhundert hindurch Unterricht und Studium beherrscht und die Forschung in vielseitigster Weise angeregt haben. Und so, wie wir heute unwillkürlich mit Euler's Namen vieles verknüpfen, was die Arbeit seiner Vorgänger und seiner Zeitgenossen gewesen, so erscheint nach und nach auch Steiner als der Repräsentant eines Ideenkreises, der nicht sein alleiniges Eigenthum ist. Gerade diejenigen, welche er selbst in unbefangener und rückhaltloser Anerkennung als die grossen Bahnbrecher der neuen Geometrie bezeichnete, Poncelet und Möbius, auf deren Leistungen er so vielfach fusst, treten schon neben ihm auf eine zweite Stufe zurück; auch unser Lhuilier findet nicht mehr die Würdigung, die seinen scharfsinnigen Arbeiten gebührt.

DEM
GENIALEN MATHEMATIKER
LUDWIG SCHLAFLI

DEM
GENIALEN MATHEMATIKER
LUDWIG SCHLÄFLI

In Erinnerung an den 150. Geburtstag Pestalozzi's, den wir vor rzem gefeiert haben, lenken wir zum Schlusse unsere Gedanken h auf die Anregungen, welche der grosse Geometer von dem unrblichen Pädagogen empfangen hat. Man weiss, dass es zu den ptgrundsätzen der Pestalozzi'schen Erziehungskunst gehörte, die metrische Anschauung schon in den Elementarunterricht einzuren. Dementsprechend hat sich Steiner bis zu den letzten Lebensren bemüht, seine unvergleichliche Lehrbefähigung nicht nur an er kleinen Zahl Auserwählter im akademischen Hörsaal zu erproben, dern, wo er das nöthige Interesse fand, manche der von ihm gedenen Resultate auch solchen zu erklären, die nicht eine eigentne mathematische Bildung besassen. Und wenn allmählig von den mit mentaren Hülfsmitteln ausgeführten Entwicklungen ein immer sserer Theil in den Schulunterricht zunächst unserer Realschulen d Gymnasien übergeht, so entspricht das einem von ihm selbst sehr haft gehegten Wunsche. Die auf immer grössere Kreise sich ausnende Wirkung seiner Schöpfungen wird auch das Gedächtniss an neue Ruhestätte, welche ihm heute bereitet ist, weit überdauern d es erfüllt sich das Dichterwort, das so ganz seinen Gesinnungen d Hoffnungen Ausdruck gibt:

Von des Lebens Gütern allen
Ist der Ruhm das Höchste doch;
Wenn der Leib in Staub zerfallen,
Lebt der grosse Name noch.»

Hierauf begab man sich hinüber zum Grabdenkmal Schläfli's. ch stand es verhüllt in der Frühlingsonne da. Meister Laurenti ss den Schleier fallen, vor uns zeigte sich das Monument, ein ttlicher Grimselfindling von 210 cm. Höhe, in welchen das von renti modellirte und in Bronze gegossene Bildniss Schläfli's (Hochief in Medaillonform) eingelassen ist und unter dem Bild, welches die markigen Züge des Altmeisters wiedergibt, stehen die Worte gemeisselt: «Dem genialen Mathematiker Ludwig Schläfli 15. I. 1814 20. III. 1895.»

Dann richtete Prof. Dr. Graf folgende Worte an die Versammlung:

«Es war ein Tag so schön wie heute, als wir vor fast einem Jahr dwig Schläfli hier zur ewigen Ruhe gebettet haben. Seine Schüler Freunde, die treue Pflegerin seiner letzten Lebensjahre, haben sich nicht nehmen lassen, sein Andenken durch einen Denkstein ehren. So versammelt sich denn die kleine Gemeinde seiner Ver-

ehrer wohl zum letzten Mal an diesem Grab, das in seiner Tiefe den geliebten Lehrer und Freund, den grossen Forscher von Weltruf in sich birgt. Der bescheidene Schläfli wäre zwar mit dem einfachsten Grabstein zufrieden gewesen; in seinem Wesen lag es nicht sich vorzudrängen. Wir sind es aber der Wissenschaft schuldig das Andenken der grossen Geister unserer Nation zu ehren und dasselbe würdig zu feiern. Die Stadtgemeinde Bern hat denn auch in richtiger Würdigung der eminenten Bedeutung des Dahingeschiedenen sein Grab auf Jahre hinaus gesichert und will es, wie dasjenige seines congenialen ältern Freundes, in sichere Obhut nehmen. Herzlichen Dank allen, die zum Gelingen beigetragen haben, herzlichen Dank dem Meister, der sein Bild mit künstlerischer Hand geformt, aufrichtiger und warmer Dank sei den Behörden der Stadt Bern im Namen des Comités und im Namen aller Schüler, im Namen der Freunde der Wissenschaft dargebracht. Steiner und Schläfli gehören zusammen. Sie entstammten der nämlichen heimathlichen Scholle, dem Thal der Emme; beide haben sich durch Mühe, Arbeit und Entbehrungen kraft ihres Genies auf eine hohe wissenschaftliche Stufe hinaufgearbeitet, die unsere Bewunderung erregt; beide waren Zeitlebens vom heiligen Feuer der Liebe zu den Wissenschaften durchglüht; beide ruhen nun auch gemeinsam am nämlichen Ort des Friedens: Steiner, der grosse Geometer, der geniale Entdecker und Schöpfer der synthetischen Geometrie, Schläfli, der souveräne Beherrscher des Calcüls und der Analytik. Freude unserm Lande, dass es zwei solche Geistesheroen hervorgebracht hat! Beider Grabstätte ist nun der nämlichen treuen Obhut unterstellt. Ob Geschlechter kommen oder vergehen, dess sind wir gewiss, so lange in Bern die Wissenschaften eine heimische Stätte finden, so lange wird es auch seine grossen Todten in Ehren halten. Im Namen des Comités, im Namen aller Schüler und Freunde übergebe ich hiemit das Grab und das Grabmonument der Obhut der Gemeinde Bern.»

Herr Stadtpräsident *Lindt* dankte hierauf dem Comité und den anwesenden Freunden für die pietätvolle Weise, wie für das Andenken der beiden grossen Männer gesagt worden sei, und übernahm feierlich im Namen der Stadt Bern die Obhut über die beiden Gräber dieser grossen Gelehrten.

Die Theilnehmer vereinigten sich nach der Feier im Hotel Jura zu einem einfachen Mittagessen, wo der Präsident des Comités Kenntniss gab von folgenden eingelaufenen Schreiben und Telegrammen.

Prof. Dr. *H. A. Schwarz*-Berlin telegraphirte: «Den Ehrungen, «welche dem Andenken an die hochverdienten Mathematiker Jakob «Steiner und Ludwig Schläfli gelten, schliesst sich in dankbarer Er- «innerung an H. A. Schwarz».

L. Cremona-Rom: «Col cuore assisto onoranze sommi matematici Steiner Schläfli.»

Beltrami-Rom: «Vous prie manifester mes sentiments vive participation cérémonie d'aujourd'hui.»

Brioschi Mailand: «Prego rappresentarmi solenne fungioni domani onore grandi scienziati.»

F. A. Forel-Morges, Präs. des Centralcomités der schweiz. Naturf. Gesellschaft: «Excusez mon absence et croyez à ma sympathie pour la solennelle cérémonie Steiner Schläfli.»

F. Rudio-Zürich: «Den zur Ehrung von Steiner und Schläfli versammelten Fachgenossen entbietet kollegialischen Gruss.»

Moritz Cantor schrieb: «Verbindlichen Dank für die Einladung zur Feier vom 18. März. Das überall den Eisenbahnverkehr störende Nachwirken der jüngsten schrecklichen Hochwasser gestattet mir nicht an die Reise nach Bern zu denken, so sehr ich mich freuen würde, Sie einmal persönlich kennen zu lernen etc.»

H. G. Zeuthen-Kopenhagen: «Empfangen Sie als Präsident des Steiner-Schläfli-Comités meinen besten Dank für die Einladung zur vorstehenden Feier. Kann ich auch nicht persönlich anwesend sein, dürfen Sie doch an meine geistige Theilnahme an der Ehre, welche Sie Ihren grossen Landsmännern zeigen, sichere Rechnung machen. Seit sehr lange war ich von den genialen Arbeiten Steiner's stark angezogen: er ist ja einer der grössten Führer der mathematischen Richtung, die mir immer am liebsten war. Und zur selben Zeit, wie ich Arbeiten von Schläfli bewundert habe, ist es mir sehr lieb gewesen auch seine nähere Bekanntschaft zu machen. Uebrigens ist es ja ganz überflüssig, solche persönliche Motive zu nennen, hier wo es nur gilt die Gefühle *aller* Mathematiker zu theilen.»

Hugo Schiff-Florenz schrieb: «Wo zwei oder drei im Namen des heiligen Geistes zusammen sind, da wird er unter ihnen sein.» Dass aber auch ich Unheiliger *nur im Geiste* unter den Berner Freunden sein kann, welche sich heute im Namen Schläfli's und zu seiner Ehrung versammeln, das habe ich auf's Schmerzlichste zu bedauern; denn 40jährige Erinnerungen knüpfen sich für mich an Schläfli und an die Berner Hochschule. — Als ich im Sommer 1857

in Bern ankam, um mich daselbst als Docent zu habilitiren, war gleich am ersten Tage Valentin meine erste, Schläfli meine zweite Bekanntschaft. Mit Beiden bin ich bis an ihr Lebensende in engster Beziehung geblieben und sie haben mein Interesse wach erhalten für Alles, was sich in Bern in Personen und Dingen wissenschaftlich Interessantes ereignete. Um zur Ehrung unseres dahingegangenen theuren Freundes beizutragen, was in meinen schwachen Kräften stand, bin ich Mitglied des Comités geworden. Als Comitémitglied und als 40jähriger Freund Schläfli's, sende ich allen Versammelten, allen, die zur Ehrung unseres Freundes beigetragen, sowie der Gefährtin, welche ihm 20 Jahre lang das Leben erleichtert und verschönert hat, die herzlichsten Grüsse und meinen tiefgefühlten Dank. — Ein schallendes Hoch auf die Wissenschaft, der wir alle dienen, und auf das Andenken der vor uns dahingegangenen Jünger, welche sich ihr, wie unsere Freunde *Schläfli* und *Valentin*, so treu, so ganz, so rückhaltslos, so aufopfernd hingegeben haben.»

Dr. *Julius Gysel*, Direktor des Gymnasiums in Schaffhausen: «Die Schrift über Schläfli habe ich erhalten . . . Ich brauche wohl nicht zu versichern, dass ich sie in einem Zuge gelesen und sie in mir alte und neue Erinnerungen wieder recht lebhaft wach gerufen hat. Es ist mir desshalb auch höchst fatal, dass ich nächsten Mittwoch nicht zur Steiner-Schläfli-Feier kommen kann. Verschiedene Umstände machen es mir unmöglich, doch im Geiste werde ich gewiss dabei sein und wünsche Euch von Herzen bestes Gelingen.»

H. Amstein-Lausanne: «Da ich tief in Examen stecke, die sich nicht verschieben lassen, so ist es mir zu meinem tiefen Bedauern unmöglich, nächsten Mittwoch an der bezeichneten Feier Theil zu nehmen, an der ich schon deswegen gerne Theil genommen hätte, weil sie mir Gelegenheit geboten hätte, Sie und wohl noch andere Berufsfreunde zu sehen und zu sprechen.»

Von Winterthur langte folgendes Telegramm ein (wahrscheinlich von Herrn Dr. U. Aeschlimann):

Mutz toastirt:

«Ich kriege das volle Glas zur Hand und sage:
Alles nach seiner Art!
Aber ist Einer im ganzen Land
Der unserm Jakob Steiner gleicht,
Der diesem Berner das Wasser reicht!
Sein Andenken lebe hoch!»

Rechnungsstellung: An der Subskription betheiligten sich:

Die HH. J. G. Hess, Abtheilungschef in Bern, Dr. H. Meyer-St. Gallen, Dr. R. Wetli-Basel, Prof. Dr. Von der Mühll-Basel, Prof. Dr. E. Ott-Bern, M. Zwicky-Bern, Prof. Dr. Jonquière-Bern, Dr. G. Jonquière-Bern, Dir. Vollenweider-Burgdorf, Dr. med. G. Beck-Bern, Dr. U. Aeschlimann-Winterthur, Prof. M. Lacombe-Zürich, Prof. Riemenschneider-Neuenstadt, Privatdocent J. Fehr-Genf, Direktor A. Pfenninger-Küssnacht-Zürich, Prof. Dr. A. Meyer-Zürich, Prof. Dr. L. Fischer-Bern, Dr. A. Kiefer-Zürich, A. Droz-Farny-Pruntrut, Prof. C. Cailler-Genf, Dr. J. Gysel und Prof. Imhof in Schaffhausen, Dr. J. Wetterwald-Basel, Dr. C. Wagner-Zürich, Prof. Dr. L. Stein-Bern, Prof. Dr. Hagenbach-Bischoff-Basel, Prof. Franel und Prof. Dr. Hurwitz in Zürich, Dr. G. Stiner-Frauenfeld, Nat.-Rath Forrer-Winterthur, Dr. L. Crelier-St. Imier, Prof. Dr. Sidler und Dr. Ch. Moser in Bern, Dr. F. Büzberger-Burgdorf, Prof. Dr. C. F. Geiser-Küssnacht-Zürich, Prof. Dr. F. Burckhardt und Prof. Dr. Kinkelin in Basel, Prof. Dr. A. Baltzer-Bern, Prof. Dr. Affolter und Prof. Dr. Rudio in Zürich, Inspektor Schwab-Twann, Prof. Dr. v. Kostanecki und Prof. Dr. Th. Studer in Bern, Privatdocent Dr. Gubler und Prof. Dr. W. Fiedler in Zürich, Privatdocent Dr. Gruner, Prof. Dr. A. Rossel, Prof. Dr. G. Huber, Prof. Dr. J. H. Graf, alle in Bern, Prof. Pietro Blaserna-Rom, Antonio Favaro, Giuseppe Veronese, Ernesto Padova, alle in Padova, Enrico d'Ovidio, Corrado Segre, Luigi Bezzolari, Nicodemo Jadanza, Dr. Angelo Ramorino, alle in Torino, Eugenio Bertini, Luigi Bianchi, Senat. Ulisse Dini, Cesare Finzi, alle in Pisa, und Prof. Dr. Hugo Schiff-Florenz, der überdies die Sammlung in Italien besorgte. Im Ganzen wurden Fr. 846. 80 subskribirt; die Erbin Schläfli's, Fräul. Marg. Spichlin, übernahm weitere Fr. 680.—, so dass die Einnahmen betragen 1526 Fr. 80 Cts. Die Ausgaben belaufen sich auf 1557 Fr. 45 Cts., so dass ein kleines Defizit resultirte, welches aber gedeckt wurde.

Die Rechnung wurde im Detail mit allen Belegen durch die in Bern wohnenden Mitglieder des Comités, nämlich die Herren Prof. Sidler, Prof. Huber, Prof. Ott und Dr. Moser geprüft, mit den Belegen verglichen und richtig befunden.

Die beiden Grabkonzessionen, sowie die Rechnung, wie alle Belege und sonstige auf die Feier bezughabende Dokumente sind auf der schweizer. Landesbibliothek in Bern deponirt.

Hiermit ist unser Bericht zu Ende. Es erübrigt uns nur noch, den Behörden der betheiligten Gemeinden, vorab denen der Stadt

Bern, sowie allen Freunden und Fachgenossen, nicht minder den verehrten Comitémitgliedern, welche uns in der Durchführung der übernommenen Doppelaufgabe mit Rath und That unterstützt haben, den verbindlichsten Dank auszusprechen. Durch das freundliche Entgegenkommen der bernischen naturforschenden Gesellschaft ist es uns möglich geworden, diesen Bericht mit dem Portrait Steiner's, Ansichten seines interessanten Schädels und einem Bild des Schläfli'schen Grabdenkmals auszustatten, Beilagen, welche sämmtlich unser grosses Interesse in Anspruch nehmen.

Bern, im Febr. 1897.

P. Gruner.

Die neuern Ansichten über Materie und Energie.

(Gehalten in der Naturforschenden Gesellschaft in Bern am 6. März 1897.)

Im Jahre 1895 hat Prof. *Ostwald* von Leipzig an der deutschen Naturforscherversammlung in Lübeck in seinem öffentlichen Vortrage über «die Ueberwindung des wissenschaftlichen Materialismus» eine neue Weltanschauung, die «energetische», verkündet. Dieselbe soll eine neue, bessere Grundlage für die exakten Naturwissenschaften liefern als die bisherige mechanistische Weltanschauung.

Es soll hier in Kürze eine Vergleichung dieser beiden Anschauungen gemacht werden. —

Vorerst muss festgehalten werden, dass unser ganzes Wissen von der Aussenwelt lediglich aus unsern in Raum und Zeit gesonderten Sinneseindrücken besteht. Vom ersten Momente an, da unser Bewusstsein erwacht, wird es von einer ununterbrochenen Folge von Sinneseindrücken bestürmt. Wir sehen, fühlen, hören stets etwas, und alle diese Eindrücke erscheinen uns entweder räumlich getrennt oder zeitlich aufeinanderfolgend. Die Gesammtheit dieser Eindrücke ist es, die wir die Aussenwelt unseres «Ichs» nennen. — Die Existenz dieser Eindrücke ist unleugbare Thatsache; hingegen wissen wir durchaus nicht, was deren Ursache ist — wir können uns darüber nur subjektive Meinungen bilden.

Immerhin drängen sich jedermann (ganz unbewusst) gewisse Ansichten auf, die allgemeine Anerkennung finden, nämlich die Ansicht, dass allen Sinneseindrücken eine zweifache Ursache zu Grunde liege: die Materie und die Kraft.

Aber, genau besehen, sind das zwei Begriffe, die nur bestimmte Eigenschaften unseres Tastgefühles bezeichnen.

Weil unser Tastgefühl sehr oft Eindrücke eines mehr oder weniger starken Widerstandes erfährt, z. B. beim Betasten oder Stossen von Gegenständen, so sucht unser Verstand unwillkürlich nach einer objektiven Ursache dieses Widerstandsgefühls und nennt sie «Materie».

Da ferner im Lauf der Zeit das Gefühl eines solchen Widerstandes an wechselnden Raumstellen empfunden wird, so bekommt unser Bewusstsein den Eindruck, als ob diese «Materie» sich bewegte.

Die Wahrnehmung von Bewegungen im Bunde mit dem Gefühl von widerstandleistenden Raumtheilen führt zu der allgemein angenommenen Ansicht, als ob die Aussenwelt unseres «Ichs» ein grosser, leerer Raum wäre, in welchem sich ein eigenthümliches Ding, die Materie, bald ruhend, bald in Bewegung, befinde.

Die Bewegung ergibt den zweiten vorhin erwähnten Begriff, denjenigen der «Kraft». Unsere Muskeln sind im Stande, irgend welche Gegenstände in Bewegung zu bringen und das Gefühl, das wir bei Reizung unserer Muskeln empfinden, nennen wir Kraft. Die Muskelkraft gilt uns als Ursache der von uns hervorgebrachten Bewegungen. Unwillkürlich denkt man sich bei jeder Bewegung eine analoge Ursache, die man desshalb auch wieder als objektiv existirend betrachtet, und welche man «Kraft» nennt.

Solche Ueberlegungen zeigen deutlich, dass die Begriffe Kraft und Materie eigentlich nur Abstraktionen aus unsern Sinneseindrücken sind und keineswegs unmittelbare, empirische Thatsachen bedeuten.

Trotzdem hat die moderne Naturforschung sich an die landläufige, oberflächliche Anschauung von der objektiven Existenz von Materie und Kraft gehalten und hat neben Raum und Zeit (den Grundbegriffen unserer Vorstellungskraft) noch Materie und Kraft als Grundlagen der Natur hingestellt.

Die Messung von Materie und Kraft hat zunächst zum Begriff der Masse geführt (die leider in Folge dessen unzertrennlich mit dem Materienbegriff verknüpft erscheint, während doch die Masse ein rein physikalischer, die Materie hingegen ein bloss metaphysischer Begriff ist) und dann zur Definition der Kraft als Masse mal Beschleunigung (auch in dieser rein mathematischen Beziehung glaubte man eine thatsächliche Relation zu finden).

Auf diesen Grundlagen, nämlich: auf den Begriffen des Raumes

und der Zeit, auf den rein mathematischen Bewegungsgesetzen, auf dem hergeleiteten Massenbegriff und auf der Definition des Kraftbegriffes, beruht die ganze moderne Mechanik, das vollkommenste System der Naturwissenschaften.

Unter den zahlreichen Principien der Mechanik (von Newton, Lagrange, Hamilton etc.) ist auch eines, das an Bedeutung immer mehr zunimmt, es ist das Princip der Erhaltung der Energie.

Die «Energie» ist in der heutigen Mechanik ein bloss abgeleiteter, sekundärer Begriff, der durch eine zweifache Definition scharf bestimmt ist.

In der Mechanik ist die Energie das Produkt einer Kraft in den von ihr durchlaufenen Weg, oder das Produkt einer Masse in das halbe Quadrat ihrer Geschwindigkeit. — Von dieser Grösse lehrt uns die Mechanik, dass in einem sog. konservativen Punktsystem die Gesammtsumme konstant sei; das ist der Inhalt des Princips der Erhaltung der Energie. —

Aber die sichtbaren mechanischen Erscheinungen umfassen nicht die Gesammtheit der Natur. Wir gewahren nicht nur eigenschaftslose Massen, die sich im Raume bewegen, sondern die sog. Materie weist noch mannigfache Eigenschaften auf: sie hat Farben, sie hat gewisse Temperaturen, sie kann elektrisirt werden, sie kann chemische Umwandlungen erfahren u. s. w. Ausser den gewöhnlichen Bewegungen weist die Natur noch Licht-, Wärme-, Elektricitäts-, chemische und auch Lebenserscheinungen auf. Dieselben hängen nur in einem Punkte untereinander zusammen. Sie sind alle in einander überführbar, und diese Ueberführung ist nicht eine schwankende, sondern erfolgt nach ganz festen Verhältnisszahlen. Und diese Zahlen ergeben sich aus dem Energiebegriff. Jede Naturerscheinung kann in mechanische Arbeit oder in Energie umgewandelt werden und es hat sich gezeigt, dass bei solchen Umwandlungen immer die Energie konstant bleibt.

Damit ist ein Bindeglied zwischen der Mechanik und allen andern Gebieten der Naturwissenschaft hergestellt und es liegt nahe, überhaupt die Mechanik als Grundlage derselben zu betrachten, d. h. alle Naturerscheinungen durch mechanische, durch Bewegungserscheinungen zu erklären.

Darin besteht die sog. mechanistische Weltanschauung. Sie nimmt an, dass in lezter Linie alles Geschehen im Universum Bewegung sei und dass das Ziel der gesammten Naturwissenschaften dahin gehe,

alle Erscheinungen sowohl der todten als der lebenden Welt auf mechanische Bewegungen zurückzuführen, sie durch ein System von mathematischen, mechanischen Formeln darzustellen.

Wie diese Anschauung unbesehen die Begriffe der Materie und Kraft annimmt, haben wir besprochen. Es ist noch zu zeigen, wie sie zur Aufstellung von zwei weitern Hypothesen: der Atom- und der Aethertheorie hat führen müssen.

Wenn alles Weltgeschehen Bewegung ist, so muss es auch verborgene Bewegungen geben. Ein Körper kann Wärme oder Elektricität haben, ohne dass er desshalb in einem sichtbaren Bewegungszustande ist. Die Wärmebewegung, die Elektricitätsbewegung, die Lichtbewegung u. s. w. kann somit nur in unmerklich kleinen Bewegungen bestehen, und damit solche z. B. in einem festen Körper entstehen können, muss die Materie aus getrennten, winzigen Theilchen, Atomen oder Molekülen, zusammengesetzt sein.

Auch die Chemie führt zu ähnlichen Schlüssen. Die Elemente treten nur in ganz bestimmten Gewichtsverhältnissen zu Verbindungen zusammen. Wenn die Materie aber eine kontinuirliche Masse wäre, so wäre nicht wohl einzusehen, wieso eine gegenseitige Durchdringung zweier elementarer Materien nur in festen Gewichtsverhältnissen stattfinden könnte. Diese Schwierigkeit fällt ganz dahin durch die Annahme der Existenz von kleinen Elementarbestandtheilen. Wie sich daraus alle chemischen und physikalischen Erscheinungen erklären lassen, ist zur Genüge bekannt. — Aber aus diesen Betrachtungen geht deutlich hervor, dass die Existenz der Atome eine durchaus hypothetische ist; die Atomtheorie ist nichts anderes als eine ausserordentlich bequeme und unserm Verständniss zusagende Anschauungsweise.

Ebenso verhält es sich mit der Aethertheorie. Es ist festgestellt, dass Licht-, Wärme- und Elektricitäts-Strahlen ohne Vermittlung der sog. Materie im Raume sich fortpflanzen und zwar mit messbarer Geschwindigkeit. Man mag über die Fernewirkung denken, wie man will, so kann man sich doch nie eine Fernewirkung denken, die anders als unendlich schnell von Punkt zu Punkt wirkt. Weil das nicht der Fall ist, muss man sich einen Träger dieser Bewegungen denken, ein Ding, das keine Materie ist und doch Aehnlichkeit damit hat, man nennt es «Aether».

Wenn auch zahllose, ja fast alle physikalischen und chemischen Erscheinungen sich der Atom- und der Aethertheorie einfügen lassen, so wird dadurch ihr hypothetischer Charakter nicht geändert. Atome

und Aether sind wohl die Grundlagen unserer heutigen Naturauffassung, nicht aber der thatsächlichen Naturerkenntniss.

So umfasst denn die mechanistische Weltanschauung ein grossartiges System von wirklichen Erfahrungsthatsachen, die vielfach durch mathematische Theorien verknüpft sind. Aber die Grundlage, die diesem System gegeben wird, ist eine künstlich hineingelegte. Alle Naturerscheinungen werden so zurechtgestutzt, dass sie durch Bewegungszustände erklärt werden sollen. Um dieses Ziel erreichen zu können, muss man 2 grosse Abstraktionen, die Aufstellung der Begriffe der Materie, als Träger der Bewegung, und der Kraft, als Ursache der Bewegung, machen. Und die weitern Konsequenzen führen zu 2 weitern Hypothesen, zur Atom- und Aetherhypothese.

Die obigen Ausführungen sollen keineswegs den Nutzen und die Berechtigung solcher Hypothesen beanstanden. — Hingegen scheint es doch, als ob mit vollem Recht Einspruch erhoben werden sollte gegen die willkürliche Annahme, dass alles Weltgeschehen aus Bewegung bestehen müsse. Das ist im Grunde nur eine philosophische Spekulation, keineswegs ein Resultat der modernen Naturforschung. In diesem Punkt darf desshalb die mechanistische Weltanschauung angefochten werden, und dies thut denn auch die neue Energetik.

Indem wir uns nun zur Betrachtung dieser neuen Anschauungsweise wenden, dürfen wir nicht erwarten, dass dieselbe vollständig hypothesenfrei sein werde; das kann überhaupt keine allgemeine Theorie.

Aber anstatt der 4 hypothetischen Grundbegriffe von Materie, Kraft, Atom und Aether, wird ein einziger Universalbegriff, die Energie, hingestellt, und ein einziges Universalgesetz, das Princip der Erhaltung der Energie.

Dass die Energie und das Energieprincip weitaus allgemeiner als die Materie und das Gesetz der Erhaltung des Stoffes sind, ist nicht schwer einzusehen. Denn die Materie spielt überhaupt nur in den Gebieten der Mechanik, Akustik, Wärmelehre und Chemie eine wesentliche Rolle: zur Erklärung der optischen und elektrischen Erscheinungen muss ein neues, der Aether, erfunden werden. Die Atome wiederum haben nur für gewisse materielle Erscheinungen Bedeutung; der Kraftbegriff ist sogar nur eine subjektive Definition.

Die Energie hingegen ist sämmtlichen Naturerscheinungen gemeinsam; sie ist sogar das einzige gemeinsame, ja sie ist auch das einzig thatsächliche bei allen unsern Sinneseindrücken und das Energie-

princip ist das einzige überall unzweifelhaft geltende Naturgesetz. Sogar im praktischen Leben kommt es in letzter Linie nur auf Energie an. Bei Nahrungsmitteln kommt es nur auf die dem menschlichen Leibe zugeführte Energie an; chemische Verbindungen haben nur in Folge ihrer Erzeugung oder Aufspeicherung von Energie Nutzen für uns. Die Farbe eines Körpers beruht in der Art der von ihm zurückgeworfenen Leuchtenergie. Licht, Wärme, Elektricität, Schall sind Energieformen, die auf unsere Sinne wirken. Die Bewegungen der Körper (sofern sie nicht rein mathematische Gesetze angeben) haben nur nach dem Grade ihrer Energie Bedeutung. Das Gewicht eines Körpers ist nur ein Mass seiner potentiellen Energie; die Trägheit der Materie ist nichts anderes als der Ausdruck des Princips der Erhaltung seiner Energie; die Undurchdringlichkeit der Körper ist auch nur die bei Stoss oder Kompression auftretende Energie. — So einfach dies scheint, so leicht wird doch ein sehr gewichtig scheinender Einwand gemacht, nämlich: dass die Energie nicht ohne einen Träger existiren könne, also nicht ohne Materie oder Aether. Der Einwand widerlegt sich von selbst. Wenn die Energie alle uns wahrnehmbaren Eigenschaften eines Körpers besitzt, und die Materie nur ein ganz eigenschaftsloser Träger der Energie sein soll, so sieht man nicht recht ein, warum die Existenz der Energie nicht genügend sein sollte, und wesshalb noch ein ganz räthselhafter und unbekannter Träger ihr untergeschoben werden müsste. — Bekannt ist das drastische Beispiel von Ostwald, wo er hervorhebt, dass man bei einem Schlag mit einem Stock doch niemals den Stock selber, sondern nur seine Energie fühle.

Diese Allgemeinheit der Energie ist es hauptsächlich, worauf die Energetik sich stützt. Selbstverständlich ist dieselbe noch viel zu jung und zu neu, als dass sie in einem ausgearbeiteten Systeme vorgeführt werden könnte; desshalb ist sie auch aller und jeder Kritik wehrlos ausgesetzt und kann vorläufig keine andere Waffe in das Feld führen als ihre dem ganz unbefangenen Beurtheiler einleuchtende Einfachheit. — Auch ist die Energetik gegenwärtig noch ein Versuchsfeld für alle möglichen Tendenzen: Hier soll nur in Kürze der Richtung gedacht werden, wie sie von *Ostwald* vertreten wird.

Wir fragen zunächst:

Was ist diese Energie? — Sie ist nichts anderes, als das allen Naturerscheinungen gemeinsam zu Grunde liegende: das unbekannte Ding, das immer in andern Formen uns erscheint, und doch in un-

veränderlicher Gesammtsumme unzerstörbar bleibt (eine genauere, physikalische Definition folgt später). — Ihr erstes und wichtigstes Gesetz ist also das sog. Energieprincip, das deren Unzerstörbarkeit feststellt. Weitere Gesetze müssen sich aus der Art der Uebergänge von einer Energieform in eine andere ergeben. Das führt zu einer fundamentalen Methode der Energetik, zur Zerlegung in Faktoren. Wie dies zu verstehen ist, werden folgende Beispiele zeigen: Wenn Wärme von einem Körper auf einen andern benachbarten übergehen soll, so findet das nur statt, wenn die beiden Körper verschiedene Temperaturen besitzen — die vorhandene Wärmemenge, also die Quantität Energie, hat dabei keinen Einfluss; denn sobald Temperaturgleichheit herrscht, hört der Wärmeübergang auf. Oder, wenn eine grosse und eine kleine Kugel sich berühren und sich mit gleicher Geschwindigkeit in gleicher Richtung fortbewegen, so haben die beiden ganz verschiedene lebendige Kräfte und doch findet kein Ausgleich statt. Ein solcher tritt aber sofort ein, wenn eine Aenderung in der Geschwindigkeit der Kugeln erfolgt. Ebenso sind oft ganz verschiedene Elektricitätsmengen auf 2 leitend verbundenen Kugeln im Gleichgewicht, so lange keine Potentialdifferenz besteht.

So zeigen sich überall gewisse Faktoren der Energie, wie die Temperatur, die Geschwindigkeit, das Potential, von denen allein der Grad des Ueberganges von Energie bestimmt wird, und welche demnach «Intensität der Energie» genannt werden.

Sondert man im Energiebegriff einen Faktor, die Intensisät, ab, so gibt der übrigbleibende Faktor die Fähigkeit an, solche Intensität aufzuspeichern, und wird desshalb «Capacität» genannt.

Es mag hier die Tabelle von Ostwald angeführt sein:

Energie.	Capacität.	Intensität.
A. Bewegungsenergie (kinetische).	Masse. / ½ Bewegungsgrösse.	½ Geschwindigkeitsquadrat. / Geschwindigkeit.
B. Raumenergie (potentielle).		
a) Distanzenergie.	Strecke.	Kraft.
b) Flächenenergie.	Fläche.	Flächenspannung.
c) Volumenergie.	Volum.	Druck.
C. Wärmeenergie.	Wärmecapacität.	Temperatur.
D. Elektrische Energie.	Elektricitätsmenge.	Potential.
E. Magnetische Energie.	Magnetische Menge.	Magnetisches Potential.
F. Chemische Energie.	Verbindungsgewicht.	Affinität.
G. Strahlende Energie.	Absorption resp. Emission.	Intensität der Strahlung.

Diese Zerlegungen sind in der Weise gemacht, dass jeweilen die Grösse, welche ein Mass des Energieüberganges liefert, bestimmt und als Intensität bezeichnet wurde. Der übrigbleibende Faktor ergibt die Capacität.

Diese Zerlegung erlaubt es, die Gesammtheit der Naturprocesse von einem überaus praktischen und einfachen Standpunkte aus zu übersehen. — Dabei muss nur vor einer Gefahr gewarnt werden, vor der Gefahr, den Capacitätsgrössen die alt gewohnten Begriffe unterzuschieben und so der alten mechanistischen Anschauung auch in der Energetik Eingang zu verschaffen.

Das darf nicht sein; die Capacitätsgrössen müssen lediglich als Faktoren der Energie angesehen werden, ohne dass ihnen eine reelle Existenz zugeschrieben werden dürfte. — Dies gilt namentlich für den Begriff der Masse, dem hier keine Realität zugesprochen wird, sondern der nur als sekundärer Faktor aus der Bewegungsenergie abgeleitet ist.

Das wird deutlich hervorgehen, wenn wir uns ein Bild von der Aussenwelt auf energetischer Grundlage zu machen suchen (was natürlich gegenwärtig nur in sehr oberflächlicher Weise geschehen kann).

Wir denken uns als Ursache unserer Sinneseindrücke Energieformen, die räumlich getrennt erscheinen und die im Laufe der Zeit ihre räumliche Lage ändern und auch ihre Erscheinungsform stets wechseln, wobei aber die Gesammtsumme der Energie konstant bleibt.

Diese Energie ist entweder an mehr oder weniger scharf abbegrenzte Raumtheile (Körper) gebunden, oder sie ist in steter Bewegung begriffen und zwar mit ausserordentlicher Geschwindigkeit. — Die letztere Art ist die Strahlungsenergie, die als Licht- oder Wärme- oder elektrische Strahlen den Weltenraum durchsetzt, bis sie von gewissen Raumkörpern aufgefangen und in Wärmeenergie verwandelt wird (das ist die Eigenschaft der Absorption).

Die an Raumkörper gebundene Energie kommt meist in verschiedenen Formen gleichzeitig vor, meist als Wärmeenergie, als chemische Energie, als Volumenergie und als Raumenergie, wobei noch die Eigenschaft mit verbunden ist, auf auffallende Strahlungsenergie zu reagiren (d. h. sie zu reflektiren, zu brechen und zu absorbiren). Vorübergehend kann auch magnetische oder elektrische Energie an einer solchen Raumform auftreten. Ferner können diese Energien ineinander sich umformen, wobei dann meist ein Quantum

als strahlende Energie den Körper verlässt. Endlich kann insbesondere die Volumenergie (deren Intensität einfach die alte Eigenschaft der Undurchdringlichkeit der Materie darstellt) sich (meist auf Kosten der Wärmeenergie) wesentlich umformen, so dass die andern Energien sich im Raume verschieben; darauf beruhen die Unterschiede von festen, flüssigen und gasförmigen Körpern.

Von Wichtigkeit ist namentlich die Raumenergie. Für unsere irdischen Körper stellt sie nichts anderes als die Energie der Schwerkraft dar, im Weltenraum aber die Energie der Gravitation; in elektrischen und magnetischen Feldern kann endlich die Raumenergie auch mit der elektrischen oder magnetischen in Wechselwirkung treten. Aber abgesehen hievon bedeutet sie nichts anderes, als dass auf unserer Erde ein höher gelegener Körper mehr Energie besitzt, als ein tiefer gelegener.

Eine Aenderung der Raumenergie bedeutet desshalb stets Bewegung, und die verschwundene Raumenergie kommt in einer andern Form wieder zum Vorschein, als Bewegungsenergie.

Raumenergie und Bewegungsenergie sind also in einfacher Wechselwirkung, und diese Wechselwirkung bildet das Gebiet der Mechanik.

Die experimentellen Untersuchungen derselben zeigen nun, dass die charakteristische Grösse der Bewegungsenergie, ihre Intensität, das Quadrat der Geschwindigkeit ist. Der andere Faktor ist dann ein blosser Hülfsbegriff, «Masse» genannt. — Allerdings zeigt dann die weitere Untersuchung dieses Hülfsbegriffes, dass er ausserordentlich wichtige Eigenschaften hat, namentlich folgende 3: Die Masse besitzt die Eigenschaft der Unzerstörbarkeit, ferner ist sie stets proportional dem bewegten Volumen, endlich ist sie vielen andern Capacitätsfaktoren proportional, z. B. ist die Wärmecapicität = Masse mal specifische Wärme, die chemische Capacität = Masse mal Aequivalenzzahl u. s. w. Es ist begreiflich, dass man desshalb auf den Gedanken verfallen ist, der Masse als Materie eine objektive Realität zuzuschreiben; dabei sind dann die der Masse proportionalen Capacitätsfaktoren als Grundeigenschaften der Materie (wie Gewicht, Undurchdringlichkeit etc.) bezeichnet worden, die nicht proportionalen hingegen als vorübergehende Zustände derselben (wie Geschwindigkeit, Temperatur, Potential etc.). — Damit ist wohl zur Genüge gezeigt, wie man den Massenbegriff in der Energetik aufzufassen hat. Es wären nun noch eine Reihe von Sätzen anzuführen, welche angeben, in welcher Weise die ver-

schiedenen Energiegrössen sich umformen und verändern. Da aber hierüber noch kein abschliessendes Resultat erreicht ist, so treten wir nicht darauf ein.

Hingegen gestatten die bisherigen Auseinandersetzungen etwa folgende Bilanz zu ziehen:

Die mechanistische Weltanschauung knüpft unmittelbar an Ideen an, wie sie sich unserm Verstand unwillkürlich aufdrängen: an Materie und Kraft. Sie gibt auf dieser Grundlage das denkbar anschaulichste Bild aller Naturerscheinungen, indem sie dieselben auf Bewegung von endlichen Massen oder von getrennt bestehenden Atomen zurückführt. Zudem beruht diese Anschauung auf seit Jahrhunderten in ihrem Sinne ausgeführten Forschungen und hat desshalb eine Fülle von Thatsachen hinter sich, die sich nicht ohne Weiteres auf einer neuen Grundlage umformen lassen.

Alles das fehlt der Energetik vollständig. Die Energie ist bisher meist nur als ein mathematischer Ausdruck, als ein rein geistiger Begriff, aufgefasst worden. Selbstverständlich wird es jedermann ausserordentlich schwer, sich ein Weltbild zu machen, in dem nur Energie vorkommt. Ferner ist die Energetik ganz neu und hat noch keine Resultate aufzuweisen.

Aber das alles sind keine stichhaltigen Gründe, um zu entscheiden, welche Theorie der Wahrheit am nächsten stehe. Hingegen spricht die Thatsache, dass die Energetik sich möglichst genau, ohne Hypothesen und Hülfsbegriffe und Bilder und Abstraktionen, den empirischen Thatsachen anzuschliessen sucht, ausserordentlich zu ihren Gunsten. — Wenn die Energetik auch noch lange nicht den Schlussstein unserer Naturerkenntniss bildet, so bedeutet sie doch wohl einen wahren Fortschritt, eine Vereinfachung gegenüber den alten Theorien.

Die Bedeutung der alten Begriffe wird dadurch nur geändert, aber nicht minderwertig gemacht.

Wie wir noch heute von Sonnenaufgang und -untergang sprechen, obschon wir wissen, dass die Erde sich um die Sonne bewegt, oder wie wir immer noch von Wärmemenge und Elektricitätsmenge sprechen, obgleich bekannt ist, dass Wärme und Elektricität blosse Zustände sind, so werden wir auch fernerhin von Materie, von Kraft, von Atomen und von Aether reden, obgleich wir überzeugt sind, dass die Energie die einzig reelle Grundlage unserer Naturerkenntniss ist.

Es mag hier als Anhang ein Versuch gegeben werden, der Energetik eine etwas präcisere, mathematische Grundlage zu geben, wobei aber keineswegs Anspruch auf erschöpfende Behandlung gemacht wird.

Um zunächst eine Definition des Energiebegriffes aufzustellen, halten wir uns am einfachsten an die von *Planck* in seinem vorzüglichen Buche «Das Princip der Erhaltung der Energie» (Leipzig 1887) gegebene. Mit einigen Abänderungen lautet dieselbe:

«Die Energie eines Raumsystems in einem bestimmten Zustand ist der in bestimmten Einheiten gemessene Betrag aller Wirkungen, welche ausserhalb des Systems hervorgerufen werden, wenn dasselbe aus seinem Zustande in einen auf beliebige Weise nach Willkür fixirten Nullzustand übergeht.»

Statt «materielles System» ist hier Raumsystem gesagt. In der Energetik sieht man ja von der Materie ab und der wahre Inhalt des alten Ausdruckes «materielles Punktsystem» ist doch nur der, dass Raumpunkte angenommen werden, welche Kraftcentren sind, also Energie ausgeben. Unter Raumsystem wird man im Allgemeinen einen zusammenhängenden Raumtheil sich denken; wenn es aber (der mathematischen Behandlung willen) Bedürfniss wird, ein System nach Art getrennter, materieller Punkte zu betrachten, so hat man einfach das Raumsystem in einzelne, getrennte Raumelemente, von denen jedes ein Energiedifferential besitzt, zu zerlegen. — Nur liegt dann darin keine metaphysische Hypothese (wie bei der Atomistik), sondern eine bloss mathematische, bequeme Methode, wie sie ja überall, wo die Differentialrechnung benutzt werden soll, angewendet wird.

Hingegen hat das Ersetzen des Wortes «materielles System» durch «Raumsystem» den grossen Vorzug, dass diese Definition auch ohne Weiteres auf nicht materielle Vorgänge, also auf ausgestrahlte Licht-, Wärme- und Elektricitäts-Energie übertragbar ist. — Eine zweite Verallgemeinerung liegt darin, dass die Natur der Einheit, in denen die Wirkungen bei Veränderung des Raumsystems zu messen sind, noch nicht bestimmt ist.

Abgesehen von diesen 2 Aenderungen gelten alle von Planck in seinem Buche gemachten Auseinandersetzungen; es soll desshalb darauf nicht weiter eingegangen werden.

Nachdem in dieser Weise der Energiebegriff definirt ist, ist sein Grundgesetz, das sog. «*Energieprincip*» zu formuliren.

Planck definirt es also (mit entsprechender Aenderung): «Die Energie eines Raumsystems in einem bestimmten Zustand genommen

in Bezug auf einen bestimmten andern Zustand als Nullzustand, hat einen eindeutigen Werth.»

Eine ähnliche Definition gibt *Helm* in seinem Werke: «Die Lehre von der Energie» (Leipzig 1887), die wir also umformen können:

«Die Energie eines Raumsystems ist eine nur vom augenblicklichen Zustande des Systems abhängige, veränderliche Grösse.»

Diese allgemeinste Form des Energieprincips führt bei einem für sich abgeschlossenen Raumsystem, aus dem keine Energie heraus und keine hineintreten kann, zum Princip der Erhaltung der Energie, das wir also formuliren:

«Bei jeder möglichen Veränderung eines für sich abgeschlossenen Raumsystems bleibt die Gesammtsumme der Energie unverändert.»

In Uebereinstimmung mit den Betrachtungen von *Helm* (Zeitschrift für Mathematik und Physik Bd. 35. — 1890) muss darauf Nachdruck gelegt werden, dass dieses Energieprincip für alle «möglichen» Aenderungen des betreffenden Systems gelten muss und nicht nur für die wirklich eintretenden. Ein System kann theoretisch sich in zahllosen Weisen ändern, in Praxis findet die Aenderung nur in einem ganz bestimmten Sinne statt. Das Energieprincip gilt für alle denkbaren Aenderungen; um zu wissen, welche wirklich eintritt, muss ein zweites Grundgesetz der Energetik aufgestellt werden. Dasselbe ist noch nicht in definitiver Fassung gefunden. Die diesbezüglichen Untersuchungen von *Ostwald* haben noch kein allgemein anerkanntes Gesetz zu Tage gefördert. Auch hier mag diese Frage noch offen bleiben, wir werden erst nachher einen speciellen Fall dieses Gesetzes besprechen.

Damit sind wohl die hypothetischen Grundlagen der Energetik festgestellt; sie sind zusammengefasst in der Definition des Energiebegriffes, im Energieprincip (resp. im Princip der Erhaltung der Energie) und in dem noch nicht formulirten zweiten Grundgesetz der Energetik, dem sog. Princip des ausgezeichneten Falles.

Die weitern Ausführungen sind entweder experimentelle Festsetzungen oder mathematische Entwicklungen.

Durch das Experiment sind zunächst die Einheit der Energie und nachher die verschiedenen Formen derselben und endlich deren Zerlegung in Capacität und Intensität zu bestimmen.

Offenbar sind die mechanischen Arbeits-Einheiten nicht geeignet, als Einheiten der Energie zu dienen, weil sie zu leicht wieder die alten mechanischen Begriffe in die Energetik hineinschmuggeln. Um

so besser sind die Wärmeerscheinungen verwendbar. Zunächst ist die Wärmetheorie überhaupt auf das Energieprincip gegründet, und ferner ist die Ueberführung irgend einer Energieform in Wärme immer die häufigste und am leichtesten und vollkommensten ausführbare. Somit definiren wir:

«Die Einheit der Energie ist diejenige Energie, welche 1 kg. reines Wasser von 0° C auf 1° C erwärmt.»

Jede Energieform lässt sich in dieser Einheit ausdrücken, wobei sich gleichzeitig deren Abhängigkeit von gewissen Grössen, den Intensitäten, feststellen lässt.

Ein geschlossener, galvanischer Stromkreis bildet z. B. ein Raumsystem. Seine gesammte Wirkung äussert sich als Wärme; misst man diese Wärme, so erhält man seine Energie. Die genauere Untersuchung dieser abgegebenen Energie führt auf das Gesetz von Joule: die Energie ist $= i^2.w$, oder $= \frac{E^2}{w}$, oder $= E.i$.

Weitere Untersuchung zeigt, dass solche Energie nur auftritt, wenn E von Null verschieden ist, und ferner dass die Grösse w für ein gegebenes Raumsystem (d. h. für einen gegebenen Stromkreis) konstant bleibt. Es liegt also nahe, die Grösse E, die sog. elektromotorische Kraft, resp. ihr Quadrat E^2, als Intensität zu bezeichnen, und den andern konstanten Faktor, $\frac{1}{w}$, als Capacität.

So lassen sich alle Energieformen untersuchen und zerlegen. Von Wichtigkeit ist diese Ausführung bei der Bewegungsenergie.

Ein Raumsystem bewege sich mit einer Geschwindigkeit v. Um dessen Energie nach der aufgestellten Definition zu ermitteln, hat man die äussern Wirkungen zu messen, welche entstehen, wenn dieses System von seinem gegenwärtigen Zustande in einen Nullzustand gelangt.

Als Nullzustand werde die Geschwindigkeit o gesetzt. Die Energien sind wiederum in Wärmeeinheiten anzugeben. — Wenn ein solches (starres) Raumsystem mit der Geschwindigkeit v an eine starre Wand stösst, so gelangt es zur Ruhe, es ist in den gewünschten Nullzustand versetzt. Dabei äussert sich seine Energie in Wärmewirkungen und die experimentell bestimmbare Erwärmung gibt ein Mass der Bewegungsenergie. — Weitere Untersuchungen würden zeigen, dass bei ein und demselben Raumsystem (demselben Körper) die Erwärmung proportional dem Quadrat der Geschwindigkeit sei, ferner dass sie

dem Volumen des bewegten Raumsystems direkt proportional und endlich, dass sie von der Natur des Raumsystems (das ist nichts anderes, als von den übrigen, in ihm eingeschlossenen, chemischen, thermischen Energien etc.) abhängig sei.

Also ist die Bewegungsenergie $= K. V. v^2$, wo v die Geschwindigkeit, V das Volum und K eine von Körper zu Körper sich ändernde Grösse ist. Da die Bewegungsenergie nur besteht, so lange v von Null verschieden ist, so wird v^2 zweckmässig die Intensität, hingegen der bei der Bewegung sich nicht ändernde Faktor die Capacität genannt. Die Hälfte dieses Faktors $\frac{K. V}{2}$ ist dann die in der Mechanik so wichtig gewordene Grösse, die Masse.

Etwas schwierig ist die Behandlung der sog. Raumenergie, weil dieselbe auf die Gesetze der Gravitation führt und in der Energetik eine ganz andere Behandlungsweise verlangt, als in der alten Mechanik mit ihrer Theorie der Fernewirkung. Der Begriff der mechanischen Arbeit (Kraft mal Weg) hat in der Energetik nur noch Sinn, wenn er sich auf die Gravitation bezieht. In der That sind Wärme Elektricität, Licht, Elasticität, Affinität u. s. w. bestimmte Energieformen, die mit dem Kraftbegriff nichts zu thun haben. Sieht man noch von passiven Wiederständen ab, so gibt es keine Arbeitsform, die nicht durch die Gravitation hervorgerufen wäre, resp. durch die Schwerkraft auf unserer Erde.

Die Raumenergie spielt desshalb in der Energetik dieselbe Rolle wie die Gravitation in der alten Mechanik. Und wie dort die Gravitationsgesetze als einfache Thatsache angenommen werden, ohne dass man sich über deren Ursache Rechenschaft geben kann, so ist es hier dasselbe mit den Raumenergiegesetzen. Nur ist bei letztern der grosse Vortheil, dass sie die Annahme einer unvermittelten Fernewirkung umgehen.

Bevor dies erläutert wird, mögen zunächst einige allgemeine Betrachtungen darthun, in welcher Weise sich die Raumenergie in Bewegungsenergie umformt (also die potentielle Energie in kinetische).

Wir denken uns ein sog. konstantes Raumenergiefeld. Jedes Raumelement dv (seine Raumcoordinaten seien x, y, z) möge eine zu allen Zeiten unveränderliche Energiemenge $e . dv$, die «Raumenergie», besitzen. Die Vertheilung dieser Raumenergien sei ein für alle mal gegeben: $e = f(x, y, z)$ sei eine stetige, von der Zeit unabhängige Funktion.

In dieses Feld komme eine andere Energieform, die im Raume beweglich ist, hinein. So möge im Raumelement $d\tau$ eine gewisse Wärme-, Volum-, Elektricitäts-, chemische Energie etc., im Gesammtbetrag $\varepsilon d\tau$ vorhanden sein. Wir nennen sie im Unterschied zur vorigen die «Körperenergie». Da hier nur mechanische Erscheinungen starrer Körper untersucht werden sollen, so können wir annehmen, dass alle diese Energien im Raumelement $d\tau$ unveränderlich bleiben mögen. Es ist dieselbe Annahme, die stillschweigend in der Mechanik starrer Körper gemacht wird.

Das Auftreten von Körperenergie in einem Raumenergiefeld wird in der Regel eine Bewegung der Körperenergie zur Folge haben. Wir dürfen aber nicht annehmen, dass die Körperenergie nur zufällig mit einer gewissen Raumenergie zusammenfällt; sondern die an einer Stelle liegenden Energien bilden ein fest zusammenhängendes Ganzes, so dass bei der Bewegung sowohl Körper- als auch Raumenergie gleichzeitig sich fortbewegen. Das ist kein Widerspruch mit der vorhin festgestellten Konstanz der Raumenergie; denn in dem Masse als die Körperenergie sich bewegt und die Raumenergie mit sich fortführt, gleicht sich die entstandene Lücke hinter ihr sofort wieder aus, gerade wie bei einem im Wasser sinkenden Körper.

Ist z. B. im Punkte $(x\,y\,z)$ zur Zeit t die Raumenergie $e\,.\,d\tau$ und dabei die Körperenergie $\varepsilon\,.\,d\tau$, so ist zur gleichen Zeit im benachbarten Punkt $(x + dx,\ y + dy,\ z + dz)$ die Raumenergie $(e + de)\,d\tau$, wo $de = \frac{\partial e}{\partial x} dx + \frac{\partial e}{\partial y} dy + \frac{\partial e}{\partial z} dz$, im nächstbenachbarten $(x + 2\,dx,\ y + 2\,dy,\ z + 2\,dz)$ die Raumenergie $(e + 2\,de)\,d\tau$, u. s. w. — Die Körperenergie durchlaufe der Reihe nach alle diese Punkte und komme nach der Zeit t_0 mit einer Geschwindigkeit v in den Punkt $(x_0\,y_0\,z_0)$, dessen Raumenergie $e_0\,d\tau$ sei.

Im ersten Zeitdifferential dt gelangt die Gesammtenergie $(e + \varepsilon)\,d\tau$ in den ersten Nachbarpunkt; dann ist in $(x\,y\,z)$ die Energie 0, und in $(x + dx,\ y + dy,\ z + dz)$ die Energie $(e + de)\,d\tau + (e + \varepsilon)\,d\tau$ Sofort findet ein Ausgleich statt, so dass der Anfangspunkt $(x\,y\,z)$ die Energie $(e + de)\,d\tau$, und der zweite Punkt die Energie $(e + \varepsilon)\,d\tau$ erhält. So geht dies weiter, $(e + \varepsilon)\,d\tau$ schreitet von Punkt zu Punkt fort. Nach t_0 Sekunden ist folgende Aenderung eingetreten:

		Anfang:	Schluss:
Im	1. Punkt	$e\,d\tau + \varepsilon\,d\tau$	$(e + de)\,d\tau$
•	2. •	$(e + de)\,d\tau$	$(e + 2\,de)\,d\tau$
•	3. •	$(e + 2\,de)\,d\tau$	$(e + 3\,de)\,d\tau$
.	. . . . .	. . . . .	. . . . .
.	. . . . .	. . . . .	. . . . .
•	$(n-2)$. •	$(e_0 - 2\,de)\,d\tau$	$(e_0 - de)\,d\tau$
•	$(n-1)$. •	$(e_0 - de)\,d\tau$	$e_0\,d\tau$
•	n. •	$e_0\,d\tau$	$e\,d\tau + \varepsilon\,d\tau =$
			$e_0\,d\tau + (e - e_0)\,d\tau + \varepsilon\,d\tau.$

Das Resultat ist folgendes (wenn man absieht von der Verschiebung der Differentiale de, die ja von keinem merkbaren Einfluss ist, und die auch ausgeglichen werden kann): Die Gesammtsumme der Energie ist dieselbe geblieben, die Vertheilung der Raumenergie auch, hingegen hat sich die Körperenergie bewegt und da sie ihre anfängliche Raumenergie mit sich genommen hat, so ist nun im Endpunkt der Bewegung ein Ueberschuss von Raumenergie $(e - e_0)\,d\tau$ vorhanden, der in einem konstanten Raumenergiefeld nicht vorhanden sein darf. Er wandelt sich also einfach in eine andere Form um; es ist dieser Ueberschuss die bei der Bewegung entstehende *Bewegungsenergie.* Unsere Voraussetzungen führen also ganz natürlich auf den für die Mechanik fundamentalen Satz, dass die Zunahme von Bewegungsenergie immer gleich der Abnahme von Raumenergie ist, und umgekehrt.

Wenn in diesem Punkt $(x_0\ y_0\ z_0)$ die Körperenergie mit ihrer erlangten Geschwindigkeit v auf eine Wand stossen würde, so würde die Bewegungsenergie $(e - e_0)\,d\tau$ sich in Wärme umformen und es würde nur noch die dem Punkte $(x_0\ y_0\ z_0)$ zukommende, unzerstörbare Raumenergie $e_0\,d\tau$, nebst der Körperenergie $\varepsilon\,d\tau$ übrigbleiben. Dabei würde sich dann ergeben, dass die Bewegungsenergie proportional dem Quadrat der Geschwindigkeit sein muss.

In diesem Zusammenhang liegt aber das Gesetz verborgen, das den Eintritt und Verlauf einer Bewegung bestimmt, also das zweite Gesetz der Energetik, allerdings nur auf den speziellen Fall der Umsetzung von Raumenergie in Bewegungsenergie angewendet. Wir können es also aussprechen:

«Wenn sich in einem konstanten Raumenergiefeld Körperenergie befindet, so wird dieselbe in der Regel in Bewegung versetzt, wobei

sich Raumenergie in entsprechende Bewegungsenergie umsetzt; *die Bewegung erfolgt so, dass die entstehende Bewegungsenergie proportional dem Quadrate der Geschwindigkeit ist.*«

Darin liegt die ganze Mechanik inbegriffen, und in diesen Aus-ihrungen scheint mir auch der von *Boltzmann* gegen die Energetik Betreff der Bewegungsenergie gemachte Einwurf befriedigend er-digt. (Wied. Ann. 57. p. 39 — 1896.)

Noch bleibt uns übrig, den Zusammenhang zwischen Körperenergie d Raumenergie zu erörtern.

Die Annahme der Konstanz der Raumenergiefelder ist nicht der ıhrheit entsprechend, sondern nur eine zum Zwecke der leichtern handlungsweise gemachte Vereinfachung. — In Wahrheit hat jede rperenergie die Eigenschaft, die Vertheilung der Raumenergie zu lern und in Wirklichkeit ist die Bewegung eines Körpers nicht nur ı Umsetzung von Raumenergie in Bewegungsenergie, sondern auch ı stetigen Aenderungen der umgebenden Raumenergie selber be-itet. Darin liegt ein neues Gesetz der Energetik, das nichts anderes als der Ausdruck der experimentellen Thatsache der Gravitation. ist hier nicht nöthig, weiter darauf einzutreten, sobald wir bedenken, ıs eine völlige Analogie zwischen Wechselverhältniss von Körper-ergie und Raumenergie einerseits, und elektrisch geladenen Körpern d dielektrischen Medien andererseits besteht (abgesehen von der weglichkeit der Elektricität auf den Leitern).

Zum Schluss mögen die hier aufgestellten Principien auf einige tze der Mechanik angewendet werden. — Die folgenden Ableitungen ıliessen sich in vielen Punkten an die von *Helm* angegebenen, mit m Unterschied, dass hier absichtlich nicht die allgemeinen Principien r Mechanik sondern nur einzelne Beispiele elementar abgeleitet ırden, und ferner, dass diese Ableitungen sich an die vorhin aus-führten und (soviel mir bekannt ist) neuen Ideen von Raumenergie-dern knüpfen, während Helm noch die Begriffe Masse und Kraft als sgangspunkt nimmt.

Wir gründen die Mechanik auf folgende 3 Grundgesetze:

1. *In einem Raumenergiefeld ist stets, bei jeder möglichen Ver-derung, die Zunahme der Raumenergie* E *gleich der Abnahme der wegungsenergie* T, *und umgekehrt.* Also $dT = -dE$.

2. *In einem Raumenergiefeld geräth eine vorhandene Körper-rgie in solche Bewegung, dass ihre Bewegungsenergie proportional n Quadrat der Geschwindigkeit ist.*

Also ist für ein Raumelement[1]) $d\tau$, mit den Raumcoordinaten x, y, z, zur Zeit t:

$$T = K \cdot d\tau \left(\left(\frac{\partial x}{\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial t}\right)^2 \right) . = K \cdot d\tau \cdot v^2.$$

3. *Jede Körperenergie modificirt die Vertheilung der umgebenden Raumenergie.*

Zunächst sehen wir von den Wirkungen der Gravitation ganz ab, betrachten also die im dritten Gesetz erwähnte Modifikation als verschwindend.

I. *Homogenes Raumenergiefeld.*

Es sei überall E konstant.

Sei im Punkte (x y z) eine Körperenergie $\varepsilon \cdot d\tau$.

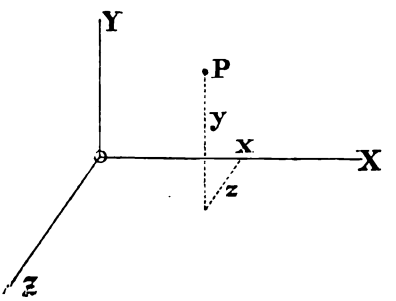
Es ist $dE = 0$, also $dT = 0$, $T =$ konstant,

somit v^2 *konstant.* — War v anfangs Null, so bleibt es Null.

Der Körper bewegt sich also mit konstanter Geschwindigkeit; ist er aber Anfangs in Ruhe, so bleibt er konstant in Ruhe.

Darin liegt das *Gesetz der Trägheit.*

II. *Feld mit nach einer Richtung linear sich ändernden Raumenergie.*



Die Raumenergie möge parallel der Y-Axe variiren und zwar linear.

Also ist:

$$\frac{\partial E}{\partial x} = 0 \qquad \frac{\partial E}{\partial y} = a \cdot d\tau \qquad \frac{\partial E}{\partial z} = 0.$$

Ist für $y = 0$ die Raumenergie $= E_0$, so folgt für das Raumelement $d\tau$ in dem Punkte P:

$$E - E_0 = a \cdot y \cdot d\tau.$$

Ist im Punkte P eine Körperenergie $\varepsilon\, d\tau$, so findet demnach Bewegung statt.

Dieselbe ist bestimmt, sobald die Coordinaten x, y, z als Funktionen der Zeit t eindeutig bestimmt sind. Diese Bestimmung lässt sich mit den 2 Grundgesetzen vollziehen.

---

[1]) Es ist hier immer nur von Raumelementen dr und nicht von ganzen Körpern die Rede, nicht etwa, weil man sich in der Energetik die Körper als aus materiellen Punkten zusammengesetzt denken würde, sondern nur um der mathematischen Rechnung willen. Durch Integration sind die für ein Raumelement gewonnenen Resultate leicht auf Körper auszudehnen.

Zunächst folgt: $T = K\,d\tau \left\{\left(\frac{\partial x}{\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial t}\right)^2\right\}$

Hier kann t als einzige unabhängige Variable aufgefasst werden, also

$$dT = \frac{\partial T}{\partial t}\,dt = 2\,K\,d\tau \left\{\frac{\partial x}{\partial t}\cdot\frac{\partial^2 x}{\partial t^2} + \frac{\partial y}{\partial t}\cdot\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + \frac{\partial z}{\partial t}\cdot\frac{\partial^2 z}{\partial t^2}\right\} dt$$

Ebenso $dE = \frac{\partial E}{\partial t}\,dt = \frac{\partial E}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial t}\,dt = a\,d\tau\cdot\frac{\partial y}{\partial t}\,dt.$

Diese beiden Ausdrücke müssen einander gleich und entgegengesetzt sein.

Aus ganz entsprechenden Gründen, wie sie *Helm* bei seinen Ableitungen befolgt, muss (da die Gleichsetzung für jede *mögliche* Aenderung gelten soll) diese Gleichung

$$2\,K\,d\tau\,\frac{\partial^2 x}{\partial t^2}\cdot\frac{\partial x}{\partial t} + \left(2\,K\,d\tau\,\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} - a\,d\tau\right)\frac{\partial y}{\partial t} + 2\,K\,d\tau\,\frac{\partial^2 z}{\partial t^2}\cdot\frac{\partial z}{\partial t} = 0$$

in 3 zerfallen, nämlich in die 3 Faktoren von $\frac{\partial x}{\partial t}$, $\frac{\partial y}{\partial t}$ und $\frac{\partial z}{\partial t}$, deren jeder einzeln $= 0$ zu setzen ist.

Daraus folgt:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = 0$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} = -\frac{a}{2K}$$

$$\frac{d^2z}{dt^2} = 0$$

Aus diesen Gleichungen, vereinigt mit passenden Anfangs- und Grenzbedingungen, ergeben sich in bekannter Weise alle Gesetze der Wirkung der Schwerkraft (schiefer Wurf und freier Fall), wobei sich zeigt, dass die Grösse $\frac{a}{2K}$ die bekannte Beschleunigung g durch die Erdanziehung bedeutet.

Die Integration der Gleichungen gibt:

$\frac{dx}{dt} = c_1$ $\qquad \frac{dy}{dt} = -gt + c_2$ $\qquad \frac{dz}{dt} = c_3$: Geschwindigkeiten.

$x = c_1 t + c_4$ $\quad y = -g\frac{t^2}{2} + c_2 t + c_5$ $\quad z = c_3 t + c_6$: Wege.

War das Raumelement Anfangs in Ruhe in der Höhe h über dem Nullpunkt, also zur Zeit $t = 0$: $x = 0$, $y = h$, $z = 0$, so folgt zunächst $c_4 = c_5 = c_6 = 0$ und ferner aus den ersten Differentialquotienten: $c_1 = c_2 = c_3 = 0$.

Es bleibt nur:

$$\frac{d^2y}{dt^2} = -g$$

$$\frac{dy}{dt} = -gt$$

$$y = -\frac{gt^2}{2}$$

Das sind die Gesetze des *freien Falles.*

Ebenso ergibt sich der *schiefe Wurf.*

Ist das Raumelement Anfangs im Coordinatenursprung und erhält in der Richtung α (mit der positiven X-Axe) einen Antrieb, eine Geschwindigkeit c, so ist offenbar:

für $t = 0$: $x = 0,\ y = 0,\ z = 0$

$$\frac{dx}{dt} = c \cdot \cos\alpha,\ \frac{dy}{dt} = c \cdot \sin\alpha,\ \frac{dz}{dt} = 0$$

Also: $c_4 = c_5 = c_6 = 0$

$$c_1 = c \cdot \cos\alpha,\ c_2 = c \cdot \sin\alpha,\ c_3 = 0$$

Somit die gesuchten Wurfgleichungen:

$x = c\,t\cos\alpha$	$\frac{dx}{dt} = c\cos\alpha$	$\frac{d^2x}{dt^2} = 0$
$y = -\frac{gt^2}{2} + c\,t\sin\alpha$	$\frac{dy}{dt} = -gt + c\sin\alpha$	$\frac{d^2y}{dt^2} = -g$
$z = 0$	$\frac{dz}{dt} = 0$	$\frac{d^2z}{dt^2} = 0.$

Aehnlich liessen sich auch die Gleichungen des schwingenden Pendels aufstellen, wenn man den Energiebetrag berücksichtigen würde, der erforderlich ist, damit das Raumelement sich auf einer Kugelfläche bewege.

Ein Punkt muss noch besonders hervorgehoben werden. Die Grösse a ist als absolute Konstante hingestellt, die Grösse $g = \frac{a}{2K}$ ist nach Erfahrung konstant, also müsste auch K es sein, was aber nach Erfahrung wiederum nicht der Fall ist. Es muss also schon hier das dritte vorhin erwähnte Gesetz eine Rolle spielen, insofern als die Konstante K der eingeführten Körperenergie rückwärts die Raumenergiekonstante a beeinflusst.

Dies tritt deutlich bei der nun zu besprechenden Gravitation auf.

III. *Raumenergiefeld um Gravitationsmittelpunkte.*

Die Gravitation ist die Thatsache, dass jedes Raumelement $d\tau$, welchem sich eine Körperenergie $\varepsilon\, d\tau$ befindet, eine gewisse Verteilung der umgebenden Raumenergie erzeugt; in der Weise, dass sich in konzentrischen Kugeln anordnet, wobei die Energie umgekehrt proportional dem Quadrate des Radius abnimmt.

Sei z. B. im Coordinatenursprung die Körperenergie $\varepsilon\, d\tau$, so entsteht in Folge dessen im ganzen Raum ein Raumenergiefeld. Im Punkte x y z, im Abstand r vom Coordinatenursprunge wird diese Energie gegeben sein durch die Gleichung $\frac{\partial E}{\partial r} = \frac{M}{r^2}\, d\tau$, die sich zerlegen lässt in

$$\frac{\partial E}{\partial x} = \frac{M}{r^2} \cdot \frac{\partial r}{\partial x}\, d\tau \qquad \frac{\partial E}{\partial y} = \frac{M}{r^2} \cdot \frac{\partial r}{\partial y}\, d\tau \qquad \frac{\partial E}{\partial z} = \frac{M}{r^2} \cdot \frac{\partial r}{\partial z}\, d\tau.$$

M ist die Gravitationskonstante des Körperelementes.

Wird ein zweites Raumelement mit Körperenergie in den Raum gebracht, so wird dasselbe einerseits im Energiefelde bewegt, gleichzeitig aber modificirt es die Energievertheilung selber.

Die allgemeinen Formeln für das Raumenergiefeld mehrerer Körperenergien lassen sich folgendermassen aufstellen:

Im Punkte $x_1\, y_1\, z_1$ sei eine Körperenergie, deren Konstante m_1 ist, im Punkte $x_2\, y_2\, z_2$ eine andere mit m_2, im Punkte $x_3\, y_3\, z_3$ eine dritte mit m_3 u. s. w.

Im Punkt x y z entsteht dann eine Raumenergie $E\, d\tau$, die durch folgende Gleichungen bestimmt wird (wenn $r_1\, r_2\, r_3$ die respektiven Abstände dieses Punktes von den vorigen angeben):

$$\frac{\partial E}{\partial x} = \left(\frac{m_1}{r_1^2} \frac{\partial r_1}{\partial x} + \frac{m_2}{r_2^2} \frac{\partial r_2}{\partial x} + \frac{m_3}{r_3^2} \frac{\partial r_3}{\partial x} + \ldots \right) d\tau$$

$$\frac{\partial E}{\partial y} = \left(\frac{m_1}{r_1^2} \frac{\partial r_1}{\partial y} + \frac{m_2}{r_2^2} \cdot \frac{\partial r_2}{\partial y} + \frac{m_3}{r_3^2} \cdot \frac{\partial r_3}{\partial y} + \ldots \right) d\tau$$

$$\frac{\partial E}{\partial z} = \left(\frac{m_1}{r_1^2} \frac{\partial r_1}{\partial z} + \frac{m_2}{r_2^2} \frac{\partial r_2}{\partial z} + \frac{m_3}{r_3^2} \frac{\partial r_3}{\partial z} + \ldots \right) d\tau$$

Dass eine allgemeine Integration dieser Gleichungen nicht möglich ist, ist bekannt.

Es möge nur der einfachste Fall untersucht werden.

IV. *Raumenergiefeld eines einzigen Gravitationscentrums.*

Es seien 2 Raumelemente mit Körperenergie vorhanden; aber das eine überwiege so sehr, dass der Einfluss des zweiten auf die Raumenergievertheilung durchaus vernachlässigt werden könne.

Also $m_2 = 0$, m_1 sei $= m$ gesetzt.

Letzteres sei im Coordinatenursprung, das andere zur Zeit t im Abstand r, mit den Coordinaten x, y, z.

Da das Raumenergiefeld nur von dem einem bestimmt wird, so tritt natürlich keine Bewegung desselben ein und die Untersuchungen beziehen sich nur auf das zweite.

Die Gleichungen lauten:

$$\frac{\partial E}{\partial x} = \frac{m}{r^2} \cdot \frac{\partial r}{\partial x} d\tau \qquad \frac{\partial E}{\partial y} = \frac{m}{r^2} \cdot \frac{\partial r}{\partial y} d\tau \qquad \frac{\partial E}{\partial z} = \frac{m}{r^2} \cdot \frac{\partial r}{\partial z} d\tau$$

Auch hier sind x, y, z als Funktionen der Zeit t zu bestimmen. Also gilt t als unabhängige Variable, somit

$$dT = \frac{\partial T}{\partial t} dt = 2K d\tau \left\{ \frac{\partial x}{\partial t} \cdot \frac{\partial^2 x}{\partial t^2} + \frac{\partial y}{\partial t} \cdot \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + \frac{\partial z}{\partial t} \cdot \frac{\partial^2 z}{\partial t^2} \right\} dt$$

und $$dE = \frac{\partial E}{\partial t} dt = \left\{ \frac{\partial E}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial E}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial t} + \frac{\partial E}{\partial z} \cdot \frac{\partial z}{\partial t} dt \right\}$$

Durch Gleichsetzung zerfällt diese Gleichung wiederum in 3:

$$2K d\tau \cdot \frac{\partial^2 x}{\partial t^2} = -\frac{\partial E}{\partial x} = -\frac{m}{r^2} \cdot \frac{\partial r}{\partial x} d\tau$$

$$2K d\tau \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = -\frac{\partial E}{\partial y} = -\frac{m}{r^2} \cdot \frac{\partial r}{\partial y} d\tau$$

$$2K d\tau \frac{\partial^2 z}{\partial t^2} = -\frac{\partial E}{\partial z} = -\frac{m}{r^2} \cdot \frac{\partial r}{\partial z} d\tau.$$

Also:

$$-\frac{2K}{m} \cdot \frac{\partial^2 x}{\partial t^2} = \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial r}{\partial x}$$

$$-\frac{2K}{m} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial r}{\partial y}$$

$$-\frac{2K}{m} \cdot \frac{\partial^2 z}{\partial t^2} = \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial r}{\partial z}.$$

Es ist bekannt, wie sich aus diesen Gleichungen ergibt, dass der Punkt (x y z) sich in einem Kegelschnitt um den erstern bewegt, und wie überhaupt die Kepler'schen Gesetze daraus folgen. —

Diese wenigen Andeutungen mögen vielleicht dazu beitragen, auf den Weg hinzuweisen, auf welchem die Probleme der Mechanik von rein energetischen Standpunkte aus gelöst werden könnten.

Dr. A. Girtanner.

Ueber das Steinbockgehörn aus dem Pfahlbau von Greng im Murtensee.

Bekanntlich reichen nach Rütimeyers Untersuchungen die ersten prähistorischen Spuren des Alpensteinbocks in der Schweiz, aus deren Höhlen die meisten Steinbockreste überhaupt zu Tage gefördert worden sind, in die Renntierperiode hinein, vertreten in den Höhlen von Thayingen, Liesberg, Veirier und Villeneuve. Je näher dem Alpenmassiv, um so zahlreicher sich findend treten sie schon in den nordschweizerischen Höhlen stark zurück, wenn sie sich zwar auch dort konstant nachweisen lassen. Bei Veirier und Villeneuve sind diese Reste aber in einer Menge vorhanden, die einerseits den Alpensteinbock als ein Charaktertier der Fauna jener Zeiten erkennen lassen, indem seine Knochen an Zahl nur durch die vom Renntier und Wildpferd übertroffen werden, während anderseits ihre dortige Häufigkeit gegenüber dem raschen Verschwinden entfernter vom Fusse der Alpen, den Steinbock als ein Hochgebirgstier ab Origine ausweisen. Jedoch nicht nur bei Höhlenfunden, sondern auch in einer Flussablagerung aus der Renntierzeit ist wenigstens ein Zeuge seiner damaligen Anwesenheit zum Vorschein gekommen in Gestalt eines mächtigen Hornzapfens von 235 mm. Umfang, der gleichzeitig mit Renntierknochen einer Kiesgrube bei Windisch enthoben wurde. In den spätern Perioden prähistorischer Zeiten nimmt dann (ebenfalls nach Rütimeyers Untersuchungsresultaten) der Steinbock entfernter vom Alpenmassiv sehr

rasch ab und aus dem Alluvium kennt er ihn aus einer spätern als der Glacialperiode überhaupt nicht mehr. — Nur in den grossen Knochenvorräten der Pfahlbauten ist ihm diese Species (wie auch Prof. Studer bemerkt), jedoch nur ein einziges Mal, im Pfahlbau bei Obermeilen als einzelner vollständiger Hornzapfen, begegnet. An diesen erstmaligen Fund reiht sich nun als zweiter der ganz neue von Herrn Prof. Studer näher beschriebene aus dem Pfahlbau bei Greng am Murtensee an, der den erstern an wissenschaftlichem Wert durch die viel bedeutendere Benützungsfähigkeit zu vergleichenden Studien mit dem Alpensteinbock unserer Zeit, weit übertrifft. — Der Hornzapfen von Meilen misst 50 cm. über die vordere Krümmung, hat einen Basisumfang von 26 cm. und berechnete Rütimeyer darnach die Länge der Hornscheiden mit 90—100 cm., womit dieselbe keinenfalls überschätzt war. Die Abwesenheit des zweiten Hornzapfens mit Schädelstück verunmöglicht aber jede Abschätzung bezgl. Divergenz sowohl dieser als der Hornscheiden selbst, und damit auch eine richtige Vorstellung von der Totalerscheinung des ganzen Gehörns auf dem Schädel des Tiers.

Viel besser steht es nun diesbezüglich bei dem Schädelstück von Greng mit seinen beiden auf ihm noch festsitzenden wenn zwar nur zu ziemlich genau $^2/_3$ ihrer ursprünglichen Länge vorhandenen Hornzapfen von ebenfalls je 26 cm. Wurzelumfang.

Wir haben demnach auch in diesem Fundstück die Überbleibsel eines nach heutigen Begriffen riesenhaften Individuums vor uns, auch nach der ganzen Erscheinung des auch im Gesichtsteil kolossal angelegten Cranium. Zahlreiche Messungen an den stärksten Exemplaren aus neuerer und neuester Zeit ergeben nämlich, dass nur sehr selten noch der äussere Wurzelumfang der Horn*scheiden* denjenigen dieser enormen Horn*zapfen* annähernd erreicht, welcher bei einem so schwer angelegten Gehörn seinerseits wieder um wenigstens 6 cm. hinter dem der Hornscheiden zurückstehen musste, und der bei diesen zwei urweltlichen Gehörnen 31 cm. mit Sicherheit gemessen hat. Nur sehr selten misst bei dem Alpensteinbock unseres Jahrhunderts der Basisumfang der Hornzapfen etwas weniges mehr als 22 cm. und der äussere Hornwurzelumfang höchstens 25—26 cm.

Mit Hülfe eines mehr als genügenden Vergleichungsmaterials ist es mir nun möglich gewesen, über die Grössenverhältnisse des Grenger-Gehörns ziemliche Sicherheit zu verschaffen, wobei bemerkt sein mag, dass dasselbe (auch nach dem vorhandenen Schädelteil und

len Ansätzen der Hornzapfen am Schädel), wenn zwar zu den schwerern, kräftigentwickelten, so doch nicht zu den eigentlich schwerfälligen, besonders umfangreichen seiner Art gehört hat. Es ist eben nicht zu übersehen, dass so riesenhafte Reste zu leicht den Eindruck der Plumpheit machen, wenn uns bei ihrer Betrachtung die geringern Grössenverhältnisse des nämlichen Tieres aus der Neuzeit vorschweben, an die unser Auge gewöhnt ist. Die Stellung der Hornzapfen auf dem Schädel zu dem Stirnbein und dem Gesichtswinkel gestatten immer noch die Annahme eines ziemlich hochragenden Gehörns, da bei der schwersten Form desselben schon die Stellung und die Richtung der Hornzapfen sich mehr der horizontalen als der vertikalen zuneigt.

Der Beantwortung der Frage nach den Grössenverhältnissen des Grengergehörns habe ich im folgenden die Vergleichung seiner Reste mit 10 Stücken der stärksten Alpen-Steinbock-Gehörne der neuern Zeit aus meiner bezgl. Sammlung zu Grunde gelegt. Von denselben gehören Nr. 1—5 der kräftig entwickelten schweren, ziemlich stark divergent verlaufenden, Nr. 5—10 der graciler gebauten leichtern, wenig divergierenden Form an. (Siehe Tabelle Seite 50.)

Welche Verhältnisse ergeben sich nun nach dieser Zusammenstellung für das Grenger-Gehörn bezüglich Länge der Hornscheiden und Hornzapfen und ihrer Divergenz und den Basisumfang?[1])

1) Länge und Divergenz der Hornzapfen. Mit Hülfe zweier schmaler, biegsamer Kartonstreifen, an dem noch nicht arrodierten Teil des linkseitigen, bessern Hornzapfens, auf der vordern und hintern Seite aufgelegt und mit der Hand gut fixiert, in richtiger Führung nach hinten und aussen gebogen, mit stumpfem Ende, lässt sich der fehlende Hornzapfenteil vorne mit 18, hinten mit 15 cm., die Länge der vollständigen Hornzapfen vorne mit 50 cm. (32 + 18 cm.), hinten mit 45 cm. angeben; die Divergenz der immer abgestumpften Spitzen mit 59 cm.

---

[1]) Es ist dabei festzuhalten 1) dass zur speciellen Vergleichung der Einfachheit halber nur Nr. I der Tabelle herbeigezogen worden ist, während aus der ganzen Tabelle noch viel anderes bezügliches mitersehen werden kann; 2) dass wir es bei dem Grenger-Stück immer mit dem enormen Basisumfang von 26 cm. ler Hornzapfen zu thun haben, der den von Nr. 1 um nicht weniger als 3,8 cm. übersteigt, ein Unterschied, der sich in allen Dimensionen, auch des Gehörns elbst, stark geltend machen muss; 3) dass bei allen Berechungen bezügl. Hornscheiden deren hintere Seite — weil glatte und deshalb viel sicherere — vorzüglich enützt worden ist.

Grössenmasse von 10 Capra Ibex (mas, adult) Gehörnen aus dem 19. Jahrhundert.

I. Schwere kräftig angelegte Gehörnform. mässig divergent verlaufende Hornscheiden, Spitzen kaum oder gar nicht konvergierend.

Nr.	Hornscheidenlänge nach der vordern gewulsteten Krümmung gemessen	Hornscheidenlänge nach der hintern glatten Krümmung gemessen	Spitzendivergenz der Hornscheiden	Basisumfang der Hornscheiden	Hornzapfenlänge nach der vordern Krümmung gemessen	Hornzapfenlänge an der hintern Krümmung gemessen	Spitzendivergenz der Hornzapfen	Basisumfang der Hornzapfen	Alter nach Jahresringen, nicht nach Knoten berechnet
	cm.	cm.	cm.	cm.	cm.	cm.	cm.	cm.	Jahre alt
1	82	67	56	25	46	39	40	22.20	15
2	78	63	44	25	44	38	33	22	13
3	76	64	40	25	39	35	33	21	11
4	75	63	33	23.70	40	35	30	20,40	12
5	72	58	40	25	34	29	28	20	12

II. Schlanke leicht gebaute Gehörne, wenig divergent verlaufende Hornscheiden. Spitzen konvergierend.

6	81	68	30	21.70	40	34	25	20	11
7	78	66	28	20	37	34	22	18	16
8	75	63	28	21	37	33	20	20	10
9	73	60	26	21	36	31	20	19	11
10	71	58	28	21	36	32	22	19	12

NB. Bemerkenswerter konstanter Unterschied zwischen Hornscheiden, Hornzapfen und Wurzelumfang bei Nr. I und II.

2) Länge und Divergenz der Hornscheiden. Nr. 1 der Tabelle weist nach, dass der massive (nicht mehr hohle) Spitzenteil dieser Hornschalen an deren vorderer Krümmung 36 cm., an der hintern 28 cm. (82—46, und 67—39) beträgt, bei einer vordern Hornzapfenlänge von 46, einer hintern von 39 cm. und einem Basisumfang von 22,20 cm. Diese Masse auf das Grenger-Gehörn mit 50 cm. Hornzapfenlänge und 26 cm. Basisumfang übertragen, ergibt für dasselbe (angesichts des enormen Basisumfangs der Hornzapfen) einen soliden Hornscheiden-Spitzenteil von 50—60 cm. und somit eine Totallänge der Hornscheide von 100, und noch weit wahrscheinlicher von wenigstens 110 cm., ein Längenmass, das allerdings das Gehörn des *Capra sibirica* heute noch erreicht und selbst wesentlich übersteigen kann, jener kolossalen Steinbockart der centralasiatischen Hochgebirgsketten, die unserm alpinen Steinbock von allen Arten weitaus am nächsten steht.

3) Basisumfang der Hornscheiden. Nr. I der Tabelle besitzt bei 22,20 cm. Umfang der Hornzapfenbasis einen äussern Hornscheiden-Basisumfang von 25 cm. Bemessen wir hiernach das Grenger-Gehörn mit seinen 26 cm. Hornscheiden-Umfang, zusammen mit der ganzen grossen Anlage des vorhandenen Schädelstückes, so ergibt sich ohne jede Überschätzung ein Hornschalenwurzelumfang von 31 cm., eher mehr als weniger.

4) Alter des Grenger-Bocks. Bekanntlich lassen sich an den Hornzapfen älterer Steinbockschädel sichere Altersmerkmale nicht finden, während dies bis zum 4. Jahre möglich ist, durch die Abdrücke der Knoten und Jahresringe an denselben. Wohl aber lässt sich im vorliegenden Falle aus der Stärke der vorhandenen Hornzapfen und der verstrichenen Stirnbeinnaht auf ein voll und fertig entwickelt gewesenes älteres Tier schliessen.

Wahrscheinlich zählte schon der Grenger-Bock zu seinen Lebzeiten zu den kräftigen Böcken seiner Art, und that der Grenger-Pfahlbauer wohl recht daran, ein schädelechtes Alpensteinbockgehörn mit einer Hörnerlänge von 110 cm., einem Spitzenabstand von 80, und einem Wurzelumfang von 31 cm., besetzt mit einer Folge von so voll entwickelten Knoten, wie sie unsere Zeit ebenfalls nicht mehr zu erzeugen vermag, als eine schätzenswerte Trophäe zu betrachten, würdig den Giebel seiner dürftigen Hütte zu zieren, bis sie in Rauch aufging oder mitsamt ihrem Hörnerschmuck, verlassen und vermodert, im Sumpfe versank. Sein letzter Besitzer mochte wohl nicht ahnen, dass nach so langer Zeit den dürftigen Resten seiner stolzen Hütten-

Naurach, Hermann, Über die Abhängigkeit des durch Hysteresis bedingten Effektverlustes im Eisen von der Stärke der Magnetisierung. Zürich 8° 1896.

Berent, Stanislaus, Über das kapillare Verhalten der Flächen im Steinsalz und Sylvin gegenüber Mutterlaugen. Leipzig 8° 1896.

Tesse, Théodore S., Dampfspannkraftsmessungen an Abkömmlingen des Benzols und über die Bedeutung solcher Messungen für die Lehre von den Siedepunktsregelmässigkeiten. Leipzig 8° 1896.

II. Bern.

a. Mathematik und Astronomie.

Geiser, C. F., Beiträge zur synthetischen Geometrie 1866. Zürich, Schabelitzsche Buchhandlung (Cæsar Schmidt) 36 S. gr. 8°.

Meyer, A., Zur Theorie der unbestimmten ternären quadratischen Formen. 1871. Zürich, Zürcher und Furrer, 37 S. 8°.

Graf, J. H., Beiträge zur Theorie der Riemannschen Fläche. 1878 Zürich, Orell Füssli & Cie. 46 S. 8°.

von Litwinoff-Iwaschkina, Elisabeth, Lösung einer Abbildungsaufgabe. 1879. Petersberg, Druckerei der K. Akademie der Wissenschaften. 28 S. gr. 8°.

Hilfiker, Jakob, Über die Bestimmung der Konstante der Sonnenparallaxe, mit besonderer Berücksichtigung der Oppositionsbeobachtungen. 1878. Bern (Mitteilungen der Naturforschenden Gesellschaft) 89 S. 8°.

Græfe, Friedrich, Der Paskalsche Satz. 1879. Bern, Stämpflische Buchdruckerei.

Huber, Gottlieb, Anwendungen der konformen Abbildung. 1883. Zürich Zürcher und Furrer, 67 S. 8°.

Bigler, Ulr., Potential einer elliptischen Walze. 1889. 86 S. gr. 8°.

Moser, Christ., Über Gebilde, welche durch Fixation einer sphärischen Kurve und Fortbewegung des Projektionscentrums entstehen. 1887. 31 S. 8°.

Jonquière, Alfred, Über einige Transcendente, welche bei der wiederholten Integration rationaler Funktionen auftreten. 1889. Bern. K. J. Wyss (Stockholm P. A. Norstedt und Söner). 50 S. 8°.

Büzberger, F., Ein mit der Theorie algebraischer Flächen zusammenhängendes planimetrisches Problem. 1890. 85 S. 8°.

Tschumi, Hans, Ein Beitrag zur Geschichte und Diskussion der Cycloiden. 1892. Bern, K. J. Wyss. 48 S. 8°.

Eggenberger, Joh., Beiträge zur Darstellung des Bernoullischen Theorems, der Gammafunktion und des Laplaceschen Integrals. 1893. Bern, K. J. Wyss, 76 S. 8°.

Münger, Fritz, Die eiförmigen Kurven. 1894. Bern, K. J. Wyss, 46 S. 8°.

Stähli, Fritz, Die Cylinderfokalen. 1894. Bern, K. J. Wyss, 50 S. 8°.

Schenkel, Hans, Kritisch-historische Untersuchung über die Theorie der Gammafunktion und Eulerschen Integrale. 1894. Uster-Zürich. A. Gull (vorm. A. Diggelmann) 67 S. 8°.

Wagner, Carl, Beiträge zur Entwicklung der Besselschen Funktion I. Art. 1894. Bern, K. J. Wyss, 65 S. 8°.

Epstein, S. S., Die vier Rechnungsoperationen mit Besselschen Funktionen nebst einer geschichtlichen Einleitung. 1894. Bern, K. J. Wyss, 58 S. 8°.

Gubler Ed., Verwandlung einer hypergeometrischen Reihe im Anschluss an das Integral $\int_0^\infty J(x) e^{-bx} \cdot x^{c-1} dx$. 1894. Uster, E. Weilenmann. 38 S. 8°.

Crelier, Louis, Sur quelques propriétés des fonctions Besséliennes tirées de la théorie des fractions continues. 1896. Milan, Bernardoni de C. Rebeschini et Cie. 31 S. 4°.

b. Physik.

Simmler, Rud. Theodor, Beiträge zur chem. Analyse durch Spektralbeobachtungen. Chur 1861. Pradella. 8° 59 S. 1 Taf.

Buri, Eugen, Über das verbesserte Wildsche Polaristrobometer. Bern. Rieder & Simmen 1870. 28 S. 8°.

Badertscher, G. A., Über den Einfluss der Temperatur auf Phosphorescenzerscheinungen. 33 S. 8°. Bern 1888. (Mitteilungen der bern. Naturf. Gesellschaft 1889. S. 75 u. ff.)

III. Genf.

a. Mathematik und Astronomie.

Decrue, David, De l'intégration des équations aux différences partielles linéaires en séries d'intégrales particulières. 1837. 4°. 40 p. Genève, Lador et Ramboz.

Ritter, Elie, Essai sur les refractions astronomiques dans le voisinage de l'horizon. 1837. 4°. 23 p. Genève, Lador et Ramboz.

Gautier, Emile, Essai sur la théorie des perturbations des comètes. 4°. 1847. 146 p. Genève, Ramboz.

Cailler, Charles, Recherches sur les équations aux dérivées partielles sur quelques points du calcul de généralisation. 8°. 98 p. Genève, Carey.

Gautier. Raoul. La première comète périodique de Tempel. 1867 II. 4°. 110 p. Genève, Schuchardt.

b. Physik.

Aubert. L., Thèse sur les lois de la distribution de la chaleur dans les corps solides (Paris, Bachelier 1837). 1837. 4°. 47 p.

Guye, Ch.-Eug., Sur la polarisation rotatoire du chlorate de soude. 6 juillet 1889. Arch. 1889, t. 21, p. 266; t. 22, p. 130; en extrait: Comptes-Rendus 1889, t. 108, p. 348.

Perrot, Fs.-Louis, Recherches sur la refraction et la dispersion dans une série isomorphe de cristaux à deux axes (sulfates doubles à 6 H^2 O), 27 janvier 1891. Arch. 1890, t. 25, p. 26; en extrait: C. R. 1890, t. 111, p. 967.

Dussaud. Frantz. Sur la refraction et la dispersion du chlorate de soude cristallisé. 7 mai 1892. Arch. 1892, t. 27, p. 349, 380, 521; en extrait: C. R. 1891, t. 113, p. 291.

Borel, Charles. Recherches des constantes diélectriques principales de quelques substances cristallisées biaxes (orthorhombiques et chicorhombiques), suivies d'une notice relative à des phénomènes dynamiques dus à l'électrisation résiduelle des diélectriques. 8 juillet 1893. Arch. 1893, t. 30, p. 45, 131, 219, 327, 422; en extrait: Arch. 1893, t. 29, p. 317; C. R. t. 116, p. 1192, 1509.

Galopin. Paul. Effets thermiques dus à la compression. 17 déc. 1893. Genève 1893, petit in-4 (Travail du laboratoire de Mr. Raoul Pictet à Berlin). En extrait: C. R. 1892, t. 114, p. 1525. Arch. 1894, t. 31, p. 383.

Borel. G.-Adolphe. Recherches sur la refraction et la dispersion des radiations ultra-violettes dans quelques substances cristallisées. 1er juillet 1894. Arch. 1895, t. 34, p. 134, 230; en extrait: C. R. 1895, t. 120, p. 1404.

IV. Lausanne.

a. Mathematik.

Wedell, Charlotte, Application de la théorie des fonctions elliptiques à la solution du problème de Malfatti. Lausanne 1897. Corbaz et Cie.

b. Physik.

Schmidt. Werner, Untersuchungen über die Magnetisierung des Eisens durch sehr kleine Kräfte. Elberfeld 1894. 38 S. 2 Tafeln.

V. Zürich.

a. Mathematik und Astronomie.

iedermann, W. G. A., Über die Principien der Differentialrechnung. 1853. 8°.

ller, G. J., Sur les inégalités du moyen mouvement d'Uranus dues à l'action perturbatrice de Neptune. 1854. 8°.

ter, H., Geschichte der mathematischen Wissenschaften von den ältesten Zeiten bis Ende des XVI. Jahrhunderts. 1871. 8°.

stein, H., Über die konforme Abbildung der Oberfläche eines regulären Oktaeders auf die Oberfläche einer Kugel. 1872. 8°.

, E., Ein Problem aus der analytischen Mechanik. 1873. 8°.

sel, J., Synthetische Untersuchung eines Orthogonal-Flächensystems. 1874. 4°.

olter, F., Beiträge zur geometrischen Theorie der ebenen Kurvenreihen. 1875. 4°.

rzog, A., Bestimmung einiger specieller Minimalflächen. 1875. 8°.

yer, M. W., Über Doppelsterne. 1875. 8°.

ith, H., Topologische Untersuchung der Kurvenverschlingung. 1876. 8°.

ck, A., Über die Gestalt des Mondes. 1877. 8°.

ller, J., Die einander doppelt konjugierten Elemente in allgemeinen reciproken Systemen. 1879. 8°.

schlimann, U., Zur Theorie der ebenen Kurven vierter Ordnung. 1880. 8°.

nter, H., Über die Rouletten der Kegelschnitte. 1881. 4°.

yel, Ch., Centrische Kollineation nter Ordnung in der Ebene vermittelt durch Ähnlichkeitspunkte von Kreisen. 1882. 8°.

efer, A., Der Kontakt höherer Ordnungen bei algebraischen Flächen. 1882. 8°.

nzinger, H., Versuch einer Geschichte der Bestimmung parabolischer Bahnelemente von Newton bis Olbers. 1882. 8°.

nrer, M. J., Die Extinktion des Fixsternlichtes in der Atmosphäre in ihrer Beziehung zur astronomischen Refraktion. 1882. 8°.

ieg, F. v., Über die eindeutige Beziehung von Räumen mittelst projektiver Ebenenbüschel und ihre Anwendung auf Konstruktionsaufgaben. 1884. 8°.

nge, C., Beiträge zu graphischen Ausgleichungen. 1887. 8°.

in, A.-A., Des maxima et minima de la distance de deux points appartenant respectivement à deux courbes ou surfaces données. 1887. 8°.

Disteli, M., Die Steinerschen Schliessungsprobleme nach darstellend geometrischer Methode. 1888. 8°.

Leuch, S. R. A., Erzeugung und Untersuchung einiger ebenen Kurven höherer Ordnung. 1888. 8°.

Engel, J. H., Konstruktionen zur Geometrie der Flächen zweiter Ordnung und der ebenen Kurven dritter Ordnung. 1889. 8°.

Hartmann, A., Studium über Kegelschnitte und Flächen zweiten Grades. 1889. 8°.

Stiner, G., Über Kurven vom Geschlecht Null. 1890. 8°.

Schlumberger, Gottfried, Über n-dimensionale lineare und quadratische Kugelsysteme. 1896.

Dedoff. Theodor, Untersuchungen über quadratische Formen. 1896.

Amberg, Ernst Julius, Über den Körper, dessen Zahlen sich rational aus zwei Quadratwurzeln zusammensetzen. 1897.

b. Physik.

Schoch, W., Über die Darstellung der mittlern Jahrestemperatur eines Ortes als Funktion seiner geographischen Länge und Breite. 1856. 8°.

Röntgen, W. C., Studien über Gase. 1869. 8°.

Mentsik, F., Dynamische Theorie und innere Reibung der Gase. 1877. 8°

Weber, R., Das Wärmeleitungsvermögen von Gneiss und seine Abhängigkeit von der Temperatur. 1878. 8°.

Kronauer, H., Das innere Wärmeleitungsvermögen von Blei, Wismuth und Woods Metall. 1880. 8°.

Tuchschmid, A., Das innere Wärmeleitungsvermögen von Quarz, Kalkspat und Steinsalz. 1883. 8°.

Kopp, R., Untersuchungen über die Gültigkeit des Jouleschen Gesetzes für Elektrolyte. 1885. 8°.

Stössel, J., Über das durch variable Induktionsströme in weichem Eisen inducierte magnetische Moment. 1885. 8°.

Wailleumier, H., Recherches expérimentales sur l'influence exercée par le milieu ambiant dans les phénomènes d'induction électrodynamique. 1885. 8°.

Zuber, O., Über den Widerstand einiger Metalle gegen stationäre, oscillierende und alternierende elektrische Ströme. 1885. 8°.

Palaz, A., Recherches expérimentales sur la capacité inductive spécifique de quelques diélectriques. 1886. 8°.

Wyss, G. H. v., Eine Methode zur experimentellen Bestimmung des Selbstpotentials einer Spirale. 1886. 8°.

el, J. B., Die wichtigsten Sätze der neueren Statik in elementarer Darstellung. 1887. 8°.

ltner, E., Der optische Nutzeffekt der Glühlichtlampen. 1886. 8°.

n-Eschenburg, H., Untersuchungen über das Giltaysche Eisenelektrodynamometer. 1889. 8°.

tt, R., Über die Kanalisation der Elektricität in der elektrischen Beleuchtung. 1889. 8°.

zberger, K., Methode zur Bestimmung der Leitungsfähigkeit verdünnter Elektrolyte mittelst des Kondensators und Untersuchung über die Gültigkeit des Ohmschen Gesetzes für verdünnte Elektrolyte. 1889. 8°.

sler, G., Untersuchungen über die Magnetisierung des Eisens durch sehr kleine und sehr grosse Kräfte. 1892. 8°.

tz, Hans, Über Wärmeströmung bei elektrischer Polarisation des Glases. 1893.

uner, Paul, Die Werte der Weberschen Strahlungskonstanten bei zwei verschiedenen Kohlenfäden. 1893.

mann, A., Der absolute Wert der Normalkondensatoren von Carpentier und Latimer Clark des eidgen. physikalischen Instituts. 1893. 8°.

ffler, Friedrich, Untersuchungen über die Existenz der objektiven Aberration. 1895.

lin, Emil, Die Abhängigkeit der specifischen Wärme des Wassers von der Temperatur. 1895.

nbardi, Luigi, Fenomeni di polarizzazione in un campo electrostatico uniforme. 1895.

erson, Albert, Über Messungen des Thomsoneffektes. 1895.

citzer, Joseph, Untersuchungen über die optische Aktivität in ihrer Beziehung zum Asymmetrieprodukt von Guye. 1896.

uss, Benno v., Über die durch Hysteresis im Eisen entwickelte Wärme. 1896.

linger, Werner, Das innere Wärmeleitungsvermögen verschiedener Eisensorten. 1896.

schmann, Lionel, Über die Induktion im Innern eines stromdurchflossenen cylindrischen Leiters. 1896.

ier, Léon, Leitungsvermögen der schwarzen Kohle für Wärme und Elektricität. 1896.

Bemerkungen: Nachfolgende Arbeiten haben nicht den Titel «Dissertation», sondern sind wohl bloss an Stelle von solchen als äquivalente Druckschriften eingereicht worden.

Wild, H., Beitrag zur Theorie der Nobilischen Farbenringe. 1857. 4°.

Lommel, E., Einige (nicht genauer bezeichnete) Druckschriften über Physik und Mathematik. 1865.

Weilenmann, A., Über ein abgeändertes Aneroidbarometer und Beziehung zwischen Luftdruck, Temperatur und Höhe in der Atmosphäre. 1875. 8°. — Über die Luftströmungen, insbesondere die Stürme Europas. 1875. 4°. — Über den täglichen Gang der Temperatur in Bern. 1874. 4°.

Cherbuliez, E., Essai historique sur les précurseurs de la théorie des ondes lumineuses. 1863.

Koppe, C., Bestimmung der Achse des Gotthardtunnels. 1877. 8°.

Die freundliche Mithülfe der Herren Professoren *Cailler* und *Soret* in Genf, *H. Amstein* und *H. Dufour* in Lausanne, *K. von der Mühll* in Basel, *A. Meyer* † und *H. Burkhardt* in Zürich, *G. Sidler* in Bern sei hier auf das Beste verdankt.

L. Crelier.

Sur la fonction Besséliennne de IIe espèce $\overset{n}{S}_{(x)}$.

(Eingereicht im Dezember 1896.)

L'étude de la fonction:

$$\frac{1}{x-y} = \int_0^{\frac{N}{x-y}} e^{-(x-y)s}\, ds$$

conduit à la formule connue:

$$\frac{1}{x-y} = \overset{0}{J}(y)\,\frac{1}{x} + \sum_1^{\infty} \overset{n}{J}(y) \int_0^{\frac{N}{x}} e^{-xs}\left(t^n + (-1)^n\, t^{-n}\right) ds \text{*)}$$

où $s = \frac{1}{2}\left(t - \frac{1}{t}\right)$, $\overset{0}{J}(y)$ et $\overset{n}{J}(y)$ sont des fonctions Besséliennes de 1re espèce.

L'intégrale:

$$\int_0^{\frac{N}{x}} e^{-xs}\left(t^n + (-1)^n\, t^{-n}\right) ds$$

*) Mathem. Annalen, III, p. 138.

représente la fonction $\overset{n}{O}(x)$*), une des intégrales Besséliennes de 2me espèce. Mise en sommation, elle devient:

$$\overset{n}{O}(x) = \sum_{\lambda=0}^{\lambda < \frac{n+1}{2}} \frac{n}{4} \frac{(n-\lambda-1)!}{2!} \left(\frac{2}{x}\right)^{n+1-2\lambda}$$

Cette formule élégante a été introduite dans le calcul par M. Neumann, en partant de l'intégrale précédente.

Dans notre thèse de doctorat, nous avons présenté un nouveau développement de cette formule par sommation.

En appliquant la formule de l'intégration par parties,

$$\int u\,dv = uv - \int v\,du,$$

on peut écrire:

$$\overset{n}{O}(x) = -\frac{\cos^2 n\frac{\pi}{2}}{x} + \frac{n}{2x} \int_1^{\frac{N}{x}} e^{-xs} \left(t^n - (-1)^n t^{-n}\right) \frac{dt}{t} \text{**)}$$

La nouvelle intégrale représente la fonction $\overset{n}{S}(x)$, fonction Bessélienne de 2me espèce. Pour en obtenir la formule par sommation, on l'a simplement comparée à $\overset{n}{O}(x)$ et l'on a déduit la nouvelle forme.

Mais, nous ferons remarquer que l'intégrale

$$\int_1^{\frac{N}{x}} e^{-xs} \left(t^n - (-1)^n t^{-n}\right) \frac{dt}{t} \qquad (1.)$$

soumise à un mode de représentation analogue à celui que nous avons employé pour

$$\int_0^{\frac{N}{x}} e^{-xs} \left(t^n + (-1)^n t^{-n}\right) ds, \text{***)}$$

et traitée ensuite par *la théorie des fractions continues*, est susceptible d'un développement particulier en une formule par sommation. Dans le travail ci-dessous, nous nous proposons de développer cette transformation.

---

*) *C. Neumann*, Bessel'sche Funktionen, p. 9.

**) *C. Neumann*, Bessel'sche Funktionen.

***) Voir: *L. Crelier* «Thèse de doctorat».

I.

Posons:

$$s = \frac{1}{2}\left(t - \frac{1}{t}\right) \text{ et}$$

$$T_n = t^n - (-1)^n\, t^{-n}.$$

Voyons ce devient le produit

$$2s\, T_n = \left(t - \frac{1}{t}\right)\left(t^n - (-1)^n\, t^{-n}\right)$$

$$2s\, T_n = \underbrace{t^{n+1}}_{\text{I.}} \underbrace{- t^{n-1} - (-1)^n\, t^{-n+1}}_{\text{II.}} \underbrace{+ (-1)^n\, t^{-n-1}}_{\text{III.}}$$

Les parties I et III donnent: $t^{n+1} + (-1)^n\, t^{-(n+1)}$

$$= t^{n+1} - (-1)^{n+1}\, t^{-(n+1)}$$

$$= T_{n+1}$$

La partie II donne: $-t^{n-1} - (-1)^n\, t^{-n+1}$

$$= -t^{n-1} + (-1)^{n-1}\, t^{-(n-1)}$$

$$= -T_{n-1}.$$

Donc

$$2s\, T_n = T_{n+1} - T_{n-1}; \qquad (2.)$$

$$\frac{T_{n+1}}{T_n} = 2s + \frac{T_{n-1}}{T_n}$$

$$= 2s + \frac{1}{\dfrac{T_n}{T_{n-1}}}$$

Mais on a aussi

$$2s\, T_{n-1} = T_n - T_{n-2},$$

et $$\frac{T_n}{T_{n-1}} = 2s + \frac{1}{\dfrac{T_{n-1}}{T_{n-2}}};$$

en appliquant la formule de récurrence (2) à ce nouveau quotient, et en continuant le développement on arrivera à:

$$\frac{T_{n+1}}{T_n} = 2s + \cfrac{1}{2s + \cfrac{1}{2s + \cfrac{1}{2s + \ddots + \cfrac{1}{\cfrac{T_2}{T_1}}}}}$$

$$T_2 = t^2 - (-1)^2 t^{-2} = t^2 - \frac{1}{t^2}$$

$$T_1 = t - (-1)^1 t^{-1} = t + \frac{1}{t}$$

$$\frac{T_2}{T_1} = \frac{t^2 - t^{-2}}{t + t^{-1}} = \frac{(t + t^{-1})(t - t^{-1})}{(t + t^{-1})} = (t - t^{-1})$$
$$= 2s.$$

Donc

$$\frac{T_{n+1}}{T_n} = 2s + \cfrac{1}{2s + \cfrac{1}{2s + \cfrac{1}{2s + \ddots + \cfrac{1}{2s}}}}$$

C'est une fraction continue à n quotients incomplets égaux tous à 2 s.

D'après les théories et notations de *M. le Prof. Dr. J. H. Graf**), nous écrivons :

$$\frac{T_{n+1}}{T_n} = \frac{[\overbrace{2s, 2s, \ldots\ldots, 2s}^{n \text{ termes}}]}{[\underbrace{2s, 2s, \ldots\ldots, 2s}_{n-1 \text{ termes}}]} \qquad (3.)$$

Le numérateur a n termes et le dénominateur n — 1 termes et cette fraction est la n^e réduite de la fraction continue précédente. C'est donc sa valeur même.

---

*) Voir: «*J. H. Graf. — Relations entre la fonction Bessélienne de 1re espèce et une fraction continue*».

«Annali di Matematica». Milan, 1895, *et notre thèse*.

Rappelons:

$$(a, b) = \Big[a,\ a + b,\ a + 2\,b,\ \ldots\ldots\ldots,\ a + (n-1)\,b\Big]$$

$$= \sum_{\lambda=0}^{\lambda \leq \frac{n+1}{2}} \binom{n-\lambda}{\lambda} (a + \lambda\, b)\ (a + (\lambda + 1)\, b)$$

$$\ldots\ldots\ (a + (n - \lambda - 1)\, b)$$

En posant

$$a = 2\,s \text{ et } b = 0$$

aurons

$$f_n(2s, 0) = \sum_{\lambda=0}^{\lambda \leq \frac{n+1}{2}} \binom{n-\lambda}{\lambda} (2\,s)^{n-2\lambda} \qquad (4.)$$

$$f_n(2s, 0) = \Big[\underbrace{2s,\ 2s,\ 2s,\ \ldots\ldots,\ 2s}_{n \text{ termes}}\Big]$$

Appliquons à la formule (3), nous aurons

$$\frac{T_{n+1}}{T_n} = \frac{f_n(2\,s,\ 0)}{f_{n-1}(2s,\ 0)} \qquad (5.)$$

De cette proportion, nous pouvons conclure que le dénominateur est égal au dénominateur $f_{n-1}(2\,s, 0)$, à une constante près.

Donc $\qquad T_n = \text{Const.}\ f_{n-1}(2\,s, 0)$

Pour déterminer C, faisons $n = 2$, d'où

$$T_2 = C.\ f_1(2\,s, 0)$$

$$\text{Mais } T_2 = t^2 - t^{-2}$$

et $\qquad f_1(2\,s, 0) = 2\,s = t - t^{-1}$

D'où $\qquad t^2 - t^{-2} = C\,.\,(t - t^{-1})$

$$C = (t + t^{-1})$$

Donc:

$$T_n = (t + t^{-1})\ f_{n-1}(2\,s, 0) \qquad (6.)$$

Reportons nous à la valeur de l'intégrale (1)

$$\int_1^{\frac{N}{x}} e^{-xs}\left(t^n - (-1)^n\, t^{-n}\right) \frac{dt}{t} = S^n(x).$$

Nous pouvons l'écrire :

$$S^n(x) = \int_1^{\frac{N}{x}} e^{-xs}\, T_n\, \frac{dt}{t}$$

En introduisant la valeur (6) on obtient :

$$S^n(x) = \int_1^{\frac{N}{x}} e^{-\frac{x}{2}\left(t-\frac{1}{t}\right)} \left(t+\frac{1}{t}\right) f_{n-1}(2s,0)\, \frac{dt}{t}$$

$$= \int_1^{\frac{N}{x}} e^{-\frac{x}{2}\left(t-\frac{1}{t}\right)} \frac{t+\frac{1}{t}}{t}\, f_{n-1}(2s,0)\, dt$$

$$S^n(x) = \int_1^{\frac{N}{x}} e^{-\frac{x}{2}\left(t-\frac{1}{t}\right)} \left(1+\frac{1}{t^2}\right) f_{n-1}(2s,0)\, dt. \quad (7.)$$

Reprenons

$$s = \frac{1}{2}\left(t-\frac{1}{t}\right)$$

$$2s = \left(t-\frac{1}{t}\right).$$

La différentiation donne :

$$2\, ds = dt \left(1+\frac{1}{t^2}\right).$$

En substituant la variable s, dans (7) la limite inférieure devient

$$s = \frac{1}{2}\left(t-\frac{1}{t}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{1}\right) = 0$$

$$s = 0.$$

La limite supérieure reste très grande, voisine de l'infini ; on écrit :

$$S^n(x) = 2\int_0^{\frac{N}{x}} e^{-xs}\, f_{n-1}(2s.0)\, ds. \quad (7^{bis})$$

Substituons ici la valeur (4) pour $f_{n-1}(2s, 0)$. Nous aurons :

$$S^n(x) = 2\int_0^{\frac{N}{x}} e^{-xs} \sum_{\lambda=0}^{\lambda<\frac{n}{2}} \binom{n-1-\lambda}{\lambda} 2s^{n-1-2\lambda}$$

Faisons passer les termes indépendants de devant le signe et développons

$$x) = 2 \sum_{\lambda=0}^{\lambda<\frac{n}{2}} \frac{(n-1-\lambda)!}{\lambda!\,(n-1-2\lambda)!} \int_0^{\frac{N}{x}} e^{-xs} (2s)^{n-1-2\lambda}\, ds ;$$

$$\text{posons } x\,s = u\,;\; ds = \frac{1}{x}\, du :$$

$$(x) = 2 \sum_{\lambda=0}^{\lambda<\frac{n}{2}} \frac{(n-1-\lambda)!}{\lambda!\,(n-1-2\lambda)!} \cdot \frac{2^{n-1-2\lambda}}{x^{n-1-2\lambda}} \cdot \frac{1}{x} \int_0^{\frac{N}{x}} e^{-u} u^{n-1-2\lambda}\, du$$

$$x) = \sum_{\lambda=0}^{\lambda<\frac{n}{2}} \frac{(n-1-\lambda)!}{\lambda!\,(n-1-2\lambda)!} \left(\frac{2}{x}\right)^{n-2\lambda} \int_0^{\frac{N}{x}} -u\, u^{n-1-2\lambda}\, du. \quad (8.).$$

Mais les fonctions Eulériennes donnent :

$$\int_0^{\frac{N}{x}} e^{-u} u^{n-1-2\lambda}\, du = \Gamma_{(n-2\lambda)} = (n-1-2\lambda)!$$

En introduisant dans (8), il reste :

$$S^n(x) = \sum_{\lambda=0}^{\lambda<\frac{n}{2}} \frac{(n-1-\lambda)!}{\lambda!} \left(\frac{2}{x}\right)^{n-2\lambda} \qquad (9.)$$

Cette formule (9) est identique à la formule par sommation ıite d'une comparaison entre les deux fonctions

$$O^n(x) \text{ et } S^n(x).$$

Sur la somme $S^{n+1}(x) + S^{n-1}(x)$ et sur la différence $S^{n-1}(x) - S^{n+1}(x)$.

I.

Rappelons la formule

$$O^n(x) = \int_0^{\frac{N}{x}} e^{-xs}\, s\, f_{n-1}(2s,0)\, ds + \int_0^{\frac{N}{x}} e^{-xs}\, f_{n-2}(2s,0)\, ds^*)$$

$$= \int_0^{\frac{N}{x}} e^{-xs} \left\{ s\, f_{n-1}(2s,0) + f_{n-2}(2s,0) \right\} ds$$

et la formule (7bis) du paragraphe précédent

$$S^n(x) = 2 \int_0^{\frac{N}{x}} e^{-xs}\, f_{n-1}(2s,0).$$

Changeons n en $n-1$ et en $n+1$ dans cette dernière formule. Nous aurons alors:

$$S^{n+1}(x) = 2 \int_0^{\frac{N}{x}} e^{-xs}\, f_n(2s,0)\, ds$$

$$S^{n-1}(x) = 2 \int_0^{\frac{N}{x}} e^{-xs}\, f_{n-2}(2s,0)\, ds.$$

Si nous tenons compte de la relation (4) du travail précité de *M. le Prof. J. H. Graf* nous aurons:

$$f_n(2s,0) = 2s\, f_{n-1}(2s,0) + f_{n-2}(2s,0).$$

Introduisons cette valeur dans $S^{n+1}(x)$ et cette formule deviendra:

$$S^{n+1}(x) = 2 \int_0^{\frac{N}{x}} e^{-xs} \left\{ 2s\, f_{n-1}(2s,0) + f_{n-2}(2s,0) \right\} ds$$

*) *Ls. Crelier :* Sur quelques propriétés des fonctions Besséliennes «Annali di Matematica» tome 24 (1896) (§ VI, formule 7.)

$$^{+1}(x) = 4\int_0^{\frac{N}{x}} e^{-xs}\, s\, f_{n-1}(2s,0)\, ds + 2\int_0^{\frac{N}{x}} e^{-xs} f_{n-2}(2s,0)\, ds. \quad (\alpha).$$

D'autre part $S^{n-1}(x) = 2\int_0^{\frac{N}{x}} e^{-xs} f_{n-2}(2s,0)\, ds,$

dition donne alors:

$$^{+1}(x) + S^{n-1}(x) = 4\int_0^{\frac{N}{x}} e^{-xs}\, s\, f_{n-1}(2s,0)\, ds +$$

$$4\int_0^{\frac{N}{x}} e^{-xs} f_{n-2}(2s,0)\, ds$$

$$= 4\int e^{-xs}\left\{s\, f_{n-1}(2s,0) + f_{n-2}(2s,0)\right\} ds.$$

Comparé avec la valeur de $O^n(x)$, ce résultat s'écrit:

$$S^{n+1}(x) + S^{n-1}(x) = 4\, O^n(x). \qquad (1.)$$

II.

La valeur (α) de $S^{n+1}(x)$ peut aussi s'écrire:

$$S^{n+1}(x) = 4\int_0^{\frac{N}{x}} e^{-xs}\, s\, f_{n-1}(2s,0) + S^{n-1}(x)$$

sons passer $S^{n-1}(x)$ de l'autre côté du signe égal et nous aurons:

$$S^{n+1}(x) - S^{n-1}(x) = 4\int_0^{N} e^{-xs}\, s\, f_{n-1}(2s,0)\, ds. \quad (\beta).$$

Le membre de droite de cette *nouvelle relation* n'est autre chose la Ire intégrale dans le développement de $O^n(x)$.

La formule (6) de la Ire partie:

$$T_n = (t + t^{-1})\, f_{n-1}(2s, 0), \qquad \text{donne:}$$

$$f_{n-1}(2s, 0) = \frac{1}{t + t^{-1}}, \quad T_n = \frac{1}{(t + t^{-1})} \left\{ t^n - (-1)^n t^{-n} \right\}.$$

Introduisons cette valeur dans la relation (β); celle-ci devient

$$S^{n+1}(x) - S^{n-1}(x) = 4 \int_0^{\frac{N}{x}} e^{-xs} \left\{ \frac{s}{t + t^{-1}} \right\} \left\{ t^n - (-1)^n t^{-n} \right\} d$$

nous avons eu $s = \frac{1}{2}(t - t^{-1})$

$$\text{et } ds = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{t^2}\right) dt$$

En substituant ces valeurs dans l'intégrale ci-dessus, la nouvelle variable devient t, et la limite inférieure

$$s = 0 \text{ donne } 0 = \frac{1}{2}(t - t^{-1})$$

$$\text{d'où } \underline{t = 1}$$

La limite inférieure est 1, et la formule précédente s'écrit:

$$S^{n+1}(x) - S^{n-1}(x) = \int_1^{\frac{N}{x}} e^{-xs} \left(\frac{t - t^{-1}}{t + t^{-1}} \right) (1 + t^{-2}) \left\{ t^n - (-1)^n t^{-n} \right\} dt$$

ou

$$S^{n+1}(x) - S^{n-1}(x) = \int_1^{\frac{N}{x}} e^{-xs} (t - t^{-1}) \left\{ t^n - (-1)^n t^{-n} \right\} \frac{dt}{t} (\gamma).$$

La valeur de $S^n(x)$ nous a donné:

$$S^n(x) = \int_1^{\frac{N}{x}} e^{-xs} \left(t^n - (-1)^n t^{-n} \right) \frac{dt}{t} \quad *)$$

avec $s = \frac{1}{2}(t - t^{-1})$ comme plus haut.

*) *Neumann*, Bessel'sche Funktionen. (Leipzig, 1867.)

En différentiant suivant x, nous aurons

$$\frac{\delta S^n(x)}{\delta x} = \int_1^{\frac{N}{x}} \frac{\delta}{\delta x} e^{-xs} \left\{ t^n - (-1)^n t^{-n} \right\} \frac{dt}{t}$$

$$= \int_1^{\frac{N}{x}} e^{-xs} (-s) \left\{ t^n - (-1)^n t^{-n} \right\} \frac{dt}{t}$$

$$= -\frac{1}{2} \int_1^{\frac{N}{x}} e^{-xs} \left(t - t^{-1}\right) \left(t^n - (-1)^n t^{-n}\right) \frac{dt}{t}.$$

D'où

$$\int_1^{\frac{N}{x}} e^{-xs} \left(t - t^{-1}\right) \left(t^n - (-1)^n t^{-n}\right) \frac{dt}{t} = -2 \frac{\delta S^n(x)}{\delta x}.$$

Introduite dans (γ) cette valeur nous conduit à l'intéressante ation

$$S^{n+1}(x) - S^{n-1}(x) = -2 \frac{\delta S^n}{\delta x}$$

) l'on peut aussi écrire

$$S^{n-1}(x) - S^{n+1}(x) = 2 \frac{\delta S^n}{\delta x}. \qquad (2.)$$

Ces formules (1) et (2) sont déjà connues mais en déduction raisonnements tout à fait différents.

III.

La valeur $\frac{\delta S^n}{\delta x}$ à laquelle nous venons d'arriver, peut donc rire:

$$\frac{\delta S^n}{\delta x} = -2 \int_0^{\frac{N}{x}} e^{-xs} \, s. \, f_{n-1}(2s, 0) \, ds. \qquad (3.)$$

remontant à la formule (β) dont nous sommes partis.

Le développement par sommation de cette intégrale, nous est connu et donne :

$$\int_0^{\frac{N}{x}} e^{-xs}\, s\, f_{n-1}(2s.0)\, ds = \sum_{\lambda=0}^{\lambda<\frac{n}{2}} \frac{1}{4} \cdot \frac{(n-1-\lambda)!}{\lambda!} (n-2\lambda) \left(\frac{2}{x}\right)^{n+1-2\lambda}.$$

Donc :

$$\frac{\partial S^n(x)}{\partial x} = -\frac{1}{2} \sum_{\lambda=0}^{\lambda<\frac{n}{2}} \frac{(n-1-\lambda)!}{\lambda!} (n-2\lambda) \left(\frac{2}{x}\right)^{n+1-2\lambda} \quad (4.)$$

Nous ferons remarquer que cette valeur (4) peut aussi s'écrire directement en différentiant suivant x :

$$S^n(x) = \sum_{\lambda=0}^{\lambda<\frac{n}{2}} \frac{(n-1-\lambda)!}{\lambda!} \left(\frac{2}{x}\right)^{n-2\lambda}.$$

(C'est la formule (9) de la première partie de cette note.)

En tenant compte de la valeur (3) pour $\frac{\partial S^n}{\partial x}$, et de celle de $O^n(x)$:

$$O^n x = \int_0^{\frac{N}{x}} e^{-xs}\, s\, f_{n-1}(2s,\ 0)\, ds + \int_0^{\frac{N}{x}} f_{n-2}(2s,\ 0)\, ds.$$

$$\frac{\partial S^n}{\partial x} = -2 \int_0^{\frac{N}{x}} e^{-xs}\, s\, f_{n-1}(2s,\ 0)\, ds,$$

$$S^n = 2 \int_0^{\frac{N}{x}} e^{-xs}\, f_{n-1}(2s, 0)\, ds, \text{ nous aurons :}$$

$$O^n(x) = \frac{1}{2} S^{n-1}(x) - \frac{1}{2} \frac{\partial S^n}{\partial x} \quad (5.)$$

Si nous considérons les deux relations (1) et (2)

$$S^{n+1}(x) + S^{n-1}(x) = 4\,O^n$$

$$S^{n-1}(x) - S^{n+1}(x) = 2\,\frac{\partial S^n}{\partial x}$$

r addition, elles donnent une valeur de $O^n(x)$ identique à (5) celle nnée plus haut, soit:

$$O^n(x) = \frac{1}{2}\left(S^{n-1}(x) - \frac{\partial S^n}{\partial x}\right);$$

r soustraction, elles donnent encore

$$O^n(x) = \frac{1}{2}\left\{S^{n+1}(x) + \frac{\partial S^n}{\partial x}\right\} \qquad (6.)$$

IV.

Revenons à la formule modifiée de (α) au § II

$$S^{n+1}(x) = 4\int_0^{\frac{N}{x}} e^{-xs}\, s\, f_{n-1}(2s,\,0)\,ds + S^{n-1}(x)$$

et à (β): $S^{n+1}(x) - S^{n-1}(x) = 4\int_0^{\frac{N}{x}} e^{-xs}\, s\, f_{n-1}(2s,\,0)\,ds$

étudions l'intégrale qui forme le membre de droite.

Nous connaissons:

$$f_{n-1} = 2s\, f_{n-2} - f_{n-3}.$$

Cette nouvelle valeur nous permet d'écrire:

$$2\,\frac{\partial S^n}{\partial x} = 4\int_0^{\frac{N}{x}} e^{-xs}\, s\, f_{n-1}(2s,\,0)\,ds = 4\int_0^{\frac{N}{x}} e^{-xs}\cdot s\left(2s\, f_{n-2}(2s,0) + f_{n-3}(2s,\,0)\right) ds$$

$$= 8\int_0^{\frac{N}{x}} e^{-xs}\, s^2\, f_{n-2}(2s,\,0)\,ds + 4\int_0^{\frac{N}{x}} e^{-xs}\cdot s\, f_{n-3}(2s,\,0)\,ds.$$

La dernière partie est égale à

$$-2\frac{\delta S^{n-2}}{\delta x}.$$

Voyons ce que donne la Ire partie:

$$\text{prenons } \frac{\delta S^n}{\delta x} = -2\int_0^{\frac{N}{x}} e^{-xs}\, s\, f_{n-1}(2s, 0)\, ds$$

et différentions encore une fois suivant x. On peut le faire sans remplacer s par sa valeur en fonction de t. Nous obtenons

$$\frac{\delta^2 S^n}{\delta x^2} = -2\int_0^{\frac{N}{x}} e^{-xs}(-s)\, s\, f_{n-1}(2s, 0)\, ds$$

$$= +2\int_0^{\frac{N}{x}} e^{-xs}\, s^2\, f_{n-1}(2s, 0)\, ds.$$

Avec n changé en n — 1, nous avons:

$$\frac{\delta^2 S^{n-1}}{\delta x^2} = 2\int_0^{\frac{N}{x}} e^{-xs}\, s^2\, f_{n-2}(2s, 0)\, ds. \qquad (7.)$$

Nous avons alors:

$$-2\frac{\delta S^n}{\delta x} = 4\frac{\delta^2 S^{n-1}}{\delta x^2} - 2\frac{\delta S^{n-2}}{\delta x} \text{ ou}$$

$$-\frac{\partial S^n}{\delta x} = 2\frac{\partial^2 S^{n-1}}{\partial x^2} - \frac{\delta S^{n-2}}{\partial x} \qquad (8.)$$

En traitant de même la formule:

$$-\frac{\partial S^{n-2}}{\partial x} = 2\int_0^{\frac{N}{x}} e^{-xs}\, s\, f_{n-3}(2s, 0)\, ds,$$

nous aurons: $-\frac{\partial S^{n-2}}{\partial x} = 2\frac{\partial^2 S^{n-3}}{\partial x 2} - \frac{\partial S^{n-4}}{\partial x}$

Nous écrivons la *nouvelle relation :*

$$\frac{\partial S^{n-2}}{\partial x} - \frac{\partial S^n}{\partial x} = 2\frac{\partial^2 S^{n-1}}{\partial x^2}. \qquad (8^{bis})$$

Cette formule, donnant la différence de deux dérivées simples, ıve que la relation $S^{n-2} - S^n = 2 \cdot \partial S^{n-1}$ est aussi valable ıd on en prend la dérivée par rapport à x.

Remplaçons ensuite dans (8) la dernière dérivée simple par une ivée seconde suivant $(8)^{bis}$ et nous aurons:

$$\frac{S^n}{x} = -2\left\{\frac{\partial^2 S^{n-1}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 S^{n-3}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 S^{n-5}}{\partial x^2} + \cdots\cdots\right\};$$

ètons nous aux termes en S^0 ou S^1 dont les valeurs sont très ples, afin de ne pas arriver aux fonctions S(x) à indices négatifs.

$\frac{S^n(x)}{\partial x}$ ou la première dérivée de $S^n(x)$ apparaît clairement comme ı sommation des deuxièmes dérivées de fonctions S(x).

Pour développer cette sommation nous considérerons 2 cas avec *ıair* ou avec *n impair*.

I. cas. n pair. On a dans ce cas:

$$\frac{S^n}{x} = -2\left\{\frac{\partial^2 S^{n-1}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 S^{n-3}}{\partial x^2} + \cdots\cdots + \frac{\partial^2 S^1}{\partial x^2}\right\} + \frac{\partial S^0}{\partial x}$$

ar $-\frac{\partial S^2}{\partial x} = 2\frac{\partial^2 S^1}{\partial x} - \frac{\partial S^0}{\partial x}$

$(x) = 0$, $\frac{p S^0}{\partial x} = 0$

ıtant diminué de 1, 3, 5 etc., les indices des 2mes dérivées sont nombres impairs; le dernier est donc 1 et le premier n — 1. ıs pouvons alors écrire:

$$\frac{\partial S^n}{\partial x} = -2\sum_{\lambda=0}^{\lambda=\frac{n-2}{2}} \frac{\partial^2 S^{2\lambda+1}}{\partial x^2} \qquad (9.)$$

IIe cas. n impair. Ici, les indices des deuxièmes dérivées sont nombres pairs et comme

$$-\frac{\partial S^3}{\partial x} = +2\frac{\partial^2 S^2}{\partial x^2} - \frac{\partial S^1}{\partial x},$$

s pourrons écrire notre série sous la forme:

$$\frac{S^n}{x} = -2\left\{\frac{\partial^2 S^{n-1}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 S^{n-3}}{\partial x^2} + \cdots\cdots + \frac{\partial^2 S^2}{\partial x^2}\right\} + \frac{\partial S^1}{\partial x}$$

$(x) = \frac{2}{x} = 2x^{-1}; \frac{\partial S^1}{\partial x} = -2x^{-2} = -\frac{2}{x^2}.$

D'où

$$\frac{\partial S^n}{\partial x} = -2\left\{\sum_{1}^{\frac{n-1}{2}} \frac{\partial^2 S^{2\lambda}(x)}{\partial x^2} + \frac{1}{x^2}\right\} \qquad (9^{bis})$$

Les formules (9) et (9bis) nous donnent le développement cher

En posant dans (9) $n = 2p$ et $n = 2p-1$ dans $9^{(bis)}$ et additionnant nous obtiendrons

$$\left(\frac{\partial S^{2p}}{\partial x} + \frac{\partial S^{2p-1}}{\partial x}\right) = -2\left[\frac{\partial^2 S^{2p-1}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 S^{2p-2}}{\partial x^2} + \cdots\right.$$

$$\left. \cdots + \frac{\partial^2 S^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 S^1}{\partial x^2} + \right.$$

$$\frac{\partial S^{2p}}{\partial x} + \frac{\partial S^{2p-1}}{\partial x} = -2\left\{\sum_{\lambda=1}^{\lambda=2p-1} \frac{\partial^2 S^\lambda}{\partial x^2} + \frac{1}{x^2}\right\}$$

Nous arrivons de cette façon à la somme de dérivées premi de fonctions consécutives.

Ce résultat se présenterait sous la même forme en pre $n = 2p+1$ avec $n = 2p$.

Donc:

$$-\left(\frac{\partial S^n}{\partial x} + \frac{\partial S^{n-1}}{\partial x}\right) = +\frac{2}{x^2} + 2\sum_{\lambda=1}^{\lambda=n-1} \frac{\partial^2 S^\lambda}{\partial x^2}$$

$$-\frac{1}{2}\left(\frac{\partial S^n}{\partial x} + \frac{\partial S^{n-1}}{\partial x}\right) = \frac{1}{x^2} + \sum_{\lambda=1}^{\lambda=n-1} \frac{\partial^2 S^\lambda}{\partial x^2}. \qquad (10.)$$

Les formules (9) et (9bis) peuvent se réunir en une seule d forme

$$-\frac{1}{2}\frac{\partial S^n}{x} = \frac{\sin^2 \frac{n\pi}{2}}{x^2} + \sum_{0}^{\lambda<\frac{n-1}{2}} \frac{\partial^2 S^{n-(2\lambda+1)}(x)}{\partial x^2} \qquad (11$$

Car λ étant toujours entier on a, à la limite inférieure: $\frac{\partial^2 S}{\partial x}$

et à la limite supérieure $\frac{\partial S^2}{\partial x^2}$ avec n impair, ou $\frac{\partial^2 S^1}{\partial x^2}$ avec n p

en outre $\frac{\sin^2 \frac{n\pi}{2}}{x^2}$ donne avec n pair $\frac{\sin^2 p\pi}{x^2} = 0$ et avec n impair

$$\frac{\sin^2 (2p+1)\frac{\pi}{2}}{x^2} = \frac{(-1)^{2p}}{x^2} = \frac{1}{x^2}.$$

La relation (11) établit ainsi la valeur d'une dérivée simple en fonction des dérivées secondes des fonctions d'indices inférieurs.

V.

D'un autre côté nous connaissons la formule $S_{(x)}^{n-1} - S_{(x)}^{n+1} = 2\frac{\partial S^n}{\partial x}$; cette formule est donc égale à

$$S^{n-1}(x) - S^{n+1}(x) = -4\left(\frac{\sin^2 \frac{n\pi}{2}}{x^2} + \sum_{\lambda=0}^{\lambda<\frac{n-1}{2}} \frac{\partial^2 S^{n-(2\lambda+1)}(x)}{\partial x^2}\right) \qquad (12.)$$

On peut aussi écrire

$$-S^{n+1}(x) = \frac{2\partial S^n}{\partial x} - S^{n-1}(x);$$

nous savons que cette formule est générale; elle nous conduira donc à la somme d'une suite de dérivées premières pour la valeur d'une fonction simple $S^n(x)$. Soit:

$$-S^{n+1}(x) = \frac{2\partial S^n(x)}{\partial x} + \frac{2\partial S^{n-2}(x)}{\partial x} + \frac{2\partial S^{n-4}(x)}{\partial x} + \ldots.$$

Pour former cette suite en une sommation à terme général, nous considérerons 2 cas, un avec *n pair* et un avec *n impair*.

Ier cas: *n pair*. Le dernier terme sera de la forme

$$\frac{2\partial S^2(x)}{\partial x} - S^1(x) = -S^3(x). \quad S^1(x) = \frac{2}{x}.$$

Donc on aura:

$$-S^{n+1}(x) = -\frac{2}{x} + 2\sum_{1}^{\lambda=\frac{n}{2}} \frac{\partial S^{2\lambda}(x)}{\partial x}. \qquad (13.)$$

IIme cas. n impair. La somme devra s'arrêter ici à

$$\frac{2\,\partial S^1(x)}{\partial x} - S^0(x).$$

Faisons remaquer que nous ne prolongeons pas nos sommes plus loin, simplement pour ne pas obtenir de termes négatifs.

Notre second cas donnera

$$-S^{n+1}(x) = \frac{2\,\partial S^n(x)}{\partial x} + \frac{2\,\partial S^{n-2}(x)}{\partial x} + \cdots + \frac{2\,\partial S^1(x)}{\partial x} - S^0(x),$$

$$S^0(x) = 0.$$

Donc

$$-S^{n+1}(x) = 2\sum_{0}^{\lambda=\frac{n-1}{2}} \frac{\partial S^{2\lambda+1}(x)}{\partial x}. \qquad (13^{bis})$$

Nous avons obtenu de cette façon les deux sommations pour les fonctions $S^n(x)$, suivant qu'elles sont paires ou impaires.

Prenons maintenant deux fonctions consécutives n et n — 1 et formons la suite des dérivées premières correspondantes. Quelle que soit leur parité, la 1re des dérivées sera $\frac{\partial S^{n-1}}{\partial x}$, la dernière $\frac{\partial S^1}{\partial x}$ et le dernier terme de la somme: $-\frac{2}{x}$, car nous avons 2 fonctions dont une paire et une impaire, et la fonction paire finit avec $-\frac{2}{x}$.

$$-\left(S^n(x) + S^{n-1}(x)\right) = \frac{2\,\partial S^{n-1}(x)}{\partial x} + \frac{2\,\partial S^{n-2}(x)}{\partial x} + \cdots\cdots \frac{2\,\partial S^1(x)}{\partial x} - \frac{2}{x}$$

$$S^n(x) + S^{n-1}(x) = +\frac{2}{x} - 2\sum_{\lambda=1}^{\lambda=n-1} \frac{\partial S^\lambda(x)}{\partial x} \qquad (14.)$$

Cette formule présente une harmonie parfaite avec la formule (10) en $\frac{\partial^2 S^\lambda}{\partial x}$ de même que les formules (13) et (13)^bis avec les formules (9) et (9)^bis.

Les formules (13) et (13)^{bis} peuvent aussi se grouper en une ule sommation qui sera:

$$-\frac{1}{2}S^n(x) = -\frac{\sin^2\frac{n\pi}{2}}{x} + \sum_{0}^{\lambda<\frac{n-1}{2}} \frac{\partial S^{n-(2\lambda+1)}(x)}{\partial x} \quad (15.)$$

La limite supérieure donnera suivant que n sera pair ou impair S^1 ou ∂S^2 et la limite inférieure donnera toujours ∂S^{n-1}.

Développons maintenant $S^n(x)$ sous une double sommation de érivées secondes. Nous considérons encore 2 cas avant de prendre cas général.

Ier cas. n pair.

La relation (13bis) nous donne:

$$S^n(x) = -2\sum_{\lambda=0}^{\lambda=\frac{n-2}{2}} \frac{\partial S^{2\lambda+1}(x)}{\partial x}$$

Les fonctions dont on doit prendre les dérivées premières sont s fonctions impaires inférieures à n.

La relation (9bis) nous donne pour ce cas:

$$\frac{\partial S^n(x)}{\partial x} = -2\left[\sum_{\lambda=1}^{\lambda=\frac{n-1}{2}} \frac{\partial^2 S^{2\lambda}(x)}{\partial x^2} + \frac{1}{x^2}\right]$$

$$\frac{\partial S^{2\lambda+1}(x)}{\partial x} = -2\left[\sum_{\mu=1}^{\mu=\lambda} \frac{\partial^2 S^{2\mu}(x)}{\partial x^2} + \frac{1}{x^2}\right]$$

Donc chaque terme de $S^n(x)$ étant une sommation, $S^n(x)$ sera la mmation de ces sommations.

$$S^n(x) = -2\sum -2\left(\Sigma + \frac{1}{x^2}\right)$$

Chaque terme dans la sommation étant affecté du facteur — 2, elui-ci peut passer devant et l'on a

$$S^n(x) = 4\sum\left(\Sigma + \frac{1}{x^2}\right)$$

Le terme $\frac{1}{x^2}$ est pris autant de fois que la grande sommation comporte de termes, car toutes les dérivées qui forment cette grande sommation sont une autre sommation plus $\frac{1}{x^2}$.

On a $\frac{n-2}{2} + 1$ ou $\frac{n}{2}$ termes et $\frac{n}{2} \cdot \frac{1}{x^2} = \frac{n}{2x^2}$.

Donc:

$$S^n(x) = \frac{2n}{x^2} + 4 \sum_{\lambda=0}^{\lambda=\frac{n-2}{2}} \sum_{\mu=1}^{\mu=\lambda} \frac{\partial^2 S^{2\mu}(x)}{\partial x^2}. \qquad (16.)$$

IIme cas. n impair.

$$S^n(x) = \frac{2}{x} - 2 \sum_{\lambda=1}^{\lambda=\frac{n-1}{2}} \frac{\partial S^{2\lambda}}{\partial x}$$

donne la valeur de S pour notre cas:

Ensuite

$$\frac{\partial S^{2\lambda}}{\partial x} = -2 \sum_{\mu=0}^{\mu=\lambda-1} \frac{\partial^2 S^{2\mu+1}}{\partial x^2}.$$

Ce qui nous permet d'écrire directement

$$S^n(x) = \frac{2}{x} + 4 \sum_{\lambda=1}^{\lambda=\frac{n-1}{2}} \sum_{\mu=0}^{\mu=\lambda-1} \frac{\partial^2 S^{2\mu+1}}{\partial x^2} \qquad (17.)$$

Pour établir une formule générale, considérons les deux formules relatives à S^n et ∂S^n obtenues aux numéros (11) et (15). Soit

$$S^n(x) = \frac{2 \sin^2 \frac{n\pi}{2}}{x} - 2 \sum_{\lambda=0}^{\lambda<\frac{n-1}{2}} \frac{\partial S^{n-(2\lambda+1)}(x)}{\partial x},$$

dans (11) remplaçons n par $n - 2\lambda - 1$, nous aurons

$$\frac{\partial S^{n-2\lambda-1}(x)}{\partial x} = -2 \left(\frac{\sin^2 \frac{(n-2\lambda-1)\pi}{2}}{x^2} + \sum_{\mu=0}^{\mu<\frac{n}{2}-\lambda-1} \frac{\partial^2 S^{n-2\lambda-2\mu-2}(x)}{\partial x^2} \right)$$

Introduite dans la 1e sommation, cette valeur nous donne, en tenant compte de ce que la valeur $\sin^2 (n-2\lambda-1)\frac{\pi}{2}$ s'annule pour *impair*, et encore de ce que, quand n est *pair*, la 1e somme comporte $\frac{n}{2}$ termes:

$$S(x)=\frac{2\sin^2\frac{n\pi}{2}}{x}+4\cdot\frac{n}{2}\cdot\frac{\sin^2(n-1)\frac{\pi}{2}}{x^2}+4\sum_{\lambda=0}^{\lambda<\frac{n-1}{2}}\sum_{\mu=0}^{\mu<\frac{n}{2}-(\lambda+1)}\frac{\partial^2 S^{n-2\lambda-2,\mu-2}}{\partial x^2} \quad (18)$$

Telle sera notre formule générale pour $S^n(x)$, n étant pair ou impair.

Sur la somme $O^{n+1}(x) + O^{n-1}(x)$ et la différence $O^{n-1}(x) - O^{n+1}(x)$.

I.

La relation (1) dans le chapitre précédent donne:

$$4\,O^{n+1}(x) = S^{n+2}(x) + S^n(x)$$
$$4\,O^{n-1}(x) = S^n(x) + S^{n-2}(x).$$

L'addition nous amène à

$$4\left(O^{n+1}(x) + O^{n-1}(x)\right) = S^{n+2}(x) + 2\,S^n(x) + S^{n-2}(x).$$

En introduisant la valeur de $S^n(x)$:

$$S^n(x) = 2\int_0^{\frac{N}{x}} e^{-xs} f_{n-1}(2s, 0)\,ds$$

ns les diverses fonctions S, nous obtenons:

$$O^{n+1}(x)+O^{n-1}(x)\Big) = 2\int_0^{\frac{N}{x}} e^{-xs}\left\{f_{n+1}(2s,0) + 2f_{n-1}(2s,0) + f_{n-3}(2s,0)\right\}ds$$

On sait que: $f_{n+1}(2s, 0) = 2s\,f_n(2s, 0) + f_{n-1}(2s, 0)$

$_{+1}(2s, 0) + 2\,f_{n-1} + f_{n-3}(2s, 0)$ devient avec cette valeur:

$$2s\,f_n(2s, 0) + 3f_{n-1}(2s, 0) + f_{n-3}(2s, 0)$$

Faisons : $f_n = 2s\, f_{n-1} + f_{n-2}$

et introduisons, nous aurons :

$$4s^2 f_{n-1} + 3 f_{n-1} + \underbrace{2s f_{n-2} + f_{n-3}}_{=- f_{n-1}}.$$

Les deux derniers termes représentant f_{n-1}, la somme devient alors

$$4s^2 f_{n-1} + 4 f_{n-1} \text{ ou } 4\,(s^2 f_{n-1} + f_{n-1}).$$

D'où

$$4\,(0^{n+1}(x) + 0^{n-1}(x)) = 8 \int_0^{\frac{N}{x}} e^{-xs}(s^2 + 1)\, f_{n-1}(2s, 0)\, ds,$$

$$0^{n+1}(x) + 0^{n-1}(x) = 2 \int e^{-xs}(s^2 + 1)\, f_{n-1}(2s, 0)\, ds.$$

Pour trouver la valeur de l'intégrale précédente posons :

$$S^n(x) = 2 \int_0^{\frac{N}{x}} e^{-xs} f_{n-1}(2s.0)\, ds,$$

$$\frac{\partial S^n}{\partial x} = -2 \int_0^{\frac{N}{x}} e^{-xs} s\, f_{n-1}(2s, 0)\, ds,$$

$$\frac{\partial^2 S^n}{\partial x^2} = +2 \int_0^{\frac{N}{x}} e^{-xs} s^2 f_{n-1}(2s, 0)\, ds.$$

Ce mode de représentation nous permet d'écrire

$$\frac{\partial^2 S^n(x)}{\partial x^2} + S^n(x) = 2 \int_0^{\frac{N}{x}} e^{-xs} s^2 f_{n-1}(2s, 0)\, ds$$

$$+ 2 \int_0^{\frac{N}{x}} e^{-xs} f_{n-1}(2s, 0)\, ds$$

$$= 2 \int_0^{\frac{N}{x}} e^{-xs}(s^2 + 1)\, f_{n-1}(2s, 0)\, ds.$$

D'où nous tirons l'intéressante formule :

$$0^{n+1}(x) + 0^{n-1}(x) = \frac{\partial^2 S^n(x)}{\partial x^2} + S^n \qquad ($$

En remplaçant $O^{n+1}(x)$ et $O^{n-1}(x)$ par leurs valeurs tirées de uation (5) précédente, en additionnant et en égalisant à $\frac{S^n(x)}{\partial x^2} + S^n(x)$, nous avons un intéressant moyen de vérification de re formule (1).

$$\left.\begin{aligned} O^{n+1}(x) &= \frac{1}{2} S^n - \frac{1}{2}\frac{\partial S^{n+1}}{\partial x} \\ O^{n-1} &= \frac{1}{2} S^{n-2} - \frac{1}{2}\frac{\partial S^{n-1}}{\partial x} \end{aligned}\right\} (\partial)$$

$$^{+1}(x) + O^{n-1}(x) = \frac{1}{2}\left\{S^n(x) + S^{n-2}(x) - \left(\frac{\partial S^{n+1}}{\partial x} + \frac{\partial S^{n-1}}{\partial x}\right)\right\}$$

$$= \frac{\partial^2 S^n(x)}{\partial x^2} + S^n(x)$$

$$\text{ù} = \frac{1}{2}\left(S^{n-2}(x) - S^n(x)\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{\partial S^{n+1}(x)}{\partial x} + \frac{\partial S^{n-1}}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 S^n(x)}{\partial x^2}$$

is $S^{n-2}(x) - S^n(x) = 2\frac{\partial S^{n-1}}{\partial x}$, et

$$\frac{1}{2}\cdot 2\cdot\frac{\partial S^{n-1}}{\partial x} - \frac{1}{2}\frac{\partial S^{n+1}}{\partial x} - \frac{1}{2}\frac{\partial S^{n-1}}{\partial x} = \frac{\partial^2 S^n(x)}{\partial x},$$

qui donne

$$\frac{1}{2}\left(\frac{\partial S^{n-1}(x)}{\partial x} - \frac{\partial S^{n+1}(x)}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 S^n}{\partial x}$$

Ce procédé de vérification nous amène à une valeur qui n'est un cas de notre formule (8bis) de la page 74. Ceci nous permet conclure que notre relation (1) est exacte.

On pourrait aussi remplacer $O^{n+1}(x)$ et $O^{n-1}(x)$ par leurs valeurs es des formules (6), et l'on arriverait encore au même résultat, qui vérifie doublement les résultats donnés.

II.

Posons ensuite:

$$O^{n+1}(x) = \int_0^{\frac{N}{x}} e^{-xs}\left(s f_n(2s,0) + f_{n-1}(2s,0)\right) ds$$

$$O^{n-1}(x) = \int_0^{\frac{N}{x}} e^{-xs}\left(s f_{n-2}(2s,0) + f_{n-3}(2s,0)\right) ds.$$

Par soustraction nous obtenons:

$$0^{n+1}(x) - 0^{n-1}(x) = \int_0^{\frac{N}{x}} e^{-xs} \Big\{ s f_n(2s,0) - s f_{n-2}(2s,0) + f_{n-1}(2s,0) - f_{n-3}(2s,0) \Big\} ds,$$

on sait que:

$$f_n = 2s f_{n-1} + f_{n-2}$$
$$f_{n-1} = 2s f_{n-2} + f_{n-3}$$

Avec ces substitutions notre intégrale devient:

$$\int_0^{\frac{N}{x}} e^{-xs} \Big\{ 2s^2 f_{n-1} + s f_{n-2} - s f_{n-2} + 2s f_{n-2} + f_{n-3} - f_{n-3} \Big) ds,$$

$$= \int_0^{\frac{N}{x}} e^{-xs} \Big\{ 2s^2 f_{n-1} + 2s f_{n-2} \Big) ds,$$

$$= 2 \int_0^{\frac{N}{x}} e^{-xs} s \Big(s f_{n-1} + f_{n-2} \Big) ds,$$

mais

$$\frac{\partial 0^n(x)}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \int_0^{\frac{N}{x}} e^{-xs} (s f_{n-1} + f_{n-2}) ds$$

$$= - \int_0^{\frac{N}{x}} e^{-xs} s (s f_{n-1} + f_{n-2}) ds.$$

Ce qui nous permet de conclure:

$$0^{n+1}(x) - 0^{n-1}(x) = -2 \frac{\partial 0^n(x)}{\partial x} \text{ ou}$$

$$0^{n-1}(x) - 0^{n+1}(x) = 2 \frac{\partial 0^n(x)}{\partial x} \qquad (2.)$$

C'est donc une relation pour la différence de 2 fonctions 0(x). relation assez analogue à celle pour la différence de 2 fonctions S(x)

Ces 2 relations sont déduites du nouveau mode de représentation des fonctions Besséliennes de 2e espèce suivant une fonction du numérateur d'une réduite de la fraction continue $\Big\{ 2s \ldots\ldots 2s \Big\}$.

III.

En nous reportant à la formule (5.) page 72, nous avons:

$$0^n(x) = \frac{1}{2}\left(S^{n-1}(x) - \frac{\partial S^n}{\partial x}\right)$$

Développons ainsi 0^{n-1} et $0^{n+1}(x)$. En faisant la différence nous avons:

$$0^{n-1}(x) = \frac{1}{2}\left(S^{n-2}(x) - \frac{\partial S^{n-1}(x)}{\partial x}\right),$$

$$0^{n+1}(x) = \frac{1}{2}\left(S^{n}(x) - \frac{\partial S^{n+1}(x)}{\partial x}\right),$$

$$0^{n-1}(x) - 0^{n+1}(x) = \frac{1}{2}\left(S^{n-2}(x) - S^{n}(x)\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial S^{n+1}(x)}{\partial x} - \frac{\partial S^{n-1}(x)}{\partial x}\right)$$

$$= \frac{1}{2} \cdot 2\frac{\partial S^{n-1}}{\partial x} + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial S^{n+1}(x)}{\partial x} - \frac{\partial S^{n-1}(x)}{\partial x}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial S^{n-1}(x)}{\partial x} + \frac{\partial S^{n+1}(x)}{\partial x}\right).$$

Ce qui nous donne la relation:

$$4\frac{\partial 0^n(x)}{\partial x} = \frac{\partial S^{n-1}(x)}{\partial x} + \frac{\partial S^{n+1}(x)}{\partial S} \qquad (3)$$

Ce résultat est aussi développable en partant de

$$\frac{\partial S^n(x)}{\partial x} = -2\int_0^x e^{-xs} s\, f_{n-1}(2s, 0)\, ds.$$

l montre que la formule:

$$S^{n-1}(x) + S^{n+1}(x) = 4\, 0^n(x),$$

encore valable quand on en prend la dérivée par rapport à x.

En posant aussi:

$$(x) = \int_0^x e^{-xs}\left(s\, f_{n-1}(2s, 0) + f_{n-2}(2s, 0)\right) ds$$

$$\frac{J^n}{x} = -\int_0^x e^{-xs} s\left(s\, f_{n-1}(2s, 0) + f_{n-2}(2s, 0)\right) ds$$

puis en appliquant cette formule à

$$\frac{\partial 0^{n+1}(x)}{\partial x} \text{ et } \frac{\partial 0^{n-1}(x)}{\partial x}$$

et en additionnant, on arrive à une relation qui doit pouvoir s'obtenir directement en dérivant suivant x :

$$0^{n+1} + 0^{n-1} = \frac{\partial^2 S^n}{\partial x} + S^n .$$

En effet

$$\frac{\partial 0^{n+1}(x)}{\partial x} = - \int_0^{\frac{N}{x}} e^{-xs}(s^2 f_n + s f_{n+1})\, ds$$

$$\frac{\partial 0^{n-1}(x)}{\partial x} = - \int_0^{\frac{N}{x}} e^{-xs}(s^2 f_{n-2} + s f_{n-3})\, ds.$$

L'addition donne :

$$\frac{\partial 0^{n+1}(x)}{\partial x} + \frac{\partial 0^{n-1}(x)}{\partial x} = - \int_0^{\frac{N}{x}} e^{-xs}(s^2 f_n + s^2 f_{n-2} + s f_{n-1} + s f_{n-3})\, ds.$$

mais $f_n = 2 s f_{n-1} + f_{n-2}$

$s^2 f_n = 2 s^3 f_{n-1} + s^2 f_{n-2}$ et $2 s^2 f_{n-2} + s f_{n-3} = s f_{n-1}$;

nous avons donc

$$\frac{\partial 0^{n+1}(x)}{\partial x} + \frac{\partial 0^{n-1}(x)}{\partial x} = - \int e^{-xs} \{2 s^3 f_{n-1} + 2 s^2 f_{n-2} + s f_{n-1} + s f_{n-3}\}\, ds$$

$$= - \int e^{-xs} (2 s^3 f_{n-1} + 2 s f_{n-1})\, ds$$

$$= - 2 \int e^{-xs} s (s^2 + 1) f_{n-1}\, ds$$

$$S^n(x) = 2 \int_0^{\frac{N}{x}} e^{-xs} f_{n-1}\, ds$$

$$\frac{\partial S^n(x)}{\partial x} = - 2 \int_0^{\frac{N}{x}} e^{-xs} s f_{n-1}\, ds$$

$$\frac{\partial^3 S^n(x)}{\partial x^3} = -2\int_0^{\frac{N}{x}} e^{-xs} s^3 f_{n-1}\, ds$$

$$\frac{\partial S^n(x)}{\partial x} + \frac{\partial^3 S^n(x)}{\partial x} = -2\int_0^{\frac{N}{x}} e^{-xs} s\,(s^2+1)\, f_{n-1}\, ds \qquad \text{d'où}$$

$$\frac{0^{n+1}(x)}{\partial x} + \frac{\partial 0^{n-1}(x)}{\partial x} = \frac{\partial^3 S^n(x)}{\partial x^3} + \frac{\partial S^n(x)}{\partial x} \qquad (4)$$

C. q. f. d.

IV.

Nous avons eu la formule :

$$0^{n-1}(x) - 0^{n+1} = \frac{2\,\partial 0^n}{\partial x},$$

us devons obtenir une relation analogue entre les dérivées de $0^{n-1}(x)$ de $0^{n+1}(x)$, relation que l'on pourrait obtenir directement en dérint cette formule suivant x.

En effet:

$$\frac{\partial 0^{n+1}(x)}{\partial x} = -\int_0^{\frac{N}{x}} e^{-xs}\,(s^2 f_n + s f_{n-1})\, ds,$$

sons dans cette intégrale

$$f_n = 2 s f_{n-1} + f_{n-2} \quad \text{et} \quad f_{n-1} = 2 s f_{n-2} + f_{n-3}$$

$$\frac{\partial 0^{n+1}(x)}{\partial x} = -\int e^{-xs}\,(2 s^3 f_{n-1} + s^2 f_{n-2} + s f_{n-1})\, ds$$

$$= -\int e^{-xs}\,(2 s^3 f_{n-1} + 3 s^2 f_{n-2} + s f_{n-3})\, ds$$

$$-2\int e^{-xs} s^2\,(s f_{n-1} + f_{n-2})\, ds + \int e^{-xs} s\,(s f_{n-2} + f_{n-3})\, ds.$$

La première de ces intégrales n'est autre chose que

$$-2\frac{\partial^2 0^n(x)}{\partial x}, \quad \text{et la seconde} + \frac{\partial 0^{n-1}(x)}{\partial x}.$$

Donc

$$\frac{\partial 0^{n+1}(x)}{\partial x} = \frac{\partial 0^{n-1}(x)}{\partial x} - 2\frac{\partial^2 0^n}{\partial x^2}.$$

$$\frac{\partial 0^{n-1}(x)}{\partial x} - \frac{\partial 0^{n+1}(x)}{\partial x} = 2\frac{\partial^2 0^n(x)}{\partial x^2} \qquad (5)$$

C. q. f. d.

Les relations (2) et (5) de ce chapitre nous permettront évidemment d'obtenir des sommations pour

$$0^n(x) \quad \text{et} \quad \frac{\partial 0^n(x)}{\partial x},$$

analogues aux sommations du chapitre précédent pour

$$S^n(x) \quad \text{et} \quad \frac{\partial S^n(x)}{\partial x}$$

Nous pouvons poser:

$$-\frac{\partial 0^n(x)}{\partial x} = 2\frac{\partial^2 0^{n-1}(x)}{\partial x^2} - \frac{\partial 0^{n-2}(x)}{\partial x}$$

$$= 2\frac{\partial^2 0^{n-1}(x)}{\partial x^2} + 2\frac{\partial^2 0^{n-3}(x)}{\partial x^2} + 2\frac{\partial^2 0^{n-5}(x)}{\partial x^2} + \cdots \cdots$$

$$+ 2\frac{\partial^2 0^2(x)}{\partial x^2} - \frac{\partial 0^1}{\partial x} \quad (1)$$

quand n est *impair*, et

$$-\frac{\partial 0^n(x)}{\partial x} = 2\frac{\partial^2 0^{n-1}(x)}{\partial x^2} + 2\frac{\partial^2 0^{n-3}}{\partial x^2} + \cdots + 2\frac{\partial^2 0^1(x)}{\partial x^2} - \frac{\partial 0^0(x)}{\partial x}$$

quand n est *pair*.

Ceci donne les 2 formules par sommation:

$$-\frac{\partial 0^{2p+1}(x)}{\partial x} = \frac{2}{x^3} + 2\sum_{\lambda=1}^{\lambda=p}\frac{\partial 0^{2\lambda}(x)}{\partial x^2} \qquad (6)$$

$$-\frac{\partial 0^{2p}(x)}{\partial x} = \frac{1}{x^2} + 2\sum_{\lambda=0}^{\lambda=p-1}\frac{\partial^2 0^{2\lambda+1}(x)}{\partial x^2}. \qquad (6^{bis})$$

D'où

$$-\left(\frac{\partial 0^n(x)}{\partial x} + \frac{\partial 0^{n-1}(x)}{\partial x}\right) = \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3} + 2\sum_{\lambda=1}^{\lambda=n-1}\frac{\partial^2 0^\lambda}{\partial x^2} \qquad (7)$$

Les 2 valeurs (6) et (6bis) se réunissent évidemment en une seule

$$-\frac{\partial 0^n(x)}{\partial x} = \frac{2\sin n\frac{\pi}{2}}{x^2} + \frac{\sin(n-1)\frac{\pi}{2}}{x^2} + 2\sum_{\lambda=0}^{\lambda<\frac{n-1}{2}}\frac{\partial^2 0^{n-(2\lambda+1)}(x)}{\partial x^2} \qquad (8)$$

Nous pouvons poser encore

$$0^n(x) = 2\frac{\partial 0^{n-1}(x)}{\partial x} - 0^{n-2}(x)$$

$$= 2\frac{\partial 0^{n-1}(x)}{\partial x} + 2\frac{\partial 0^{n-3}(x)}{\partial x} + \cdots + 2\frac{\partial 0^2(x)}{\partial x} - 0^1(x)$$

c n impair, et

$$- 0^n(x) = 2\frac{\partial 0^{n-1}(x)}{\partial x} + 2\frac{\partial 0^{n-3}(x)}{\partial x} + \cdots + 2\frac{\partial 0^1(x)}{\partial x} - 0^0(x)$$

nd n est *pair.*

Nous obtenons alors 2 sommations:

$$- 0^{2p+1}(x) = -\frac{1}{x^2} + 2\sum_{\lambda=1}^{\lambda=p}\frac{\partial 0^{2\lambda}(x)}{\partial x} \text{ et} \qquad (9)$$

$$- 0^{2p}(x) = -\frac{1}{x} + 2\sum_{\lambda=0}^{\lambda=\frac{p-1}{2}}\frac{\partial 0^{2\lambda+1}(x)}{\partial x}. \qquad (9^{bis})$$

D'où

$$\left(0^n(x) + 0^{n-1}(x)\right) = -\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}\right) + 2\sum_{\lambda=1}^{\lambda=n-1}\frac{\partial 0^\lambda}{\partial x}. \qquad (10)$$

Les valeurs (9) et (9bis) mises en une forme plus générale nent:

$$0^n(x) = -\left(\frac{\sin\frac{n\pi}{2}}{x^2} + \frac{\sin(n-1)\frac{\pi}{2}}{x}\right) + 2\sum_{\lambda=0}^{\lambda<\frac{n-1}{2}}\frac{\partial 0^{n-(2\lambda+1)}}{\partial x}. \qquad (11)$$

La formule (11) peut comme la formule (15) du chapitre cédent se ramener à une double sommation qui est:

$$x) = \sin\frac{n\pi}{2}\left(\frac{1}{x^2} + \frac{2(n-1)}{x^3}\right) + \sin\frac{(n-1)\pi}{2}\left(\frac{1}{x} + \frac{n}{x^2}\right)$$

$$+ 4\sum_{\lambda=0}^{\lambda<\frac{n-1}{2}}\sum_{\mu=0}^{\mu<\frac{n-2\lambda-2}{2}}\frac{\partial^2 0^{n-2\lambda-2,\mu-2}}{\partial x^2} \qquad (12)$$

Conclusions:

Considérons la fonction Bessélienne de 2e espéce $O^n(x)$

$$O^n(x) = \int_0^{\frac{N}{x}} e^{-xs}\left(t^n + (-1)^n t^{-n}\right) ds.$$

et donnons lui la nouvelle forme que nous avons introduite dans le § 6 de notre thèse; soit:

$$O^n(x) = \int_0^{\frac{N}{x}} e^{-xs}\left(s f_{n-1}(2s, 0) + f_{n-2}(2s, 0)\right) ds;$$

considérons de même la fonction Bessélienne de 2e espèce $S^n(x)$:

$$S^n(x) = \int_0^{\frac{N}{x}} e^{-xs}\left(t^n - (-1)^n t^{-n}\right) \frac{dt}{t}$$

et donnons lui aussi notre nouvelle forme inaugurée au chapitre Ier de cette note:

$$S^n(x) = 2 \int_0^{\frac{N}{x}} e^{-xs} f_{n-1}(2s, 0)\, ds.$$

Rappelons encore que $f_n(2s, 0)$ est le numérateur de la dernière réduite de la fraction continue: $(2s \cdot 2s \cdot 2s \cdot \cdots \cdot 2s)$ ayant n quotients incomplets.

a) Ces deux nouvelles formules conduisent aisément aux sommations pour $O^n(x)$ et $S^n(x)$. (§ 6 notre thèse — chapitre Ier de cette note

b) Elles permettent en tenant compte des propriétés de $f_n(2s,$ d'arriver rapidement aux 4 relations suivantes

I. $S^{n-1}(x) - S^{n+1}(x) = 2\dfrac{\partial S^n}{\partial x}$ (formule 2 chap. II.)

II. $S^{n+1}(x) + S^{n-1}(x) = 4\, O^n(x)$ (» 1 » II.)

III. $O^{n-1}(x) - O^{n+1}(x) = 2\dfrac{\partial O^n}{\partial x}$ (» 2 » III.)

IV. $O^{n+1}(x) + O^{n-1}(x) = S^n(x) + \dfrac{\partial^2 S^n(x)}{\partial x^2}$ (» 1 » III.)

Dont les 3 premières sont déjà connues.

Faisons remarquer que la nouvelle formule IV conduit des fonc-
ıs $O^n(x)$ aux fonctions $S^n(x)$, à l'inverse de la formule II.

c) La valeur $\frac{\partial S^n(x)}{\partial x}$ pouvant aussi se mettre sous la forme d'une
ɜgrale définie conduit aux valeurs suivantes pour $O^n(x)$ (§ 3
p. II).

V. $$\begin{cases} O^n(x) = \frac{1}{2}\left(S^{n-1} - \frac{\partial S^n(x)}{\partial x}\right) \\ O^n(x) = \frac{1}{2}\left(S^{n+1} + \frac{\partial S^n(x)}{\partial x}\right) \end{cases}$$

d) L'application des propriétés de $f_n(2s, 0)$ aux intégrales
nant les valeurs

$$\frac{\partial O^n(x)}{\partial x} \text{ et } \frac{\partial S^n(x)}{\partial x}$$

luit à 2 nouvelles relations démontrant que les formules I et III
ɪistent quand on les dérive par rapport à x, autrement dit qu'il existe
relations analogues entre les dérivées suivant x et entre les fonctions
ɔctes:

I. $\frac{\partial S^{n-2}(x)}{\partial x} - \frac{\partial S^n(x)}{\partial x} = \frac{2\partial^2 S^{n-1}(x)}{\partial x}$ (formule 8bis chap. II.)

I. $\frac{\partial O^{n-2}(x)}{\partial x} - \frac{\partial O^n(x)}{\partial x} = 2\frac{\partial^2 O^{n-1}(x)}{\partial x^2}$ (» 5 chap. III.)

e) Les deux formules V avec $n-1$ et $n+1$ retranchées et
parées ensuite à III, nous donnent un résultat prouvant qu'il
te entre les dérivées suivant x dans la formule II, une relation
logue à celle entre les fonctions directes.

$\frac{\partial S^{n-1}(x)}{\partial x} + \frac{\partial S^{n+1}(x)}{\partial x} = 4\frac{\partial O^n(x)}{\partial x}$ (formule 3 chap. III.)

f) Les dérivées de $O^{n-1}(x)$ et de $O^{n+1}(x)$ mises en intégrales et
ɪtionnées nous démontrent encore que la formule IV subsiste quand
dérive tous les termes suivant x.

$\frac{\partial O^{n+1}(x)}{\partial x} + \frac{\partial O^{n-1}(x)}{\partial x} = \frac{\partial S^n(x)}{\partial x} + \frac{\partial^3 S^n(x)}{\partial x^3}$ (formule 4 chap. III.)

g) Les relations I et III conduisent aux lois suivantes:

1. Une fonction Besséliennne de IIe espèce O ou S à indice positif prise négativement est égale à 2 fois la somme des dérivées suivant x de toutes les mêmes fonctions inférieures à indices positifs mais de parité différente, moins une constante.

2. La somme de deux fonctions Besséliennes de I^e espèce O ou S à indices positifs consécutifs, prise avec le signe —, est égale à 2 fois la somme des dérivées suivant x de toutes les fonctions inférieures à indices positifs, moins une constante.

(Voir les formules 14 et 15 chap. II et les formules 11 et 12 chap. III.)

h) Les relations VI et VII conduisent aux mêmes lois pour le développement des dérivées premières en fonction des dérivées secondes.

1. Les lois de formation des fonctions Besséliennes O ou S à indices positifs, en fonction des dérivées premières des mêmes fonctions à indices inférieurs et d'une autre parité, subsistent pour le développement des dérivées premières en fonction des dérivées secondes.

2. La somme prise négativement, de 2 dérivées premières de fonctions O ou S consécutives est égale à 2 fois la somme des dérivées secondes de toutes les fonctions inférieures, plus une constante.

(Formules 10 et 11 chap. II et formules 7 et 8 chap. III.)

k) Les fonctions O ou S peuvent se représenter par des doubles sommations. (Formule 18 chap. I et formule 12 chap. II).

Sur un cas particulier du développement de la fonction $P_m^a(x)$ en une intégrale définie

cas de $\lim m = \infty$.

Rappelons la valeur de $P_m^a(x)$: *)

$$P_m^a(x) = \sum_{\lambda=0}^{\lambda \leq \frac{m+1}{2}} (-1)^\lambda \frac{(m-\lambda)!}{\lambda!} \binom{a+m-\lambda}{m-2\lambda} \left(\frac{2}{x}\right)^{m-2\lambda}$$

Développons le coefficient binoméal

*) J.-H. Graf, ibidem «Annali di Matematica».

$$\binom{a+m-\lambda}{m-2\lambda} \text{ suivant } \binom{n}{\lambda} = \frac{n!}{\lambda!\,(n-\lambda)!}$$

et introduisons la notation Eulérienne soit $n! = \Gamma(n+1)$.

Nous aurons:

$$P^{a}_{m}(x) = \sum_{\lambda=0}^{\lambda<\frac{m+1}{2}} \frac{(-1)^{\lambda}\,\Gamma(m-\lambda+1)\,\Gamma(a+m-\lambda+1)}{\Gamma(\lambda+1)\,\Gamma(m-2\lambda+1)\,\Gamma(a+\lambda+1)} \left(\frac{2}{x}\right)^{m-2\lambda}$$

en considérant lim $m = \infty$, nous aurons

$$P^{a}_{m}(x) = \sum_{\lambda=0}^{\lambda=\infty} \frac{(-1)^{\lambda}\,\Gamma(m-\lambda+1)\,\Gamma(a+m-\lambda+1)}{\Gamma(\lambda+1)\,\Gamma(m-2\lambda+1)\,\Gamma(a+\lambda+1)} \left(\frac{2}{x}\right)^{m-2\lambda}$$

Rappelons encore que

$$\Gamma(n+a) = n^{a}\,\Gamma n \;^{*})$$

pour lim $n = \infty$.

Nous aurons alors:

$$\Gamma(m+1-2\lambda) = \Gamma((m+1-\lambda)-\lambda) = (m-\lambda+1)^{-\lambda}\,\Gamma(m-\lambda+1)$$

$$\Gamma((m-\lambda+1)+a) = (m-\lambda+1)^{a}\,\Gamma(m-\lambda+1).$$

En introduisant ces valeurs dans la fonction $P^{a}_{m}(x)$, nous obtenons:

$$P^{a}_{m}(x) = \sum_{\lambda=0}^{\lambda=\infty} \frac{(-1)^{\lambda}\,\Gamma(m-\lambda+1)\,(m-\lambda+1)^{a}\,\Gamma(m-\lambda+1)}{\Gamma(\lambda+1)\,\Gamma(a+\lambda+1)\,(m-\lambda+1)^{-\lambda}\,\Gamma(m-\lambda+1)} \left(\frac{2}{x}\right)^{m-2\lambda}$$

$$= \sum_{\lambda=0}^{\lambda=\infty} \frac{(-1)^{\lambda}\,\Gamma(m-\lambda+1)\,(m-\lambda+1)^{a+\lambda}}{\Gamma(\lambda+1)\,\Gamma(a+\lambda+1)} \left(\frac{2}{x}\right)^{m-2\lambda}.$$

On aura de même

$$(m-\lambda+1)^{a+\lambda}\,\Gamma(m-\lambda+1) = \Gamma(m-\lambda+1+\lambda+a) = \Gamma(m+a+1) = (m+a)!$$

On peut remplacer $\frac{1}{\lambda!}$ par

$$\frac{1}{\lambda!} = \frac{2^{2\lambda}\,\Gamma\left(\lambda+\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)(2\lambda)!}$$

ce qui donne:

*) Prof. Dr. *J. H. Graf*, Einleitung in die Theorie der Gammafunktion, page 5. Bern, 1894.

$$\underset{\lim m = \infty}{P_m^a(x)} = \frac{(m+a)!}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)} \sum_{\lambda=0}^{\lambda=\infty} \frac{(-1)^\lambda 2^{2\lambda} \Gamma\left(\lambda+\frac{1}{2}\right) \Gamma\left(a+\frac{1}{2}\right)}{(2\lambda)!\ \Gamma(a+\lambda+1)\ \Gamma\left(a+\frac{1}{2}\right)} \cdot \left(\frac{2}{x}\right)^m \cdot \left(\frac{2}{x}\right)^{-2\lambda},$$

mais

$$\frac{\Gamma\left(a+\frac{1}{2}\right) \Gamma\left(\lambda+\frac{1}{2}\right)}{\Gamma(a+\lambda+1)} = \int_0^1 y^{\lambda-\frac{1}{2}} (1-y)^{a-\frac{1}{2}}\, dy.$$

D'où

$$\underset{\lim m = \infty}{P_m^a(x)} = \frac{(m+a)!\ 2^m}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) \Gamma\left(a+\frac{1}{2}\right) x^m} \sum_{\lambda=0}^{\lambda=\infty} \frac{(-1)^\lambda x^{2\lambda}}{(2\lambda)!} \int_0^1 y^{\lambda-\frac{1}{2}} (1-y)^{a-\frac{1}{2}} dy$$

Faisons $y = y^2$ d'où $dy = 2y\, dy$
l'intégrale deviendra.

$$2 \int_0^1 y^{2\lambda-1} (1-y^2)^{a-\frac{1}{2}} y \,.\, dy\,;$$

ce qui donne

$$P_m^a(x) = \frac{(m+a)!\ 2^m}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) \Gamma\left(a+\frac{1}{2}\right) x^m} 2 \int_0^1 (1-y^2)^{a-\frac{1}{2}} \sum_{\lambda=0}^{\lambda=\infty} \frac{(-1)^\lambda (xy)^{2\lambda}}{2\lambda!} dy.$$

La sommation devient cos xy.

Nous pouvons encore considérer $2\int$; la 1re de 0 à 1 et la seconde avec y changé en $-y$ va de 0 a -1, et devient négative.

Elle peut devenir:

$$\int_{-1}^0 (1-y^2)^{a-\frac{1}{2}} \cos xy \,.\, dy.$$

Les intégrales donneront:

$$\int_{-1}^0 (1-y^2)^{a-\frac{1}{2}} \cos xy\, dy + \int_0^1 (1-y^2)^{a-\frac{1}{2}} \cos xy\, dy$$

$$= \int_{-1}^{+1} (1-y^2)^{a-\frac{1}{2}} \cos xy\, dy.$$

faisant $y = \cos\varphi$, les nouvelles limites seront

$$y = -1 \qquad \varphi = \pi$$
$$y = 1 \qquad \varphi = 0$$
$$dy = d\cos\varphi = -\sin\varphi\, d\varphi.$$

En changeant les limites on aura pour l'intégrale

$$\int^{\pi} \sin^{2a-1}\varphi\left(\cos\left\{x\,(\cos\varphi)\right\}\right)\sin\varphi\, d\varphi$$

$$= \int_0^{\pi} \sin^{2a}\varphi \cdot \cos\left(x\cos\varphi\right) d\varphi.$$

La fonction $P_m^a(x)$ avec $m = \infty$ devient donc :

$$x) = -\frac{\Gamma(m + a + 1)\, 2^m}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(a + \frac{1}{2}\right) x^m} \int_0^{\pi} \cos\left\{x\cos\varphi\right\} \sin^{2a}\varphi \cdot d\varphi.$$

$$= -\frac{\Gamma(m + a + 1)\, 2^m}{\Gamma\frac{1}{2} \cdot \Gamma\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{5}{2} \cdots \left(a - \frac{1}{2}\right) \cdot x^m} \int_0^{\pi} \cos\left(x\cos\varphi\right) \sin^{2a}\varphi\, d\varphi$$

$$(x) = \frac{2^{m+a} \cdot \Gamma(m + a + 1)}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2a - 1)} \frac{1}{x^m \cdot \pi} \int_0^{\pi} \cos\left(x\cos\varphi\right) \sin^{2a}\varphi\, d\varphi. \quad (\alpha.)$$

Cette valeur de $P_m^a(x)$ déduite de la théorie des fonctions ériennes, peut être facilement transformée et ramenée à la formule définition donnée par M. *J.-H. Graf* dans le travail précité. Pour , reportons nous à la formule de Jacobi, pour $J^a(x)$:

$$x) = \frac{x^a}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2a - 1)} \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \cos\left(x\cos\varphi\right) \sin^{2a}\varphi\, d\varphi\,;$$

·e valeur $P_m^a(x)$ devient alors:

$$P_m^a(x) = \frac{2^{m+a}\, \Gamma(m + a + 1)}{x^{m+a}} J^a(x)$$

Introduisons maintenant pour cette dernière fonction la valeur donnée par l'auteur précédent

$$\underset{\lim m = \infty}{J^a(x)} = \frac{f_m\left(\frac{2(a+1)}{ix}, \frac{2}{ix}\right)}{\Gamma(m+a+1)} \left(\frac{ix}{2}\right)^m \left(\frac{x}{2}\right)^n$$

Après simplification, il reste la formule fondamentale:

$$P_m^a(x) = i^m f_m\left(\frac{2(a+1)}{ix}, \frac{2}{ix}\right).$$

L'expression (α) est la relation cherchée.

P. Gruner.

Eingereicht im Januar 1898.

Energetische Anschauungen.

Immer noch bildet die Energetik ein viel bestrittenes Gebiet der Physik. Die Kritiken dieser neuen Theorie haben sich in letzter Zeit so sehr gemehrt, dass es wohl der Mühe werth ist nochmals darauf zurückzukommen. — Am besten ist die Stellung der mechanistischen Atomistik zur Energetik im neu erschienenen Werk von Herrn Prof. *Boltzmann* über «die Prinzipe der Mechanik» (Leipzig 1897) dargestellt. — Aber gerade aus dieser durchaus klaren und sachlichen Beurtheilung geht hervor, dass bei allen diesen Kritiken der Energetik ein fundamentaler Punkt nicht in Betracht gezogen wird, nämlich die metaphysische Bedeutung der ganzen Streitfrage.

Es mag seltsam scheinen, dass eine physikalische Theorie die Metaphysik zu ihrer Stütze macht. Hr. Boltzmann hebt übrigens auch hervor (p. 4. a. o. O), dass metaphysische Gründe hier nicht in Betracht zu ziehen seien. Allerdings darf niemals zur Beurtheilung irgend eines thatsächlichen Verhältnisses eine metaphysische Spekulation massgebend sein. Aber im Streit zwischen Mechanistik und Energetik handelt es sich doch nicht um solche thatsächliche Verhältnisse; es handelt sich nicht darum, reine Thatsachen zu sondern und zu scheiden sondern lediglich um die Zusammenfassung einer Reihe von Thatsachen unter einen einheitlichen Gesichtspunkt; und eine solche Zusammenfassung hat immer einen hypothetischen oder spekulativen Charakter; desshalb werden bei derartigen Theorien metaphysische Einflüsse nicht nur mitspielen, sondern geradezu ausschlaggebend sein. Dass wir in dieser Ansicht nicht allein stehen, lehrt folgendes Citat aus *Hertz*: «Prinzipien der Mechanik» (Leipzig 1894) p. 27... «die *gewöhnliche* Antwort (auf Voraussetzungen metaphysischen Ur-

sprungs) ist, dass die Physik darauf verzichtet habe und es nicht mehr als Pflicht anerkenne, den Ansprüchen der Metaphysik gerecht zu werden. Sie lege kein Gewicht mehr auf die Gründe, welche von metaphysischer Seite einst zu Gunsten der Prinzipien vorgebracht worden seien, welche einen Zweck in der Natur andeuten»..... Darauf abfährt *Hertz* weiter: «*Kein Bedenken, welches überhaupt Eindruck auf unsern Geist macht, kann dadurch erledigt werden, dass es als metaphysisch bezeichnet wird; jeder denkende Geist hat als solcher Bedürfnisse, welche der Naturforscher metaphysische zu nennen gewohnt ist*» In Uebereinstimmung mit *Hertz* dürfen wir also ausdrücklich hervorheben, dass bei solch' prinzipiellen Fragen, wie sie von der Energetik aufgeworfen worden sind, die metaphysische Begründung nicht ohne weiteres übergangen werden darf.

In der That liegt in dieser Nicht-Beachtung der metaphysischen Gründe seitens der Gegner der Energetik wohl die Hauptursache, wesshalb die zahlreichen Diskussionen zu keinem rechten Resultat zu führen scheinen. Dies mag in folgender Weise erläutert werden:

Man ist sich heutzutage allgemein darüber einig, dass unsere Gedanken über die Natur blosse Bilder oder Zeichen der wahren Objekte selber sind. Auch darüber herrscht wohl überall Klarheit, dass jegliche naturwissenschaftliche Theorie nur dazu dienen soll, diese Einzel-Bilder zu einem mehr oder weniger einheitlichen Gesammtbilde zu vereinigen. Die mechanistische Atomistik und die Energetik liefern 2 solche Gesammtbilder. Das erstere stellt uns die Welt dar durch ein grosses System sog. materieller Punkte, die auf einander Fernewirkungen ausüben. Diese Wirkungen und die daraus resultirenden Bewegungen sollen die Gesammtheit der Naturerscheinungen darstellen. Die Energetik stellt uns die Welt dar als ein grosses System von raumerfüllender sog. Energie, deren Gesammtsumme konstant bleibt, die aber in steten Transformationen begriffen ist. Die Empfindungen dieser Transformationen durch unsere Sinne bilden in ihrer Gesammtheit die Wahrnehmung der uns umgebenden Natur.

Beide Theorien haben ihren metaphysisch-hypothetischen Charakter: was ein materieller Punkt und eine Fernekraft sei, wissen wir so wenig, als worin das Wesen der Energie und ihrer Transformationen bestehe.

Zwischen diesen beiden Bildern gilt es zu entscheiden. Da frägt es sich denn, wonach man entscheiden wolle, ob nach der Verwend-

keit der Bilder oder nach irgend einem metaphysischen Grunde. of. *Boltzmann* geht den erstern Weg und kommt dadurch zum sultat, dass die Atomistik der Energetik weitaus vorzuziehen sei. türlich! Denn die Atomistik ist seit Jahrhunderten stets ausgebaut rden und hat erst noch im Werke von Prof. *Boltzmann* eine istergültige Darstellung erhalten. Die Energetik steht noch unentckelt da und kann sich in keiner Weise mit der Atomistik messen. — der That: so lange die Energetik nicht wenigstens eben so klar d hypothesenfrei dasteht, wie die Mechanistik, so lange darf erstere cht *definitiv* als mit letzterer gleichberechtigt angesehen werden.

Aber es gibt eben noch eine ganz andere Beurtheilungsweise. enn eine neue Theorie auftritt, so kann sie sich nicht sofort mit r alten, längst entwickelten direkt messen. Hier wirken die metaysischen Gründe mit. Dass diese immer eine Hauptrolle bei neuen eorien spielen ist bekannt. Es sind hauptsächlich spekulative Gründe, e *Faraday* und *Maxwell* auf ganz neue Gedanken betreffs der ektricität führten. Es sind metaphysische Gründe die selber am eisten zur allgemeinen Anerkennung der mechanistischen Anhauung beitragen. *Huyghens*, der Begründer der mechanistischen idulationstheorie, hebt in seinem Werke über das Licht hervor, wie philosophische Ueberzeugung, dass alle Naturerscheinungen aus wegungen bestehen, ihn zu seiner Theorie geführt haben. — Es d auch rein metaphysische Gründe, wesshalb man früher ohne denken das *Newton'sche* Gravitationsgesetz als unvermittelte Fernerkung ansah, während gegenwärtig dieser Begriff der Fernewirkung grossem Misskredite steht. Auch die Urheber der kinetischen stheorie sind wohl durch Betrachtungen allgemeiner, metaphysischer tur auf die Idee geführt worden, die Gasgesetze durch Molekülarwegung darzustellen. Wir thun dadurch der Exaktheit der Naturschung keinerlei Eintrag, wenn wir auch ehrlich zugestehen, dass e ihre wichtigern Theorien metaphysischen Ueberlegungen entungen seien.

Während aber bis vor wenigen Jahrzehnten die ganze chtung der naturwissenschaftlichen Metaphysik dahin ging, Alles auf wegung von Atomen und Aether zurückzuführen, hat sich in neuerer it ein gewisser Umschwung in den allgemeinen Ansichten geoffent. Schon *Dubois-Reymond* zeigte, wie eng begrenzt das Gebiet des chanistischen Materialismus sei. *Kirchhoff* hob hervor, dass der nze Werth der mechanistischen Theorie nur in einer genauen

Beschreibung der Naturvorgänge bestehe — überhaupt hat sich das unbegrenzte Zutrauen, das man der materialistischen Erklärungsweise entgegenbrachte, erheblich gemindert. — Das ist eine Thatsache, die vielleicht seltsam scheint, um so mehr, als gerade in den letzten Zeiten die mechanistische Atomistik sich immer schärfer und vollkommener entwickelt hat, — aber nichtsdestoweniger ist diese Thatsache da, daran ist nichts zu ändern.

Viele Naturforscher fühlen, dass ihre metaphysischen Anschauungen durch die mechanistische Theorie nicht befriedigt werden und sehen sich desshalb nach andern Theorien um.

Worin dieser Umschwung in den metaphysischen Anschauungen besteht, woher er kommt, wieso die Energetik dem modernen metaphysischen Bedürfniss besser entsprechen soll, als die Atomistik — das ist vielleicht unmöglich klar zu legen.

Aber die Thatsachen sind da und darin allein liegt die *gegenwärtige* Begründung der Energetik.

Desshalb auch besteht für den Energetiker nicht nur die Möglichkeit sondern auch die *Gewissheit*, dass die Energetik (allerdings vielleicht erst nach mannigfachen Modifikationen) definitiv über die mechanistische Theorie triumphiren wird. Diese *Gewissheit beruht auf der Ueberzeugung, dass die Energetik metaphysisch gerechtfertigter sei, als die Atomistik.* Hier liegt das punctum saliens — und nicht in der Klarheit oder Unklarheit, nicht in dem Mehr oder Weniger von Hypothesen, auch nicht in der grössern oder geringern Leistungsfähigkeit. — Alles das sind Fragen, die natürlich mit der Zeit erledigt werden müssen, die aber gegenwärtig nicht ausschlaggebend sind. — Mag sein, dass übrigens einmal auch die Zeit kommt, wo neue, tiefere metaphysische Erkenntniss eine noch bessere Theorie, als die Energetik sie liefert, fordern wird.

Freilich wird eingewendet werden, dass hiemit jeder ernsthaften Diskussion der Faden abgeschnitten sei, und dass ein Naturforscher und Physiker nicht mit metaphysischen Gründen die Brauchbarkeit einer physikalischen Theorie beweisen dürfe.

Aber das ist es eben, was der Zweck dieser Zeilen sein soll: zu zeigen, dass *gegenwärtig* die Entscheidung des Streites zwischen Energetik und Mechanistik ausschliesslich auf metaphysischen Argumenten beruhe und noch beruhen müsse. Der Energetiker darf sich also noch nicht anmassen zu behaupten, dass seine Theorie physikalisch besser sei, als die bisherige mechanistische Anschauung —

hingegen können ihrerseits die Gegner der Energetik derselben keinen Einhalt gebieten, dadurch, dass sie die Leistungen der Atomistik mit denen der Energetik vergleichen; — dieser Vergleich muss einmal kommen, aber jetzt ist der Zeitpunkt noch nicht da.

Was aber die metaphysischen Gründe zu Gunsten der Energetik anbetrifft, so ist es hier nicht der Ort näher darauf einzutreten. — Diese Gründe sind schon öfters von Prof. *Ostwald* und vom Verfasser (siehe diese Berichte p. 25) angeführt und, so viel mir bekannt ist, eigentlich nie widerlegt worden.

Die beste Kritik der alten mechanistischen Theorie gibt übrigens *Hertz* selber. — Sein klassisches Werk wird Jedem, der noch im Zweifel ist, die metaphysische Mangelhaftigkeit der Mechanistik offenbaren.

Nachdem diese allgemeine Frage einmal erledigt ist, wende ich mich zur Betrachtung einzelner Spezialfragen.

Die Energetik nimmt ihre Berechtigung aus Gründen allgemeiner philosophischer Natur. — Es kann sich gegenwärtig noch gar nicht darum handeln, ein einheitliches System aufzustellen, das aus einigen Grnndannahmen heraus alle Naturerscheinungen abzuleiten gestattet. — *Hertz* gibt an, dass er dies vergeblich versuchte — vielleicht scheiterte sein Versuch wesentlich daran, dass er nicht rein energetisch dachte, und dass er neben der Energie noch den Massenbegriff verwendete.

Die reine Energetik kennt nur die 3 Grundbegriffe: Raum, Zeit und Energie, verknüpft durch das erste Grundgesetz, dass die Gesammtsumme der Energie bei jeder möglichen Aenderung konstant bleibe.

Die Energetik hat vor Allem aus zu untersuchen, wie sich diese Begriffe und Gesetze den thatsächlichen, beobachteten Verhältnissen anzupassen haben, d. h. wie die Energie in den verschiedenen physikalischen Disciplinen auftritt und zu den sekundären Begriffen, wie Geschwindigkeit, Wärmemenge, Temperatur, Strahlungsintensität, Stromstärke etc. führt. Daraus werden sich eine Reihe von Gesetzen und Beziehungen ergeben, es werden die Capacitäts- und Intensitätsbegriffe von *Ostwald* eingeführt werden — mit andern Worten, zunächst sind alle bekannten physikalischen Gesetze in die ganz neue und Vielen noch ungewohnte Sprache der Energetik umzusetzen. Dass diese Arbeit zunächst nicht zu einem sehr klaren und einheitlichen Bild führen wird, ist selbstverständlich — so wenig als die

elektromagnetische Theorie von *Maxwell*, die ja heutzutage noch in ihrer Urform Vielen durchaus unverständlich ist. — Erst nach dieser Vorarbeit wird es möglich sein, die energetischen Gesetze zu vereinfachen und zusammenzufassen und dann erst werden sich Consequenzen ziehen lassen können, die durch ihre Bestätigung den definitiven und *experimentellen* Entscheid für oder wider die Energetik liefern werden.

Jetzt sind wir im Stadium, wo die neuen Begriffe und die neue Anschauungweise der Energetik noch gelernt werden müssen. Dass dies nicht leicht ist, ist begreiflich. Es war wohl für jeden Physiker eine schwere Geistesarbeit, sich von den alten Begriffen der Elektricitätsmenge, der Fernewirkung etc. loszulösen und die neuen Begriffe des elektrischen Feldes, der elektrischen und magnetischen Kraftlinien richtig zu erfassen. Die neue Energetik nimmt aber der alten Mechanistik gegenüber eine ganz ähnliche Stellung ein, wie die *Maxwell'sche* Theorie zur alten Fluidatheorie. Eine kleine Ausführung dieser Analogie wird vielleicht nützlich sein: Die alte Elektricitätslehre nahm die Existenz elektrischer Fluida an; diese Fluida sammelten sich an der Oberfläche gewisser Körper, der Leiter; auf diesen Leitern konnten sie sich bewegen und beliebig ausbreiten. — Ausser dieser Beweglichkeit hatten sie die Eigenschaft durch die für sie undurchdringlichen Isolatoren hindurch zu wirken; diese Wirkung, die mit augenblicklicher Geschwindigkeit sich ausbreiten sollte, war den Massen der Fluida direkt und dem Quadrat der Entfernung umgekehrt proportional. — In ähnlicher Weise behandelt die Mechanistik die Physik überhaupt. Statt Fluida hat man einfach materielle Punkte zu setzen. Man nimmt die Existenz eines Dinges, Materie genannt, an, das räumlich in Punkten angeordnet ist, man setzt voraus, dass diese sog. materiellen Punkte auf einander momentane Fernewirkungen gemäss dem obigen Gesetze ausüben. Diese Punkte bewegen sich und ziehen sich an und daraus ergeben sich alle physikalischen Gesetze genau so gut, wie aus der Fluidatheorie die elektrischen und magnetischen Gesetze (selbstverständlich ist dies nur eine Analogie, die wie jedes Gleichniss nicht verallgemeinert werden darf).

Aber in der Elektricitätslehre hat sich eine neue Anschauung geltend gemacht: man verwirft die Fluida, ihre Bewegungen und ihre momentanen Fernewirkungen. Statt dessen denkt man sich den ganzen Raum, den man betrachtet, in einen bestimmten Zustand versetzt. Nicht die geriebenen Metallkugeln oder die sog. Stromleiter sind elektrisch wirksam, sondern in den sie umgebenden diëlektrischen

ledien finden stetig von Punkt zu Punkt fortschreitende Zustands-
nderungen statt — Zustandsänderungen, die bekanntlich direkt als
trömungen elektrischer und magnetischer Energie aufgefasst werden
önnen (s. die Arbeiten von *Poynting*). Die sog. Fortpflanzung eines
lektrischen Stromes in einem Draht besteht also gar nicht in der
ahren Fortbewegung eines Fluidums in oder auf dem Draht, sondern
i einer Zustandsänderung ausserhalb des Drahtes. Die Anziehungen
nd Abstossungen elektrisch geladener Körper sind nicht momentane
ernewirkungen sondern nur das Resultat von zeitlich sich ausbrei-
nden elektrischen Wellen.

Auch die Lichtstrahlen, die früher als wirkliche Transversalwellen
es Aethers aufgefasst wurden, sind jetzt nur noch als Schwingungen
lektrischer Kräfte, d. h. als blosse Oscillationen anzusehen. — Warum
llte diese Anschauung nicht auch auf die andern physikalischen Ge-
iete übertragen werden?

Offenbar können doch auch die Bewegungen und Fernewirkungen
aterieller Punkte durch zeitlich sich ausbreitende Zustandsänderungen
rsetzt werden. — Darin liegt das *wesentlich Neue der Energetik*,
ass sie die jetzt allgemein anerkannten Hauptgedanken der modernen
lektricitätslehre zu verallgemeinern sucht, nämlich die Gedanken,
) dass jede Fernewirkung vermittelt ist und 2); dass alle Natur-
rscheinungen nicht durch wirkliche Bewegungen von Materie oder
ether sondern durch wellenförmig fortschreitende Zustandsänderungen
largestellt werden können. — Das Substrat, das diese Aenderungen
rleidet, erhält dann den Namen der in allen Naturerscheinungen
nveränderlich auftretenden Grösse, nämlich der Energie.

Wie man in der Elektricitätslehre vom elektromagnetischen
eld ausgeht, welches Punkt für Punkt gewisse elektrische und
agnetische Energiemengen enthält, und wie man sich dann in irgend
iner Weise eine Störung des Gleichgewichtes in diesem Felde denkt
nd den Verlauf der Erscheinungen beobachtet resp. berechnet — so
at man auch in der Energetik zu verfahren.

Wir denken uns das ganze Weltall erfüllt mit Energie, die von
unkt zu Punkt in verschiedener Menge und auch in verschiedener
orm vorhanden sein kann (gerade wie im elektrischen Feld die
nergie als magnetische oder elektrische da sein kann). Zwischen
iesen verschiedenen Mengen und Formen bestehen bestimmte Gesetze,
elche die weitern Transformationen bedingen und welche wir näher
u untersuchen haben.

Denken wir uns z. B. die Erde und eine über ihrer Oberfläche frei schwebende Kugel. Die Erde und die Kugel repräsentiren gewisse Formen und Mengen von Energie, die wir als Wärmeenergie und Druckenergie vorläufig bezeichnen wollen. Kommen nur diese beiden speziellen Energien vor, während der ganze übrige Raum mit der Energieform allgemeinster Art, der Raumenergie, angefüllt ist, so wird sich ein Raumenergiefeld bestimmter Anordnung bilden — gerade wie sich um zwei elektrisirte Kugeln herum eine bestimmte elektrische Kraftvertheilung ergibt.

Diese Vertheilung der Raumenergie wird ihrerseits wieder mit den Energien der Kugel in Wechselwirkung treten und das sichtbare Resultat derselben wird der Fall der Kugel auf den Boden sein. Diese Bewegung der Kugel kann selber wieder ohne eigentliche Bewegung der Energie, sondern durch blosse fortschreitende Zustandsänderung von Energie dargestellt werden.

War die Kugel anfangs 5 m. über Boden und ist sie nach einer Sekunde zur Erde gefallen, so braucht man sich dabei nicht zu denken, dass ein kugelförmig abbegrenztes Quantum Wärme- und Druckenergie (denn die Kugel ist nichts anders als das) sich wirklich von der Höhe von 5 m. gegen den Boden hin bewegt habe, sondern nur, dass innerhalb einer Sekunde die in dieser Luftsäule von 5 m. Höhe befindliche Raumenergie successive von oben nach unten (wie bei einer fortschreitenden Welle) sich in Druck- und Wärmeenergie (und zudem noch in Bewegungsenergie = lebendige Kraft) transformirt habe. — Es liegt darin derselbe Unterschied der Auffassung, der sich bezüglich des Lichtes zwischen der Emissions- und der Undulationstheorie zeigte, oder auch zwischen der alten Idee, dass die Elektricität in einem Leiter fort fliesse, und der neuen, dass sich nur der Zustand ausserbalb des Leiters verändert.

Natürlich bleiben die thatsächlichen, uns wahrnehmbaren Verhältnisse durchaus dieselben — aber diese energetische Auffassung entspricht dann den neuen Ideen über Fernewirkung am besten.

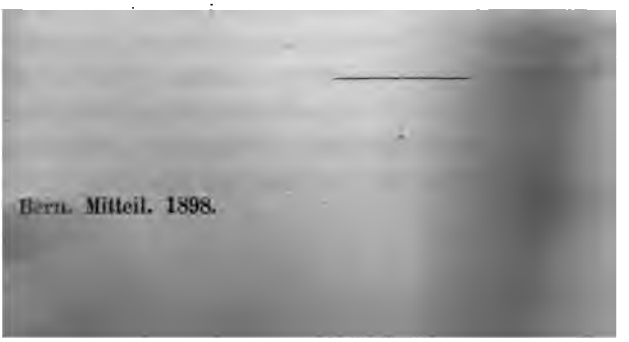
Bei diesem Anlass mag noch ein Punkt hervorgehoben werden. — Die Energetik wird oft der «Atomistik» entgegengestellt, als ob die beiden einander diametral widersprächen. Das ist nicht der Fall. Wenn die Atomistik lediglich lehrt, dass das raumerfüllende Ding (heisse es jetzt Materie oder Energie) nicht kontinuirlich, sondern in räumlich getrennten Punkten koncentrirt ist, so kann sich die Energetik sehr gut mit dieser Anschauung befreunden. Von Prof.

Boltzmann ist mit grosser Schärfe [illegible] Bedeutung der Differenzialgleichungen für die [illegible] bei dieser atomistischen Betrachtungsweise [illegible] Dies mag nun auch für die Energetik gelten. — Wir [illegible] den ganzen Raum mit Energie erfüllt [illegible] rentialen, Energieelementen [illegible] Elemente in kleinen Raumteilen [illegible] Raumtheile in endlicher Zahl [illegible] Kontinuität der Energie ist [illegible] so wenig wie in der modernen Elektrodynamik [illegible] elektrischen Energie im [illegible] muss.

Etwas anderes ist es, sobald [illegible] d. h. sobald angenommen wird, dass diese materiellen Punkte [illegible] anziehen, dadurch räumliche Bewegungen auslösen und [illegible] Bewegungen allein die Gesamtheit der Naturerscheinungen [illegible] stellen. — Hier gehen die Wege auseinander [illegible] «Energiepunkte» (ich gebrauche diesen Ausdruck [illegible] atomistischen Auschauung anzuschliessen [illegible] oder nicht, ist für die Energetik belanglos) [illegible] beeinflussen, indem von einem Energiepunkt [illegible] tionen auftreten, darin liegt allein das Wesentliche.

Mag sein, dass dadurch die Energetik [illegible] scheint, als die Atomistik. — Die Atomistik [illegible] dieser Energie-Transformationen selber zu geben, indem sie [illegible] auf Bewegungen der Energiepunkte selber zurückführen will. Es fragt sich aber nur: welches Gesammtbild ist vorzuziehen? [illegible] welches sich auf Beziehungen beruft, die nie direkt Beobachtung oder Experiment direkt ergründet werden können, wie die Atombewegungen, oder dasjenige, welches diese Verhältnisse [illegible] und sich möglichst an die Thatsachen zu halten sucht?

Bern, 3. Januar 1898.



J. H. Graf.

Einiges über Sonnenuhren.

I.

Taschen-Sonnenuhren.

1) Ein Stück, herstammend vom Liebhaber der Astronomie H. May v. Rued.

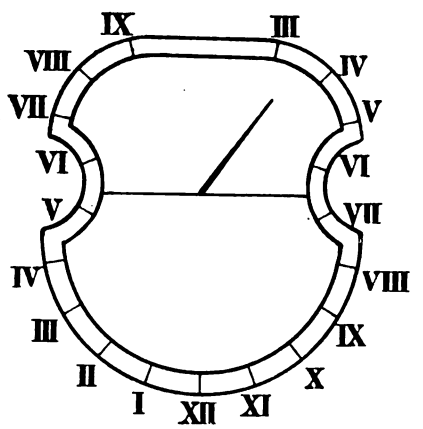
Der Apparat besteht:

1) aus dem sogenannten Stundenring mit der Einteilung in Stunden, einem Querstab mit einer Spitze;

2) dem Quadranten mit einer Einteilung von 0 bis 90°;

3) einen Compass mit Einteilung von 0 bis 180°; in derselben ist die magnet. Deklination für damals = 19° angegeben.

4) Daran befindet sich noch ein Bogen mit einem Loch, in welchem ein kleines Loth aufgehängt werden kann, einesteils zum Visieren, andernteils zum Kontrollieren der Stellung des Apparats.



Der Verfertiger *Johann Georg Vogler*, Compass - Macher in Augspurg giebt folgende Anweisung: *Gebrauch dises Compasses.* «Erstlich, hebet man «den Stundenring in die Höhe, «schliesset solchen vermittelst «des Einschnitts an demselben, «mit dem Quadranten aneinander, «richtet sodann den Ring auf «den beliebigen Grad der Polus-«Höhe nach den Quadranten, als zum Exempel vor Augspurg 48 (hier ein «Druckfehler 84), vor Regenspurg 49, vor Prag den 50. Grad, und so

«*Gebrauch dieses Universal-Compasses.*

«Erstlich hebt man den Stundenring in die Höhe, schliesset «solchen, vermittelst des Einschnitts an demselben, mit dem Quadran- «ten aneinander, richtet sodann den Ring auf den beliebigen Grad «der Polus-Höhe nach den Quadranten, nehmlich also, dass im Sommer «der obere Ranft den Grad an dem Quadranten abschneidet, im Winter «aber der untere Rand des Ringes, als zum Exempel vor Augspurg «48, vor Regenspurg 49, vor Prag den 50 ten Grad und so ferner; «sodann drehet man den Compass in der Sonne Schein so lang, bis «Pfeil auf Pfeil stehet, oder die bewegliche Magnet-Nadel just auf den «gestochenen Pfeil weiset, welcher unten auf der gestochenen Magnet- «Platte befindlich, so wird der Zeiger in dem Ring, welcher vom 23. «Merz an bis zum 22. September aufrecht von dar an oder im Winter «unter sich muss gerichtet seyn, die rechte Zeit und Stunde an- «zeigen.»

Schon aus der Vergleichung dieses Textes mit dem der vorigen Anweisung geht hervor, dass dieser Apparat mit dem 1ten aus der gleichen Zeit stammen muss und dass wahrscheinlich Müller und Vogler in irgend einem geschäftlichen Zusammenhang standen. Auch die Elevatio Poli auf der Rückseite weist ganz die gleichen Orte, mit den gleichen Polhöhen, jedoch ohne den Druckfehler Blaussenburg = Claussenburg, auf. Es trifft sich gut, dass alle drei Apparate dem historischen Museum von Bern verbleiben, wo eine eigene Abteilung mathematisch-astronomischer Instrumente gebildet wird. Die genannten wohlerhaltenen Instrumente werden eine schöne Zierde dieser Sammlung bilden. —

4) Ein viertes Stück, eine kleine Sonnenuhr, Geschenk v. Frl. L. v. Fischer an das historische Museum, zeichnet sich besonders dadurch aus, dass das kleine Pendelchen resp. Lot vorhanden ist. Das Instrument ist von Messing und teilweise versilbert und verfertigt von *And. Vogl*, wahrscheinlich in Augsburg. Die Polhöhe, Elevatio Poli, ist angegeben:

Augsburg, Paris	48°
Krakau, Prag	50°
Leipzig, Cölln	51°
London	52°

5) Ein fünftes Stück, ein noch kleineres Instrument, auch eine Sonnenuhr, ist von Messing, *Verfertiger Lor. Grassl.* Elevatio Poli:

Lisabo	39 °
Rom	42 °
Venedig	45 °
Wien, Augsburg, Paris	48 °
Krakau	50 °

Die Gebrauchsanweisung, deutsch und französisch, stammt von *Johann Nepomuk Schrettegger,* Compassmacher in Augsburg. Sie lautet im Text, wie die schon verlesene und enthält die Polhöhen vieler Orte, darunter folgender schweizerischer Städte:

Basel	47 °	55 ′
St. Gallen	47 °	22 ′
Genf	46 °	12 ′
Lucern	47 °	
Zürich	47 °	22 ′

Dieselben sind höchst ungenau, das sieht man an der Gleichheit der Angaben für Zürich und St. Gallen. —

6) Sechstes Stück:

Ein etwas abweichendes System stellt eine silberne Taschensonnenuhr, im Besitz des Hrn. *Dr. P. Gruner - Bern*, dar. Es findet sich der übliche Compass mit den 4 Hauptrichtungen und der Deklinationsabweichung, dazu der Stundenring mit Einteilung von 2 . 3 . . . 12 1 2 . . . . 9 nebst Zeiger. Der Stundenring aber kann durch einen kleinen zweiten Zeiger, der sich über einer kreisförmigen Einteilung bewegt, auf alle Polhöhen von 35 °—65 ° gestellt werden, sodass die richtige Stellung des Stundenrings auf die bequemste Art und Weise hervorgebracht werden kann. Auf der Rückseite sind die folgenden Polhöhen:

Lisobona 39, Madrit 40, Barcelona, Caragoca (Saragone), Napoli 41, Rom 42, Genua, Turin 44, Lion, Meyland, Venetig 45, Zürich, Bern 46, Insprug, Gräz 47, Paris, Wien, Strasburg, München 48, Regespurg, Nanci, Philipsburg, Nürnberg 49, Franckfurt am Main 50, Prag, Warsau, Trier, Rüssel *), Antwerpen, Gent, Leipzig, Dresden, Laick **), Berlin 51, London, Amsterdam 52, Hamburg, Danzig 54, Coppenhage 56, Stockholm 60, Augsburg 48. Der Verfertiger ist *Johann Willebrand* in Augsburg.

7) Ein *siebentes Stück* ist in meinen Besitz durch Kauf gelangt. Es

---

*) wird wohl «Brüssel» nicht «Ryssel» heissen sollen.

**) mir unverständlich.

ist eine überaus einfache, hölzerne Taschensonnenuhr mit Vertical- und Horizontaluhr nebst Compass für die Polhöhen 40°—55° berechnet, wo der Index einfach durch eine Schnur dargestellt wird. Viel feiner ist ein ebenfalls in meinen Besitz gelangtes

8) Achtes Stück aus Elfenbein mit wunderhübscher Gravur. Dasselbe zeigt auf der obern Seite eine Windrose in 32 Teile geteilt, mit beweglichem Zeiger. Auf der Innenseite des Deckels findet sich 1) eine merid. Vertical-Uhr, wo die Einteilungslinien Hyperbeln sind; 2) die Scala der Polhöhen, für welche die Uhr gebraucht werden kann, hier vom 42—54° variiert. Ferner ist vorhanden eine Ansicht einer Stadt und 3) endlich folgende Tabelle von Orten und Polhöhen:

wormbs	54	neystadt	48
manitz	54	krembs	48
trier	54	mailand	45
ege	54	venetia	45
andorf (Antwerpen)	51	lion	45
loven	51	genua	45
brüsel	51	ragusa	42
gandt	51	nicaea	42
wien	48	roma	42
lintz	48	pisa	42

Auf der Hauptplatte sind 2 Uhren nebst Compass und als Verfertiger angegeben: *Joseph ducher.*

Auf der untern Seite der Hauptplatte sind angegeben:

1) epagta gregori,
2) epagta juliana.

Die Uhr scheint mir niederländischen Ursprungs zu sein.

II.

Ein ganz anderes System ist nun durch eine kleine silberne Sonnenuhr repräsentiert, welche auch von Frl. *L. v. Fischer* dem historischen Museum geschenkt worden ist. Es figuriert vorerst ein Compass mit einfacher Windrose ganz wie bei den frühern Systemen. Die bewegliche Nadel muss auf den Zeiger der Windrose gestellt werden. Auf der ebenen Oberfläche des Instruments treffen wir zwei Einteilungen:

Pour																		
55	4	5	6	7	8	9	10	11	12	1	2	3	4	5	6	7	8	55
50	IV	V	VI	VII	VIII	IX	X	XI	XII	I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII	50
45		5	6	7	8	9	10	11	12	1	2	3	4	5	6	7		45
40		V	VI	VII	VIII	IX	X	XI	XII	I	II	III	IV	V	VI	VII		40

Die [illegible] aufgestellt. [illegible] den Polhöhen [illegible] [illegible] daselbst [illegible] len sich [illegible]

Constantinople	[illegible]	[illegible]	[illegible]
Manila	[illegible]	[illegible]	[illegible]
St. [illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
Paris	[illegible]	[illegible]	[illegible]
[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
[illegible]	[illegible]	[illegible]	
[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
La [illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
[illegible]	[illegible]		

Ein [illegible] [illegible] schein. [illegible] ilung [illegible] ur [illegible]

[illegible]

	Calais	50	37
	Dunquerque	51	2
II. Cadran:	Paris	48°	51′
	Brest	48	23
	Metz	49	14
	St. Malo	48	38
	Nancy	48	42
	Strasbourg	48	30
III. Cadran:	Lyon	45°	45′
	Grenoble	45	11′
	La Rochelle	46	10′
	Bordeaux	44	50
	Dijon	47	18
	Berne	46	47
	Genève	46	12
	Portiers	46	34
IV. Cadran:	Marseille	43°	10′
	Bayonne	43	30
	Perpignan	42	44
	Pampeloine	42	48
	Toulouse	43	22
	Rome	41	54
	Gènes	44	25
	Pan	43	12

III.

Eine dritte Gruppe von Sonnenuhren bilden die *Kugel-Sonnenuhren*. Es sind dies irdene Kugeln, die in einem Durchmesser durchbohrt sind, so dass man sie auf einen Stab aufstecken konnte, den man in den Garten stellte. Wir unterscheiden auf der Kugel 2 Hauptkreise:

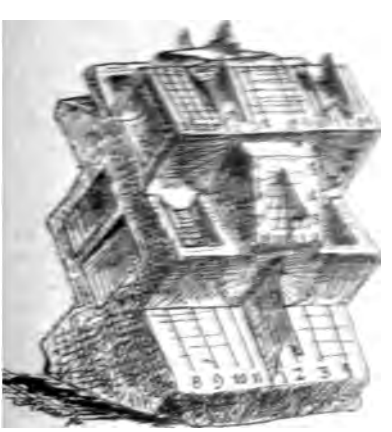
1) einen breiten Kreis, welcher durch die Ekliptikpolaxe geht, dessen Ebene mit der durch den Stab markierten Linie einen Winkel von ca. 23 ° bildet;
2) senkrecht dazu ist ein breites Band, welches die Stundenmarkierung enthält und wo bei der einen Kugel jede Stunde noch in halbe, bei der andern Kugel sich in Viertel einteilt.

Dazu gehört nun ein bewegliches, mondsichelförmiges Blech, welches mit seinen Enden an der Ekliptikaxe befestigt und um dieselbe drehbar ist.

Beim [illegible] worden [illegible] mittagsstunden [illegible]

[illegible] derts [illegible] Datum [illegible] historischen [illegible] gelegenen [illegible] dort [illegible] haben.

[illegible] Sonnenuhren-Kolonie [illegible] Auf der Vorderseite [illegible] beiden Seiten 8 ver-



schiedene Sonnenuhren, die als gegenseitige Kontrolle dienen konnten es sind horizontale und vertikale Sonnenuhren. Diese Sonnenuhr wurde von Hrn. *Dr. E. v. Felienberg* und Hrn. *Custos v. Jenner* auf dem Estrich des ehemaligen Klosters zu Friemsberg entdeckt und Hrn. v. Jenner hatte dieselbe längere Zeit im Hof der Stadtbibliothek aufgestellt, um durch fortgesetzte Beobachtung einzelne im Laufe der Zeit verwischte Skalen wieder herzustellen, was ihm auch ganz vorzüglich gelungen ist. Obige Zeichnung verdanke ich der Güte des Hrn. caud. jur. Kasser in Bern.

J. H. Graf.

Notizen zur Geschichte der Mathemati[k] und der Naturwissenschaften in der Schweiz.

Nr. 51. Herr Professor Dr. *Ludwig Fischer* trat auf Ende des Sommersemesters 1897 von der ordentlichen Professur der Botanik und der Direktion des botanischen Gartens in Bern zurück. Die h. Regierung ernannte ihn auf einstimmigen Vorschlag der phil. Fakultät der Hochschule zum Prof. honor., indem sie einesteils dadurch den verdienten Gelehrten ehren, ihn andernteils noch dem Lehrkörper der Hochschule erhalten wollte. Sein Nachfolger wurde sein Sohn, Herr Dr. *E. Fischer*. Ludwig Fischer blickt auf eine lange und ehrenvolle Laufbahn als Universitätslehrer zurück. Privatdozent für Botanik an der Hochschule im Jahre 1853 wurde er 1863 ausserordentlicher, 1863 ordentlicher Professor. Der Verfasser der «Flora von Bern» und vieler Aufsätze trat 1852 in die Bernische Naturforschende Gesellschaft, funktionierte 1853 bis 1859 als Sekretär und Kassier, wurde von 1861 an mehrmals an die Spitze der Gesellschaft berufen und wird auch einer der zwei Ehrenpräsidenten der Jahresversammlung der Schweizerischen Naturforschenden Gesellschaft sein, welche am 1., 2., 3. August in Bern tagen wird. Am 31. Januar 1898 feierte L. Eischer im Kreise seiner Familie seinen 70. Geburtstag. Herr Fischer hat sich sowohl bei seinem Rücktritt vom Ordinariat, wie auch zu diesem Tage jede Veranstaltung dringend verbeten. Allein, wie die Studentenschaft den greisen Gelehrten nicht ohne Ehrung scheiden lassen wollte und seine Verdienste durch einen solennen Fackelzug würdigte, so liess es sich die philosophische Fakultät, der der bescheidene Gelehrte seit 45 Jahren angehört, nicht nehmen, Fischers Geburtstag zu feiern. Eine Abordnung der Fakultät überreichte Herrn Fischer eine kalligraphisch ausgeführte Adresse mit folgendem Wortlaut:

Die philosophische Fakultät der Hochschule Bern

an

Herrn Professor Dr. Ludwig Fischer in Bern.

Hochgeehrter Herr Kollege!

Sie begehen heute Ihren 70. Geburtstag. Die philosophische Fakultät der Hochschule Bern, welche seit 1853 das Glück hatte, Sie zu den ihrigen zählen zu dürfen, wollte diesen feierlichen Anlass nicht

vorbeigehen lassen, ohne Ihnen die herzlichsten Glückwünsche zur Feier dieses Tages darzubringen. Nicht jedem Sterblichen ist es vergönnt einen solchen Tag zu erleben, doppelt glücklich ist aber ein Mann, der nach einem so arbeitsamen und der Wissenschaft geweihten Leben noch in so frischer Geistesverfassung denselben im Schosse der lieben Seinen geniessen kann. Dankbar erinnert sich die Fakultät daran, welche enormen Verdienste Sie um die Entwicklung Ihrer speciellen Wissenschaft an unserer Hochschule haben. Sie verstanden es, allseitig anregend zu wirken und mit den wenigen zu Gebote stehenden Mitteln Vieles zu leisten.

Wir verbinden mit diesem Dank den herzlichen Wunsch, Sie möchten uns, hochgeehrter Herr Kollege, noch recht lange erhalten bleiben und uns Ihre so geschätzte Mitwirkung nicht entziehen.

Mit vollkommener Hochachtung

Namens der philosophischen Fakultät der Hochschule

Der Sekretär: J. H. Graf. Der Dekan: F. Vetter.

Nr. 52. Ueber Ingenieur *Robert Lauterburg* haben wir folgende Daten erhalten:

R. Lauterburg ist am 14. Juni 1816 im Pfarrhaus Trubschachen geboren. Sein Vater Gottlieb Samuel war dort seit 1814 Helfer, wurde 1820 Pfarrer in Walperswyl, 1833 Pfarrer in Oberwyl, wo er 1855 starb. Nach Absolvierung seiner Studien wurde Robert Lauterburg vom Staat mit der Ausführung verschiedener Pläne beauftragt, z. B. mit denjenigen zur Brünigstrasse und der Verbauung von schwierigen Bergbächen. 1847 wurde er Bezirksingenieur in Thun, 1851 Chef der technischen Bureaus in Bern. Von 1856—59 leitete er den schönen Strassenbau von Biel nach Reuchenette. Er baute mit *F. Thormann* die Brücke der Verbindungsbahn in Basel. Ins Privatleben zurückgekehrt, widmete er sich dem Studium der Hydrometrie. Hier war er Autorität, und die Bedeutung der Wasserkräfte für unser Land konnte er nicht genug hervorheben. Er starb am 23. August 1893 in Bern.

Nr. 53. Ich habe in der Biographie von *Ludwig Schläfli* (Mitteilungen 1896, S. 127, separat S. 10) an einer Stelle angedeutet, dass feine Damen Roms über den ungelenken jungen Mann die Achseln gezuckt hätten. Es sollte sogar ein gedruckter Passus vorhanden sein. Genauere Erkundigungen ergaben, dass die bezügliche Stelle sich in einem Brief von *Rebecca* an *Fanny Hensel* d. d. 21. Oktober 1843 in «Die Familie Mendelsohn 1729—1847» von *S. Hensel,* III. Bd. befindet. Auf Schläflis Reklamation hin ist die Stelle in der 2. Ausgabe weggeblieben.

Nr. 54. Am 4. Februar 1898 starb in Genf *Henry Bouthilier de Beaumont*, Ehrenpräsident und Gründer der «Société de Géographie de Genève», Commandeur vom Orden Leopold, officier de l'instruction publique, ein verdienter Geograph, 79 Jahre alt.

Nr. 55. Am 15. Mai 1898 feierte die Geographische Gesellschaft von Bern das 25jährige Jubiläum ihrer Gründung. In der Festsitzung, welche Nachmittags 3 Uhr im Museumssaal stattfand, sprachen der derzeitige Präsident Herr R.-R. Dr. *Gobat*, *Elie Ducommun* und Herr Dr. *F. Sarasin* aus Basel, der berühmte Celebes-Reisende. Abends fand ein Festbankett statt. Die Festschrift «Die Geographische Gesellschaft von Bern 1873—1898. — Ein Rückblick gelegentlich der Feier des

25jährigen Bestehens der Gesellschaft», 57 S. wurde von Professor Dr. *Graf* verfasst. Herr E. Ducommun veröffentlichte gleichzeitig einen Nekrolog über den Gründer der Gesellschaft Herrn Professor D. *Schaffter*, gestorben 1897.

Nr. 56. Wir bringen nun eine Reihe von Briefen des Physikers und Geodäten *Micheli du Crest* zum Abdruck. Diese Briefe befinden sich auf der Berner Stadtbibliothek.

Nr. 1. Ein Brief von Micheli an Herrn Bavière (Bavier), seinen Korrespondenten in Basel:

A Monsieur Bavière l'aîné Marchand Epicier à Basle.

Au Château d'Arbourg le 24 Novembre 1753.

Monsieur,

J'ay reçu la lettre que vous m'avez fait l'honneur de m'écrire le 19 de ce mois et la nouvelle traduction des dissertations du Docteur Martine sur la chaleur et les thermomètres que vous avez eu la bonté de joindre avec et sur lesquelles vous me demandez mon sentiment, c'est pourquoi j'avois l'honneur de vous dire:

Que j'avois deja eu entre mes mains à Paris en 1741 le livre dont il sagit, en Anglais et que M. le Docteur en médecine m'avait preté. Qu'il m'en avoit expliqué lui-même quantité d'endroits, et que j'en avois fait traduire d'autres par un de mes amis, dont j'ai la version et quantité de remarques que j'ai faites dessus, dans mes papiers de Berne ou d'ailleurs, ainsy j'etois deja au fait de toutes les questions qui traite lorsque je l'ai vêtu et ce seroit un tres grand ouvrage que d'entreprendre par moi de vous dire tout ce que je pense sur la matière parce qu'il faudroit que je fisse quantité d'expériences et principalement celles sur les thermomètres à air que j'avois entrepris à Bâle, afin de m'assurer dans mes sentiments, or je ne suis pas ici en lieu pour cela. Je considère en general cet ouvrage comme une ébauche d'un fort grand travail à poursuivre qu'il renferme quantité d'observations judicieuses et quantité d'autres fort erronnées, dont je vais vous donner ici des exemples.

1° il se trompe tres fort à pag. 34 lorsquil dit à l'égard de l'esprit de vin 1° qu'il ne peut pas soutenir le degré de chaleur de l'eau bouillante et 2° qu'il gèle dans les très grands froids, car à l'egard du 1° j'ai fait plus de 100 thermometres qui prouvent le contraire et il y en a à Bale un grand nombre et quant au 2° l'exemple qu'il cite du thermometre qui gela à Torneä par le 43 degre et ½ de froid du mien, n'est nullement concluant puisque cet instrument etoit de la fabrique de l'Abbe *Nollet*[1]) qui en le plongeant dans son esprit de vin melé d'un quart peut l'avoir rempli d'un esprit de vin moitié eau, si la bouteille de l'esprit de vin étoit reposée de longue main et qu'en remplissant le thermometre il en ait plongé le col jusquau fond, car l'esprit de vin ne gela du tout point car M. de *Camus*[2]) qui l'observa lui même que la ainsy assuré étant en conversation avec lui chez M. *Geoffroy*[3]) et l'on peut encore s'en informer de lui.

[1]) *Nollet*, J. A., geb. 19. XI. 1700 zu Tusipré, † 24. IV. 1770 in Paris, Professor der Physik in Turin u. Paris.

[2]) *Camus*, Ch. S. L. geb. 25. VIII. 1699 zu Cressy, † 2. II. 1768 zu Paris. Mitgl. der Gradmessung, Professor.

[3]) *Geoffroy*, Ch. J. geb. 8. VIII. 1685 Paris, † 9. III. 1752 Paris, Apotheker, Mitgl. der Akademie.

Je suis persuadé que l'esprit de vin qui emporte la poudre et dont la dilatation est de 909 degrez au temperé et de 100 g de l'eau bouillante est capable de soutenir 100 degrez de froid sans geler je le crois meme plus propre et infiniment plus commode parce qu'on le discerne alors facilement à travers une vitre au lieu qu'il est alors presque impossible de discerner le mercure et si vous ouvrez la vitre vous troublez toute l'observation. Ajoutez encore à cet avantage celui de pouvoir transporter le thermometre d'esprit de vin sans se casser au lieu que ceux de mercure y sont tres sujets. Mais pour ce qui est des degrez de chaleur superieurs à l'eau bouillante je conviens que les thermometres de mercure valent mieux et ainsy pour de certaines observations tres promtes où l'on ne peut avoir qu'une ou deux pour donner au thermometre son equilibre et pour l'observer car on ne peut faire pour cet effet des thermometres avec du mercure qui seront plus propres que ceux d'esprit de vin, vue qu'à boules égales le mercure est le plus promt. Le docteur erre encore grandement pag. 20 et 21 de même que son traducteur et commentateur (qui est M. *le Monnier*[1]) incognito) lorsqu'ils affirment si fort la fixité du point de congelation, puisque dans ma reponse à l'abbé *Nollet*, j'ai offert de gager contre quiconque voudroit que je pousserois de l'eau sans geler jusqu'à 14 degres de froid de mon thermometre et que j'en ferois geler entre ces deux termes à quel degré l'on voudroit. M. le Professeur *Jalabert*[2]) me repondit la dessus quil croiroit que je perdais à 14, mais non pas à 13 et demi puisqu'il avoit poussé de l'eau sans geler jusques là et il l'a sans doute mandé à M. l'abbé *Nollet,* ce qui renverse tout le vieux sisteme sur la nature du froid, car s'il n'y avoit que le depart de la matiere ignée de l'eau jusques à un certain point qui fit geler l'eau, l'eau geleroit toujours au meme degré, comme le plomb fondu et la fonte de la cire vierge cessent toujours d'etre liquides au meme degré, mais l'experience que j'ai avancée et que j'ai faite à Bale en presence de M. *Bernoully* et dautres pour former de la glace prouve le contraire. Je l'ai faite aussi à Paris en presence de grand nombre de gens.

Je conviens cependant que le terme de la glace pilée n'est pas susceptible de beaucoup d'erreur et que celui de la neige fondante et qu'on tient quelque tems dans une chambre tempérée, n'en est presque pas susceptible parceque la boule du thermometre que vous y placez se trouvant plus chaude fait fondre la neige autour d'elle et procure ainsy un terme equivalent à celui de l'eau dans la glace (que jai decouvert le premier à Paris en 1742 apres bien des peines inutiles pour trouver le terme de froid qui opere la congelation), mais il faut à cet egard savoir prendre les précautions, car si la neige est bien froide dans son centre quoique les extremités en soient fondantes et que vous remuiez le thermometre de sa place et le mettiez dans une autre, vous serez exposé à le voir descendre plus bas, *Ergo* ce terme de l'eau dans la glace à l'abry de la reverberation est ce qu'il y a de plus sur, mais on ne le connoissoit pas du vivant du Docteur *Martine*[3]).

[1]) *Le Monnier*. P. Ch. geb. 23. XI. 1715 Paris, † 2. IV. 1799 Paris, Mitgl. der Gradmessung. Professor der Physik.

[2]) *Jallabert*, Louis, geb. 26. VII. 1712 in Genf, Prof. der Physik und Mathematik daselbst. † 11. III. 1768 in Genf.

[3]) *Martin*. Benjamin, geb. 1704 in Worplesdon, † 9. II. 1782 in London, Mechanicus und Optikus.

Le Docteur parle à page 45 des experiences qu'a faites M. *Campbell* pour trouver le terme de la glace qui commence à se fondre au Thermometre de *M. de L'isle* [1]), jen ai fait une magnifique d'un thermometre contenant 10 mille grains de mercure juste (je l'ai donné à mon départ de Paris a M. *le Monnier)* j'en parle dans mon imprimé de 1741 sur le therm[e] universel, je lai refait depuis lors et il a été conforme à sa precedente experience, il portoit mon terme du temperé à 137 et $^1/_2$ mais trois autres de moindre boule, dont l'un est au cabinet de Mr. *Pajot d'Onsembray*, l'autre à l'academie des beaux arts a Lion, et le 3e a votre bibliotheque, ont marqué pour ce terme le 1er 135, le second 134 et le 3e si je m'en souviens bien $133^1/_2$ or ils etoient tous quatre de differentes sortes de verre et de verrerie et leurs differences se trouvaient à peu près en raison des surfaces des boules par raport à leur contenance et non point en raison de la difference des verres. C'est pourquoi j'estime que la forme spherique des boules est la plus parfaite, puisquelle est la moindre en surface exterieure et par consequent qu'elle essuie dans l'eau bouillante la moindre dilatation quoiqu'elle en essuie cependant tel que celui de notre bibliotheque près de trois ou quatre degres, dans le tems qu'on ne sauroit à celui d'esprit de vin s'en apercevoir; (pour faire cette experience il faut plonger la boule au temperé brusquement dans de l'eau bouillante) et cela fait encore une objection fort considerable contre les therm[es] de mercure, car on marque en quelque facon à faux sur ces therm[es] le terme de l'eau bouillante puisqu'il devroit etre a ceux de Fahrenheit quelquefois 10 et meme vingt degres plus haut quoique cette erreur ne soit pas sensible entre le terme 32 de la neige fondante, et le terme de l'eau bouillante de ce thermond; neantmoins elle devient tres sensible dans les plus grands froids que l'on puisse eprouver puisque si l'on en eprouve des pareils a ceux de Semiskoy ou de Kyringa, l'erreur peut sy trouver alors de 10 ou 20 degres et par consequent il se rencontre une tres grande difference entre deux therm[es] de Fahrenheit dont l'un sera à grosse boule, et l'autre à petite boule, et sur tout si au lieu de petite boule il y a un cilindre fort long, car alors la dilatation de ce verre de l'eau bouillante est tres grande par raport à la quantité de mercure qu'il contient. Or aux therm[es] d'esprit de vin, cette erreur est si peu de chose qu'il ne vaut pas la peine d'en parler, car la boule dun therm[e] d'esprit de vin est à cet egard toujours 8 fois moins spacieuse dans sa surface relative, que non pas celle du thermometre de mercure, supposant des boules dans l'un et dans l'autre et si l'on suppose un cilindre au mercure 16 et 20 fois moins dans lesprit de vin.

(Schluss folgt im nächsten Bande.)

[1]) *De L'isle*, Joseph Nicolas, geb. 4. IV. 1688 in Paris. Mitglied der Akademie in Paris und Petersburg, † 11. IX. 1768 in Paris.

Inhalts-Verzeichnis.

	Seite der Sitzungsberichte	Seite der Abhandlungen
Baltzer A., Prof. Dr.,		
Fossile Mammutleichen aus dem Eise Neu-Sibiriens	XIV	
Lieferung XXX der Beiträge zur geologischen Karte der Schweiz	XIV	
Ein neues Barytvorkommen aus dem Oberland	XIV	
Notiz über ein Mineralvorkommen im Berneroberland		1
Brückner E., Prof. Dr.,		
Gute und schlechte Weinjahre in ihren Beziehungen zu den Klimaschwankungen	XIV	
Die Verbreitung des Eisbodens in Sibirien	XIV	
Crelier L., Dr. phil., professeur,		
Sur la fonction Besselienne de II espèce $S^{n}(x)$		61
Drechsel Edm. Prof. Dr.,		
Die Aufgaben der physiologischen Chemie	XIII	
v. Freudenreich E., Dr. phil.,		
Die Erreger der Käsereifung	X	
Girtanner A., Dr.,		
Ueber ein Steinbockgehörn aus dem Pfahlbau von Greng im Murtensee		47
Graf J. H., Prof. Dr.,		
Bericht über die Exhumierung Steiners	VIII	
Vorweisung von Reproduktionen alter Karten	XIV	
Die Exhumierung Jakob Steiners und die Einweihung des Grabdenkmals Ludwig Schlaeflis anlässlich der Feier des 100. Geburtstages Steiners am 18. März 1896. (Mit 3 Beilagen)		8
Verzeichnis der gedruckten mathematischen, astronomischen und physikalischen Doktor-Dissertationen der schweizerischen Hochschulen bis zum Jahre 1896		53
Einiges über Sonnenuhren		106
Notizen zur Geschichte der Mathematik und der Naturwissenschaften in der Schweiz		114
Gruner P., Dr. phil. und Docent,		
Die neuern Ansichten über Materie und Energie	VIII	25
Energetische Anschauungen		97
Hug O., Dr. phil.,		
Der Isteiner-Klotz bei Basel	XIV	
Kaufmann R., Dr. phil. und Gymnasiallehrer,		
Demonstration von Spinnennestern aus Korsika und Lärchennadelballen aus dem Silser See	XIV	

	Seite der Sitzungsberichte	Seite der Abhandlungen
Kissling E., Dr. phil. Docent und Sekundarlehrer,		
Neue Funde von diluvialen Arctomysresten aus der Umgegend von Bern	IX	3
Der Quellenerguss der städtischen Wasserversorgung in den letzten 30 Jahren	XIV	
Köpsel, Dr.		
Das Elektricitätswerk in Wynau	XIII	
Kronecker H., Prof. Dr.,		
Atembewegungen	VII	
Schönenberger F., Adjunkt des eidg. Oberforstinspektors,		
Die Baumriesen der Schweiz	IX	
Studer-Steinhäuslin B., Apotheker,		
Bericht über die Pilzsaison 1896.	VIII	
Studer Th., Prof. Dr.,		
Diluviale Knochen vom Salève	VIII	
Steinbockgehörn aus den Pfahlbauten . . .	VIII	
Die Fortpflanzungsgeschichte der Aale . . .	XIV	
Tschirch A., Prof. Dr.,		
Die Entwicklung der chemischen Industrie der Schweiz.	VII	
Neues Konservierungsverfahren für Hymenomyceten	VII	
Vorweisung pflanzenphysiologischer Tafeln . .	VIII	
Vorweisung des anatomischen Atlas der Pharmakognosie und Nahrungsmittelkunde . . .	VIII	
Drei botanische Gärten in den Tropen . . .	XIII	
Gedächtnisrede auf den verstorbenen Präsidenten der Gesellschaft, Herrn Dr. Ed. Drechsel . .	XIV	
Zeller J. R., Dr. phil. und Gymnasiallehrer,		
Naturwissenschaftliche Streifereien in Aegypten .	VI	
Verzeichnis der Mitglieder	XV	
Auszug aus der Jahresrechnung pro 1896 . . .	XX	
Jahresbericht über die Thätigkeit der bernischen naturforschenden Gesellschaft vom 2. Mai 1896 bis 1. Mai 1897.	III	

Verlag von K. J. WYSS in Bern.

(Fortsetzung von Seite 2 des Umschlags.)

Fascikel IV 6: *Fauna helvetica.* Heft 6: Mollusken. Zusammengestellt von Prof. Dr. Th. Studer, Dr. G. Amstein und Dr. A. Brot. Preis 60 Cts.

Fascikel V 4: *Heraldik und Genealogie.* Bearbeitet von Jean Grellet und Maurice Tripet. Bern 1895. 68 Seiten 8°. Preis Fr. 1.50

Fascikel V 6 a—c: *Architektur, Plastik, Malerei.* Zusammengestellt von Dr. B. Haendcke. Bern 1892. 100 Seiten 8°. Preis Fr. 2.—

Fascikel V 9 a b: *Landwirthschaft.* Zusammengestellt v. Prof. F. Anderegg u. Dr. E. Anderegg. Bern 1893. Heft 1—3. 258 S. 8° à Fr. 3.—
id. „ 4 „ „ —.60
id. „ 5 und 6 à „ 2.—

Fascikel V 9 c: *Forstwesen, Jagd und Fischerei.* II. Forstwesen. Zusammengestellt durch das eidgen. Oberforstinspektorat. Bern 1894, 160 Seiten 8°. Preis Fr. 2.—

Fascikel V 9 e: *Forstwesen, Jagd und Fischerei.* Fischerei. Zusammengestellt durch das eidgen. Oberforstinspektorat. Bern 1898, 65 Seiten 8°. Preis Fr. 1.50

Fascikel V 9 d: *Schutzbauten.* Zusammengestellt durch das eidgen. Oberforstinspektorat. Bern 1895. 136 Seiten 8°. Preis Fr. 2.—

Fascikel V 9 g β: *Mass und Gewicht.* Bearbeitet von F. Riis, Direktor der eidgen. Eichstätte. Bern 1894. 36 Seiten 8°. Preis Fr. 1.—

Fascikel V 9 g γ: *Post- und Telegraphenwesen.*
Postwesen. Zusammengestellt von der Schweizer. Oberpost-Direktion.
Telegraphenwesen. Zusammengestellt von E. Abrezol, Inspektor der Central-Telegraphenverwaltung. Bern 1895. 113 Seiten 8°. Preis Fr. 2.—

Fascikel V 9 g ε: *Bankwesen, Handelsstatistik, Versicherungswesen.* Zusammengestellt von W. Speiser, Basel, Dr. Geering und Dr. J. J. Kummer. Bern 1893. 207 Seiten 8°. Preis Fr. 3.—

Fascikel V 9 j: *Alkohol und Alkoholismus.* Zusammengestellt von Otto Lauterburg, Pfarrer in Neuenegg, E. W. Milliet, Direktor der eidgen. Alkoholverwaltung, und Antony Rochat, Pfarrer in Satigny. Bern 1895. 183 Seiten 8°. Preis Fr. 2.—

Fascikel V 10 e γ: *Die christkatholische Litteratur der Schweiz.* Zusammengestellt v. Dr. F. Lauchert. Bern 1893. 32 Seiten 8°. 60 Cts.

Fascikel V 10 e α: *Bibliographie der evangelisch-reformirten Kirche in der Schweiz.* Heft 1: Die deutschen Kantone. Zusammengestellt von Dr. G. Finsler. Preis Fr. 2.—

Fascikel V 10 e: *Die katholisch-theologische und kirchliche Litteratur des Bisthums Basel* vom Jahre 1750 bis zum Jahre 1893. Zusammengestellt von Pfr. Ludwig H. Schmidlin in Biberist.
Heft 1 und 2 à Fr. 3.—

Durch jede Buchhandlung zu beziehen.

Verlag von K. J. WYSS in Bern.

Graf, J. H., Prof., Dr. *Einleitung in die Theorie der Gammafunktion und der Euler'schen Integrale* . Fr. 2. —

— — *Geschichte der Mathematik und der Naturwissenschaften in bernischen Landen* vom Wiederaufblühen der Wissenschaften bis in die neuere Zeit. Heft 1—3. Fr. 7. 20

— — *Leben und Wirken des Physikers und Geodäten Jacques Barthélmy Micheli du Crest* aus Genf, Staatsgefangener des alten Bern 1746—1766. Mit Portrait Michell's, einer Ansicht seines Gefängnisses in Aarburg und Facsimile seines Panorama der Alpen . . Fr. 3. —

— — *Das Leben und Wirken des Physikers und Astronomen Joh. Jak. Huber* aus Basel, 1739—1798. Mit dem Bildnisse Huber's und einer Tafel, seine freie Uhrhemmung darstellend . . . . . Fr. 1. —

— — *Professor Dr. Rudolf Wolf. 1816—1893* . . 1. —

— — *Professor Ludwig Schläfli. 1814—1895* . . 1. 20

— — *Der Briefwechsel zwischen Jakob Steiner und Ludwig Schläfli* . . . . . Fr. 3. —

— — *Die Exhumirung Jakob Steiner's* und Einweihung des Grabdenkmals Ludwig Schläfli's anlässlich des 100. Geburtstages Steiner's. Mit 2 Lichtdrucken Fr. 1. —

— — *Der Mathematiker Jakob Steiner von Utzenstorf.* Ein Lebensbild und zugleich eine Würdigung seiner Leistungen . . . . . Fr. 1. 50

Graf, J. H., Prof. Dr. und **Gubler, Ed., Dr.** *Einleitung in die Theorie der Bessel'schen Funktionen.* 1. Heft: Die Bessel'sche Funktion erster Art. Fr. 4. —

Huber, G., Prof., Dr. *Sternschnuppen, Feuerkugeln, Meteorite und Meteorschwärme* . . . . . Fr. 1. —

— — *Forschungen auf dem Gebiete der Spektralanalyse* —. 80

— — *Die kleinen Planeten des Asteroidenringes* —. 60

Kissling, Dr., E. *Die versteinerten Thier- und Pflanzenreste in der Umgebung von Bern.* Excursions-Büchlein für Studirende . . . . . Fr. 4. —

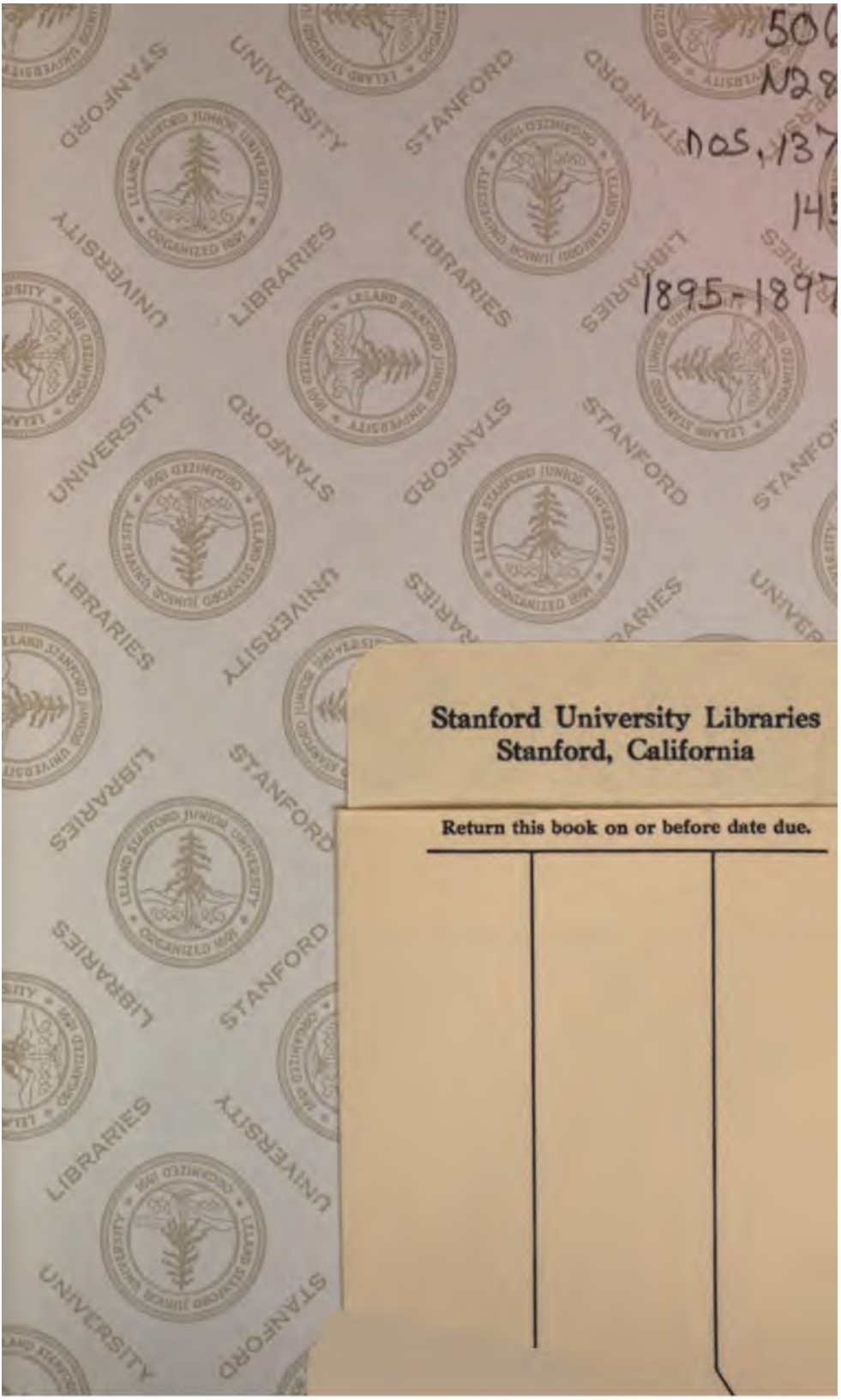
Baumberger, E. *Ueber die geologischen Verhältnisse am linken Ufer des Bielersees* . . . . . Fr. 2. —

Baltzer, A., Prof. *Vom Rande der Wüste.* Populärer Vortrag, gehalten im November 1894 in der Bern. Naturforsch. Gesellschaft. Mit drei Lichtdrucktafeln. Fr. 1. 50

Fischer, Prof. L., *Zweiter Nachtrag z. Verzeichniss der Gefässpflanzen des Berner-Oberlandes, mit Berücksichtigung der Standortsverhältnisse, der horizontalen und vertikalen Verbreitung* . . . . . Fr. —. 25

☞ Durch jede Buchhandlung zu beziehen. ☜

500
N28
nos. 137
145
1895-1897



Stanford University Libraries
Stanford, California

Return this book on or before date due.